

Physique Numérique – Semaine 10

Rappel de la semaine 9

☐ 4.1 Advection-Diffusion

- ☐ Limite de stabilité: critère CFL

☐ 4.2 Ondes

- ☐ Différences finies explicite à 3 niveaux
- ☐ **Ex.5** - Vague dans un océan de profondeur variable

Plan de la semaine 10

☐ 4.2 Ondes

- ☐ Modes propres, fréquences propres. Excitation résonante.
- ☐ Analyse de stabilité de Von Neuman: critère CFL.
- ☐ Ondes en eaux «peu profondes»: équations.
- ☐ Profondeur variable. WKB.
- ☐ Tsunami or not tsunami, that is the question.

Semaine 11

☐ 4.3 Schrödinger

- ☐ Schéma semi-implicite de Crank-Nicolson

Documentation

- Lecture pour la Semaine #10: Notes de cours
 - **Section 4.2 Ondes**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

Ondes – schéma numérique

■ Schéma différences finies explicite 3 niveaux

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

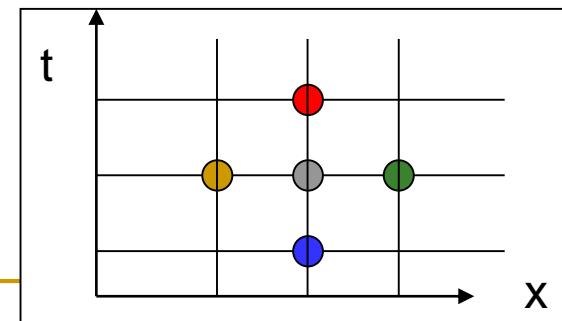
Discretisation $\{(x_i, t_j)\}$

$$f_j'' = \frac{1}{h^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{f(x_i, t_{n+1}) - 2f(x_i, t_n) + f(x_i, t_{n-1}))}{(\Delta t)^2} \approx u^2 \left(\frac{f(x_{i+1}, t_n) - 2f(x_i, t_n) + f(x_{i-1}, t_n))}{(\Delta x)^2} \right) \quad (4.40)$$

$$\boxed{\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{f(x_i, t_{n+1}) \approx 2(1 - \beta^2)f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta^2 [f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)]} \quad (4.42)$$



Ondes en milieu homogène, 1D

- Quelques démonstrations en «live»
 - Initialisation: immobile, progressive, rétrograde
 - Conditions aux limites: fixes, «libres», sortie
 - Réflexions
 - Superpositions
 - **Ondes stationnaires, modes propres, fréquences propres**
 - **Excitation résonante**

Modes propres, fréquences propres

- Mode propre: mvmt particulier du système homogène (i.e. SANS excitation extérieure) pour lequel TOUS les degrés de liberté oscillent à la même fréquence, appelée fréquence propre.
- De démonstrations seront faites en simulation.
- Principe de superposition: la somme algébrique de 2 modes propres est également solution du système homogène.

Modes et fréquences propres – Solution générale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Séparation des variables $f(x, t) = A(x)B(t)$

$$A(x) \frac{d^2 B}{dt^2}(t) = u^2 \frac{d^2 A}{dx^2}(x) B(t) \quad \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dt^2}(t) = u^2 \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2}(x)$$

$$\text{fct}(t) = \text{fct}(x) = \text{const} = C$$

$$\frac{d^2}{dt^2} B(t) = C B(t)$$

$B(t)$ est fonction propre de l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$
de valeur propre C

$$B(t) = \hat{B} e^{-i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 \hat{B} e^{-i\omega t} = C \hat{B} e^{-i\omega t} \Rightarrow C = -\omega^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} A(x) = \frac{-\omega^2}{u^2} A(x)$$

$A(x)$ est fonction propre de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$
de valeur propre $-\omega^2 / u^2$

$$A(x) = \hat{A} e^{ikx} \Rightarrow -k^2 \hat{A} e^{ikx} = -\left(\omega^2 / u^2\right) \hat{A} e^{ikx}$$

Modes et fréquences propres – Solution générale

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{u^2}} \quad \text{Relation de dispersion} \quad \omega = \pm ku, \quad k = \pm \frac{\omega}{u}$$

La solution générale s'écrit

$$f(x, t) = (Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}) (Ce^{ikx} + De^{-ikx}) \quad (*)$$

$$= \bar{A}e^{i(kx-\omega t)} + \bar{B}e^{i(-kx-\omega t)} + \bar{C}e^{i(kx+\omega t)} + \bar{D}e^{i(-kx+\omega t)} \quad (**)$$

Les conditions initiales et aux bords déterminent les constantes d'intégration.

