

Physique Numérique – Exercice 3

A rendre jusqu'au **mardi 1er avril 2025** sur le [site Moodle](#)

3 L'astéroïde du siècle. Effet de Jupiter. Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Algorithme à pas de temps adaptatif.

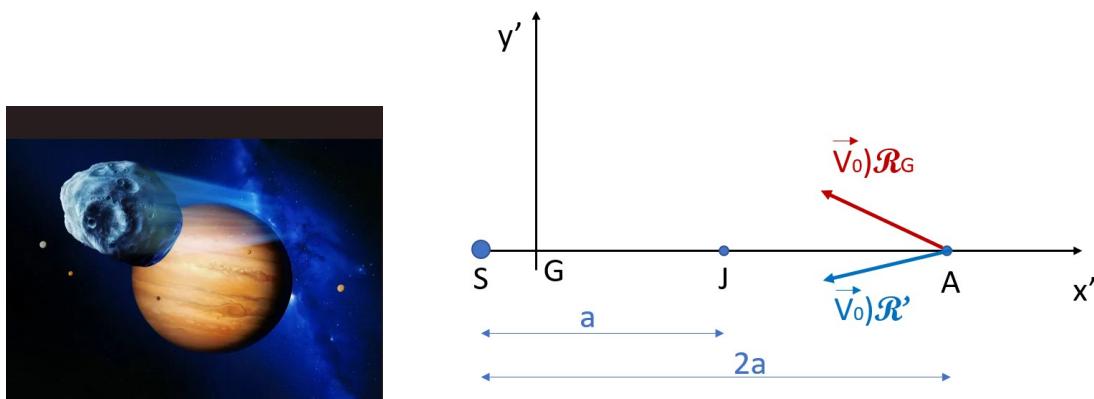


FIGURE 1 – Positions initiales du soleil, de Jupiter et de l'astéroïde.

On considère le système Soleil-Jupiter, en supposant pour simplifier un mouvement à la vitesse angulaire constante Ω que l'on calculera, étant donné la distance a constante entre le Soleil et Jupiter, et les masses m_S, m_J . Un astéroïde de masse $m_A \ll m_S, m_J$ est détecté à la distance $2a$ du soleil, avec une vitesse \vec{v}_0 donnée dans le référentiel \mathcal{R}_G du centre de masse. Soit \mathcal{R}' le référentiel en rotation avec le système Soleil-Jupiter.

Dans un premier temps, on négligera la présence de Jupiter ($m_J = 0$) pour le calcul du mouvement de l'astéroïde. (N.B. On note alors que le référentiel du centre de masse est héliocentrique, et on peut poser $\Omega = 0$ pour annuler les forces d'inertie et de Coriolis).

Dans un deuxième temps, on examinera l'effet de la présence de Jupiter : $m_J \neq 0, \Omega \neq 0$, et on calculera le mouvement de l'astéroïde dans le référentiel en rotation \mathcal{R}' .

Du point de vue numérique, on implémentera le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, ainsi qu'un schéma à pas de temps adaptatif. On comparera avec le schéma à pas de temps fixe.

3.1 Calculs analytiques [10 pts]

- [8 pts] Cas sans Jupiter. On donne $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, $m_S = 1.98892 \cdot 10^{30} \text{kg}$, $a = 778.479 \cdot 10^9 \text{m}$, $\vec{v}_0)_{\mathcal{R}_G} = (-11000, 2000) \text{m/s}$. Calculer la vitesse maximale et la distance au soleil minimale lors du passage de l'astéroïde (périhélie). Calculer la vitesse minimale et la distance au soleil maximale (aphélie).
- [2 pts] Cas avec Jupiter, $m_J = 1.89813 \cdot 10^{27} \text{kg}$. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' en rotation avec le système Soleil-Jupiter. Voir Exercice 1 : écrire les équations du mouvement de l'astéroïde et l'expression de l'énergie mécanique.

