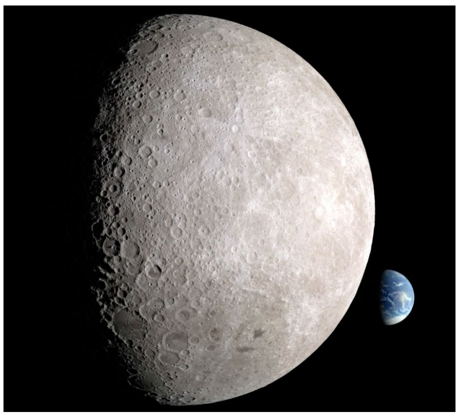
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 1

A rendre jusqu'au mardi 4 mars 2025 sur le site http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835967

1 Entre la terre et la lune ou le côté obscur de la force de Coriolis. Schémas d'Euler explicite, semi-implicite et implicite



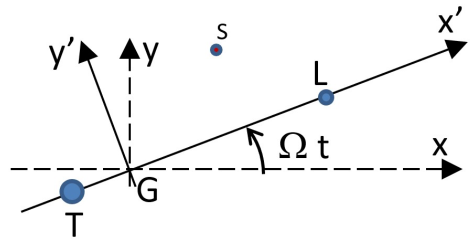


Figure 1 – Coordonnées Gxy du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_G$ et $Gx'y'$ du référentiel $\mathcal{R}'$ tournant avec le système terre-lune. Le point G est le centre de masse du système tere-lune.

Un satellite S est placé entre la terre et la lune, plus précisément au point d'équigravité (somme des forces gravitationnelles nulle), avec une vitesse initiale nulle dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation avec le système terre-lune. On négligera l'effet des autres corps célestes et, pour simplifier, on supposera que le mouvement relatif de la lune et de la terre est circulaire uniforme dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_G$. On utilisera l'approximation du mouvement à 3 corps "réduit", i.e. le mouvement de la terre et de la lune n'est pas perturbé par le satellite ($m_S << m_T, m_L$). On étudiera le mouvement du satellite dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Voir Fig.1. Pour simplifier, on supposera le mouvement dans le plan (x', y').

Du point de vue physique, le but de l'exercice est de comprendre les effets de la force d'inertie et de la force de Coriolis, le but opérationnel étant de calculer la trajectoire du satellite les quelques prochains jours.

Du point de vue numérique, le but de l'exercice est d'introduire et tester la convergence numérique des schémas d'Euler explicite, implicite et semi-implicite. On vérifiera également si la solution numérique satisfait le théorème de l'énergie mécanique. On peut décrire ces trois schémas de façon unfiée en prenant la description de la Section 2.6 des Notes de Cours, Eq.(2.90).

— Le schéma d'Euler explicite, Eq.(2.12) des Notes de Cours, s'obtient avec $\alpha = 1$.
— Le schéma d'Euler implicite, section 2.5 des Notes de Cours, s'obtient avec $\alpha = 0$.
— Le schéma d'Euler semi-implicite, section 2.6 des Notes de Cours, s'obtient avec $\alpha = 0.5$.

1.1 Calculs analytiques [12 pts]

(a) **[3 pts]** Calculer les positions de la terre x'_T et de la lune x'_L dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (système de coordonnées cartésiennes $Gx'y'$, centrées au centre de masse G, voir Fig.1). Calculer la position du point d'équigravité (somme des forces gravitationnelles nulles), qui sera la position initiale x'_0 du satellite.

(b) **[2 pts]** Calculer la vitesse angulaire Ω du mouvement orbital de la lune dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_G$.s

(c) **[5 pts]** Ecrire le système d'équations différentielles du mouvement du satellite dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et les mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{1}$$

avec $\mathbf{y} = (v'_x, v'_y, x', y')$.

(d) **[2 pts]** Ecrire l'expression de l'énerige mécanique du satellite dans $\mathcal{R}'$. Est-elle conservée ? (justifier)

1.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice1_student.zip du site Moodle. Pour rendre le code plus élégant, nous utilisons un vecteur de type 'valarray', qui est implémenté dans la 'Standard Template Library' de C++. Voir la documentation sous www.cplusplus.com/reference/valarray/valarray/. Dans le code, il faut implémenter les schémas d'Euler, Eq.(2.90), le paramètre α étant donné en input. Ceci implique d'implémenter le calcul des positions de la terre et de la lune, ainsi que de la vitesse de rotation Ω de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}_G$. Il faut aussi implémenter le calcul de la position initiale du satellite (point d'équigravité) et sa vitesse initiale (nulle). Il faut aussi implémenter le calcul de l'énergie mécanique. Les autres paramètres d'input importants sont le temps final t_{fin} et le nombre de pas de temps n_{steps}.