P.ex., onde purement progressive $\rightarrow f(x, t) = F(x - ut), \forall x, \forall t,$

$$\bar{B} = 0, \quad \bar{C} = 0 \Rightarrow f(x, t) = \bar{A}e^{ik(x-\frac{\omega}{k}t)} + \bar{D}e^{-ik(x-\frac{\omega}{k}t)}$$

Ainsi, la méthode de séparation des variables permet de trouver non seulement des ondes stationnaires, mais aussi des ondes propageantes

Signes de ω et de k ... ? De \mathbb{C} dans \mathbb{R} ...

La solution physique s'obtient en prenant la partie réelle de la représentation complexe.

En poursuivant notre exemple de l'onde progressive, en posant

$$\xi = kx - \omega t, \quad \bar{A} = a + ib, \quad \bar{D} = d + ig$$

on obtient

$$f(x, t) =$$

$$(a + d) \cos \xi + (g - b) \sin \xi = \tilde{A} \cos \xi + \tilde{B} \sin \xi = A_0 \cos(\xi + \varphi_0) .$$

Il reste donc bien 2 constantes d'intégration réelles.

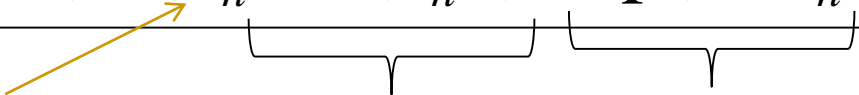
On peut faire le même type d'analyse, en partant de l'Eq.(*) de la page précédente, pour d'autres situations, p.ex conditions aux limites Dirichlet ou Neumann \rightarrow onde stationnaire, quantification. (voir Exercice 5).

Modes et fréquences propres – conditions aux bords

- Pour l'exercice 5, on prend des conditions aux bord **fixe (Dirichlet) à droite et «libre» (Neumann) à gauche.**
- On applique ces conditions aux bords à la solution générale.
- Cela conduit à une **quantification** des fréquences possibles, appelées **fréquences propres.**
- La fonction spatiale correspondant à chaque fréquence propre est appelée fonction propre ou **mode propre.**

Modes et fréquences propres – superposition

La **fonction propre** correspondant à cette fréquence propre ω_n est:

$$f_n(x, t) = \hat{A}_n \sin(k_n x) \exp(-i\omega_n t)$$


$\hat{A}_n = |\hat{A}_n| e^{i\varphi_n} \in \mathbb{C}$ Dépendance spatiale de la fonction propre

Dépendance temporelle de la fonction propre: oscillation à la fréquence ω_n

L'équation d'onde étant linéaire, toute superposition linéaire de solutions est aussi une solution. Ainsi, la solution générale (mais satisfaisant les conditions aux bords) peut s'écrire comme superposition de modes propres:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \sin(k_n x) \exp(-i\omega_n t)$$

Les coefficients (complexes) A_n sont déterminés par les **conditions initiales**

Superposition de modes propres – conditions initiales

- Dans cet exemple, on prend des conditions aux initiales ***au repos***.

$$\begin{cases} f(x,0) = f_{init}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{A}_n| \cos(\varphi_n) \sin(k_n x) = f_{init}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} -|\hat{A}_n| \sin(k_n x) \omega_n \sin(\varphi_n) = 0 \end{cases}$$

De la 2^e éq, satisfaite pour tout x , on tire : $\sin(\varphi_n) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_n) = \pm 1 \equiv \sigma_n$

Et donc, on peut écrire la 1^e Eq:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n |\hat{A}_n| \sin(k_n x) = f_{init}(x)$$