3.2 Implémentation en C++ [10 pts]

Pour cet exercice, nous ne donnerons pas de squelette supplémentaire du code. Vous programmerez vous-même tout le code - bien sûr que vous pouvez aussi, si vous le voulez, partir d'un de vos codes précédents de l'Ex.1 ou de l'Ex.2.

Vous programmerez donc l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4, Eq.(2.141) de Notes de cours, ainsi que le schéma à pas de temps adaptatif, Section 2.10.3 des Notes de Cours.

Le code lira en input la distance a Soleil-Jupiter, les masses m_S, m_J , la position et la vitesse initiale de l'astéroïde, le temps final t_{fin} , le nombre de pas de temps N_s , et le paramètre ϵ de contrôle du schéma adaptatif. On introduira aussi un sélecteur pour choisir soit le schéma Δt fixe, soit le schéma Δt adaptatif.

Pour le schéma adaptatif, on fera attention de choisir le dernier pas de temps Δt de telle sorte que le temps final de la simulation soit exactement égal au temps t_{fin} spécifié.

Le code écrira en output le temps, les positions et vitesses en coordonnées cartésiennes et l'énergie mécanique de l'astéroïde.

Votre rapport devra contenir une description succincte de votre code, pour la partie algorithme adaptatif en particulier.

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

3.3 Simulations et Analyses [25 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou Matlab).

(a) [14 pts] **Sans l'effet de Jupiter**

Pour la condition initiale comme dans la partie analytique, $\vec{v}_0 = (-11000, 2000)$ m/s, $x_0 = 2a$, $t_{\text{fin}} = 100$ ans, effectuer des simulations avec le pas de temps fixe (en variant N_s) et avec le pas de temps adaptatif (en variant ϵ). Illustrer la trajectoire obtenue. Comparer les vitesses minimale/maximale et les distances minimale/maximale avec le calcul analytique. Illustrer, dans un cas avec schéma adaptatif, comment le pas de temps varie au cours du temps. Faire des études de convergence de la position finale et de la conservation de l'énergie. Discuter et comparer les schémas fixes et adaptatifs.

(b) [11 pts] **Avec l'effet de Jupiter.** On se place cette fois dans le référentiel \mathcal{R}' en rotation avec le système Soleil-Jupiter. *Attention à transformer la position initiale et la vitesse initiale !*. Représenter la trajectoire obtenue dans le référentiel \mathcal{R}' , puis cette même trajectoire dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G . Pour un même nombre de pas de temps, quel est le rapport des erreurs obtenues sur la conservation de l'énergie entre le schéma Δt fixe et le schéma Δt adaptatif?

(c) [max 5pts] **Facultatif.** Le but de cette section est de stimuler votre créativité. On donne ci-dessous quelques pistes possibles pour aller plus loin, mais n'hésitez pas à vous lancer si vous avez d'autres idées.

- (i) En gardant l'algorithme Δt adaptatif, au lieu du schéma Runge-Kutta 4, programmez le schéma semi-implicite (cf Ex.1) et/ou le schéma de Verlet (cf Ex.2). Discuter et comparer les résultats.
- (ii) Changez un petit peu les conditions initiales de l'astéroïde, pour examiner la sensibilité de la position finale à ces changements de conditions initiales.
- (iii) Placez l'astéroïde au voisinage d'un des points de Lagrange et étudiez les trajectoires obtenues.

3.4 Rédaction du rapport en \LaTeX , soumission du rapport en pdf et du code source C++

- (a) Rédiger un rapport de **maximum 10-12 pages** dans lequel les résultats sont présentés, analysés et discutés.
- (b) Préparer le fichier du rapport en format pdf portant le nom `RapportExercice1_Nom1_Nom2.pdf`.
- (c) Préparer le fichier source C++ `Exercice1_Nom1_Nom2.cpp`.
- (d) Le lien de soumission est [ici](#).

En plus des points mentionnés ci-dessus, [5 pts] sont attribués pour la qualité générale de votre travail : qualité rédactionnelle du rapport, mais aussi participation en classe en interaction avec les assistants.