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

1.3 Simulations et Analyses [33 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. Si l'éxécutable est `Exercice1`, taper à la ligne de commande d'un Terminal :

```
> ./Exercice1  configuration.in
```

La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`). Voir le fichier Python : PlotResults.py, que vous modifierez selon les besoins. (On donne aussi les scripts Matlab dans le dossier Ressources Matlab : AnalyseEuler.m, PlotOutput.m et ParameterScan.m).

On prendra les valeurs suivantes : constante gravitationnelle $G = 6.6743 \cdot 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, masse de la terre $m_T = 5.972 \cdot 10^{24}$kg, masse de la lune $m_L = 7.348 \cdot 10^{22}$kg, masse du satellite $m_S = 1$kg, rayon de la terre $R_T = 6378.1$km, rayon de la lune $R_L = 1737.1$km, distance terre-lune $a = 385\,000$km. Sauf indication contraire, on prendra un temps final t_{fin} de 3 jours.

Pour le paramètre ϵ définissant la tolérance lors des itérations des schémas implicite et semi-implicite, on prendra, sauf indication contraire, $\epsilon = 10^{-3}$.

(a) **[15 pts] Comparaison des 3 schémas pour un même nombre de pas de temps**
Prendre $n_{\text{steps}} = 4000$ et effectuer une simulation pour chacun des 3 schémas d'Euler (explicite, implicite et semi-implicite). Comparer les trajectoires obtenues, ainsi que les traces temporelles de l'énergie mécanique.
Ensuite, faire de même avec $n_{\text{steps}} = 40000$. Discuter qualitativement les propriétés de la trajectoire du point de vue physique, notamment l'effet des forces d'inertie et de Coriolis : par exemple, que se passerait-il en l'absence de l'une ou l'autre de ces forces ?

(b) **[15 pts] Etude de convergence des 3 schémas numériques**
Pour chacun des trois schémas d'Euler (explicite, implicite et semi-implicite), effectuer des

séries de simulations avec des nombres de pas de temps n_{steps} différents. Vérifier la convergence numérique de la position finale $x'(t_{\text{fin}}), y'(t_{\text{fin}})$ et déterminer l'ordre de convergence. Faire de même pour le théorème de l'énergie mécanique.

(c) **[3 pts] Crash-test**
Le satellite s'écrase-t-il sur la lune ? Si oui, quand et à quel endroit ?

(d) **[max 5pts] Facultatif.** Le but de cette section est de stimuler votre créativité. On donne ci-dessous quelques pistes possibles pour aller plus loin, mais n'hésitez pas à vous lancer si vous avez d'autres idées.

   (i) Analyser le comportement du schéma semi-implicite pour diverses valeurs de la tolérance ϵ (on suggère $10^3, 10^0, 10^{-3}, 10^{-6}$), et un nombre de pas de temps fixé (par exemple $n_{\text{steps}} = 4000$) : compter le nombre d'itérations effectuées à chaque pas de temps, vérifier le comportement de l'énergie mécanique au cours du temps, vérifier la position finale.

   (ii) Simuler ce qui se passe sur une durée plus longue (un mois, par exemple) avec le meilleur des trois schémas et illuster le résultat.

   (iii) Choisir une vitesse initiale non nulle de telle sorte que le satellite rase tout juste la surface de la lune.

1.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport de **maximum 12 pages environ** dans lequel les résultats sont présentés, analysés et discutés. On peut partir du fichier source sur Moodle LaTeX(SqueletteRapport.tex) sur "Moodle". Voir aussi le dossier ressources sur Moodle : Dossier LaTeX.

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice1_Nom1_Nom2.pdf`.

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice1_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, [**5 pts**] *sont attribués pour la qualité générale de votre travail : qualité rédactionnelle du rapport, mais aussi participation en classe en interaction avec les assistants.*