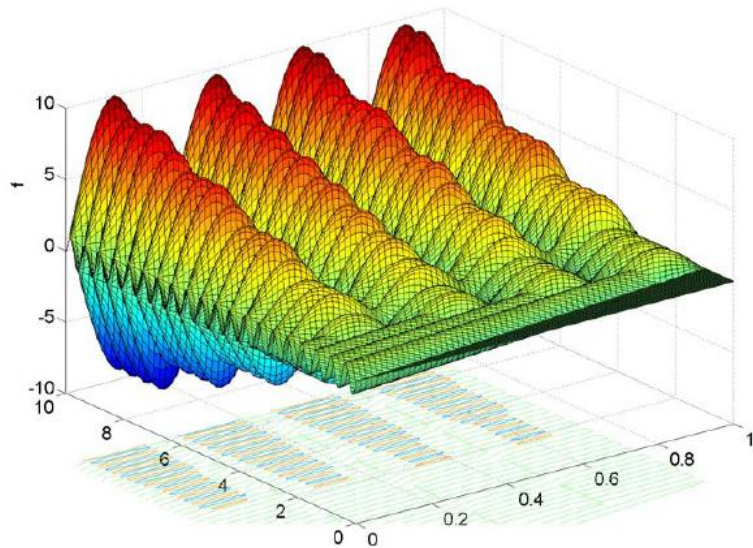
Les $\sigma_n |\hat{A}_n|$ sont donc les **coefficients de la série de Fourier de f_{init}**

Démonstrations (simulations «live»)

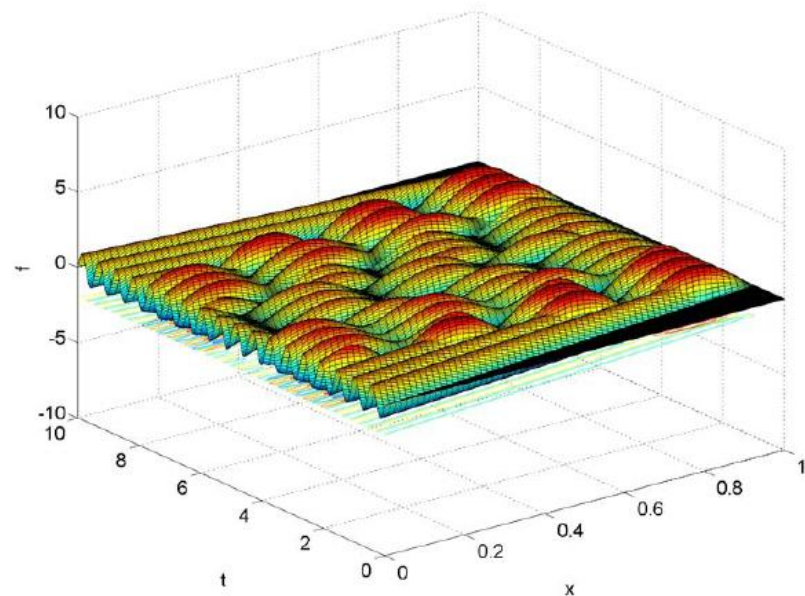
- www.falstad.com
 - Math and Physics aplets
 - loadedstring
- Recherche de modes propres et fréquences propres par excitation résonante

Ondes - excitation

■ Recherche de modes propres



$$\omega = 4 \frac{\pi u}{x_r - x_l}$$



$$\omega = 3.6 \frac{\pi u}{x_r - x_l}$$

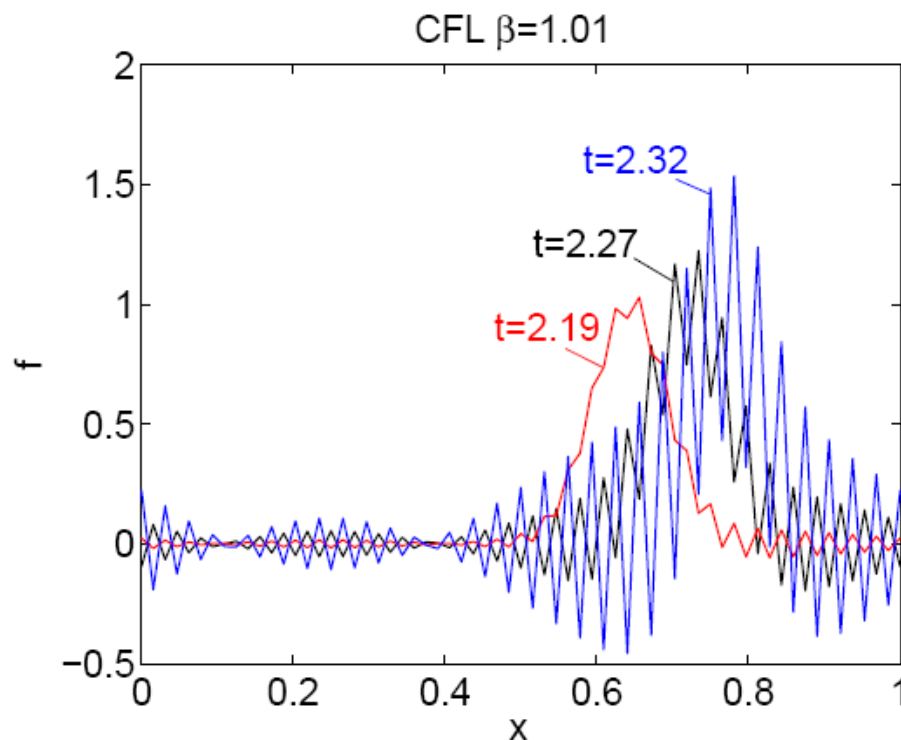
Ondes – instabilité numérique

■ 4.2.2 Stabilité du schéma différences finies explicite 3 niveaux pour l'équation d'ondes

Condition de stabilité CFL

$$0 \leq \beta^2 \leq 1$$

$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

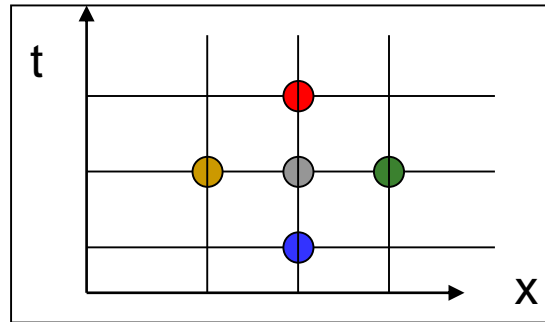


$$\beta = 1.01$$

Ondes – instabilité numérique

- Le mode instable est une ***oscillation*** dans l'espace (avec 2 pts de maillage x_j par longueur d'onde) et le temps (2 pts de maillage t_j par période) dont ***l'amplitude croît exponentiellement***
- On fera la démonstration au tableau du critère de stabilité CFL: analyse de ***Von Neumann – voir aussi section 4.2.2***

Ondes – Analyse de stabilité Von Neumann



$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f(x_i, t_{n+1}) \approx 2(1 - \beta^2)f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta^2(f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)) \quad (4.43)$$

Ansatz: on cherche une solution de (4.43) de type ondulatoire, avec la possibilité d'avoir une amplitude exponentielle dans le temps

$$f(x_i, t_n) = \hat{f} \exp\{i(kx_i - \omega t_n)\}, \quad \hat{f} \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (4.26)$$

On définit le «gain» G : $f(x_i, t_{n+1}) = G f(x_i, t_n), \quad G = e^{-i\omega \Delta t}$

Condition de stabilité: $|G| \leq 1, \forall k, \forall \omega$

Analyse de stabilité de Von Neumann

Ondes. Explicite 3 niveaux. Stabilité

Introduisant (4.26) dans (4.43) :

$$\begin{aligned} \hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n + \Delta t))} &= \\ 2(1 - \beta^2) \hat{f} e^{i(kx_i - \omega t_n)} - \hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n - \Delta t))} \\ + \beta^2 \left[\hat{f} e^{i(k(x_i + \Delta x) - \omega t_n)} + \hat{f} e^{i(k(x_i - \Delta x) - \omega t_n)} \right] \end{aligned}$$

En posant $G = e^{-i\omega\Delta t}$ (on note que $e^{+i\omega\Delta t} = \frac{1}{G}$),
factorisant $\hat{f} e^{i(kx_i - \omega t_n)}$ et
utilisant $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2\cos(k\Delta x) = 2(1 - 2\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}))$
posant $\theta = \frac{k\Delta x}{2}$, on obtient :

$$G = 2 - 2\beta^2 - \frac{1}{G} + \beta^2(2 + 4\sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$G^2 - 2(1 - 2\beta^2\sin^2\theta)G + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$G = 1 - 2\beta^2\sin^2\theta \pm \sqrt{\Delta}, \text{ avec}$$

$$\Delta = (1 - 2\beta^2\sin^2\theta)^2 - 1.$$

On rappelle que le critère de stabilité est $|G| \leq 1$.

• Si $\beta^2 \leq 1$, alors $\sin^2\theta \leq 1 \Rightarrow 2\beta^2\sin^2\theta \leq 2$
 $\Rightarrow (1 - 2\beta^2\sin^2\theta)^2 \leq 1 \Rightarrow \Delta \leq 0$
 et donc

$$G = 1 - 2\beta^2\sin^2\theta \pm i\sqrt{1 - (1 - 2\beta^2\sin^2\theta)^2}$$

$$\Rightarrow |G|^2 = (1 - 2\beta^2\sin^2\theta)^2 + 1 - (1 - 2\beta^2\sin^2\theta)^2$$

$$\Rightarrow |G|^2 = 1, \forall \theta \Rightarrow \text{STABLE}$$

• Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin\theta = 1$,

$$\Delta = (1 - 2\beta^2)^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow G = 1 - 2\beta^2 \pm \sqrt{\Delta}$$

On a $1 - 2\beta^2 < -1$, et en prenant la solution $-\sqrt{\Delta}$,
on a $G < -1$, et donc $|G| > 1 \Rightarrow \text{INSTABLE}$

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité

$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

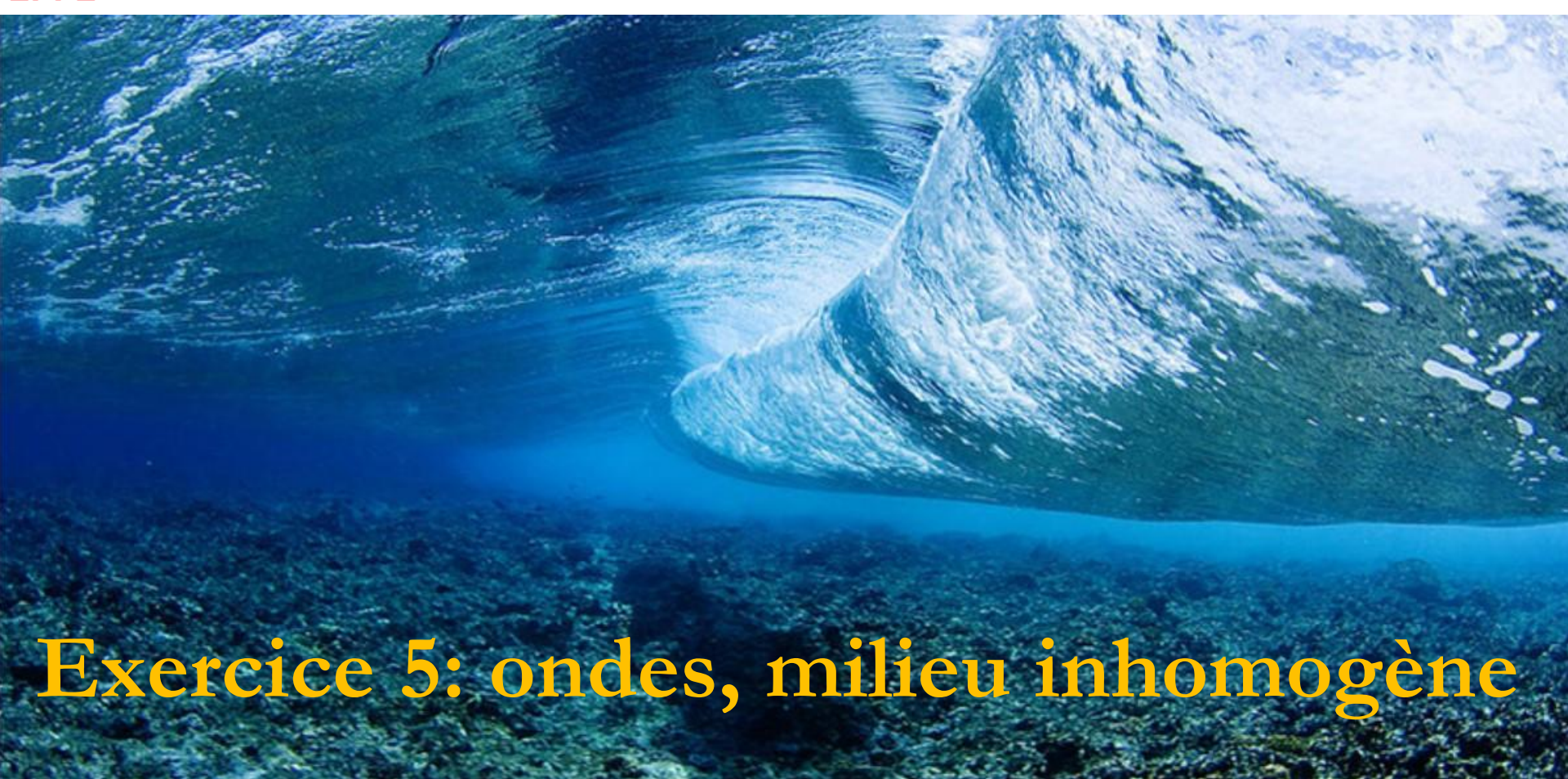
Si $\beta^2 \leq 1$, $|G|^2 = 1 \Rightarrow$ stable

Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin^2 \theta = 1$, $G < -1 \Rightarrow$ instable

$$\theta = k \Delta x / 2 \quad \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{k \Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = 2\Delta x$$

- 2 points de maillage par longueur d'onde, c'est bien ce que l'on a observé sur les simulations instables!

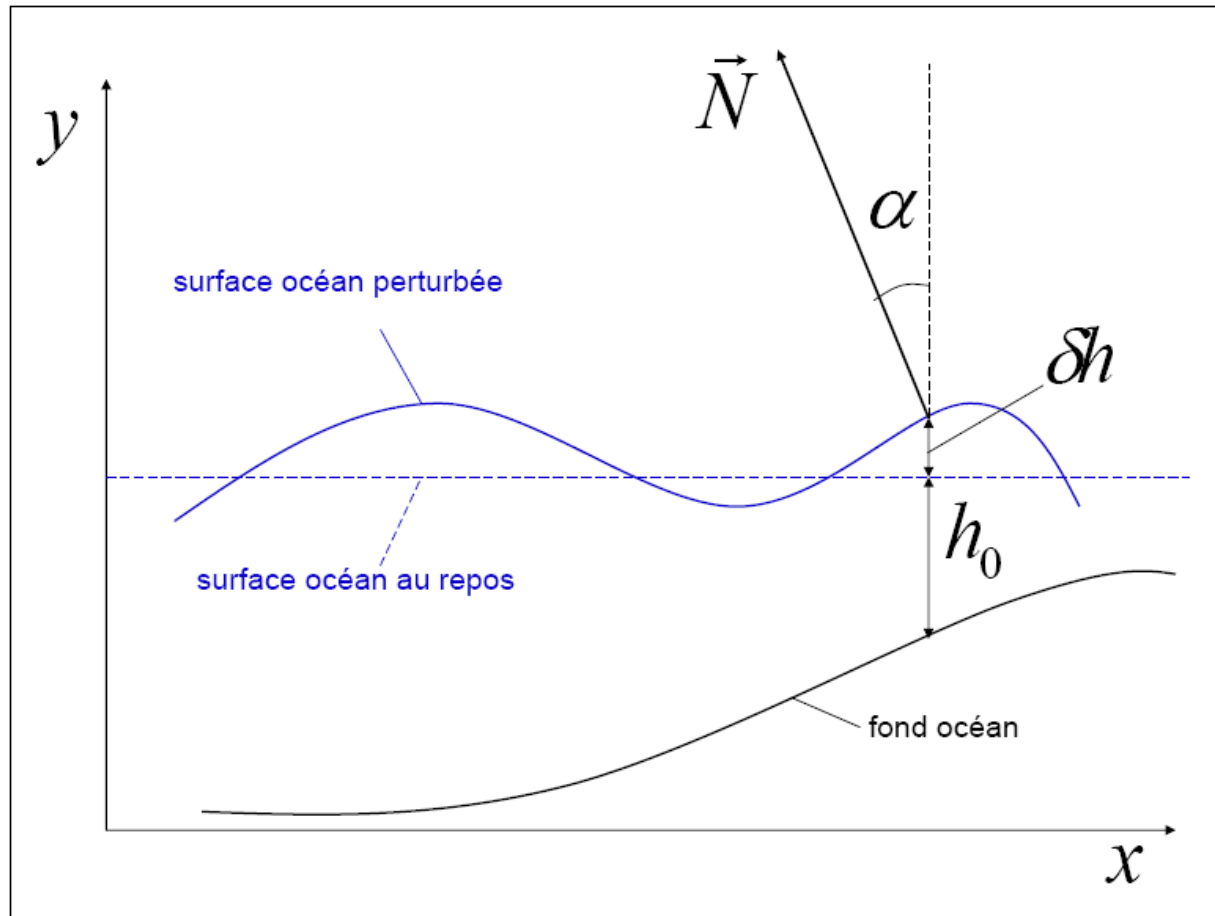


Exercice 5: ondes, milieu inhomogène

- Equations
- **Solution analytique approximative: méthode WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)**
- Simulations numériques et comparaison

Equations en eaux peu profondes

- Voir Annexe E des Notes de Cours + au tableau



$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho_0 \vec{g} \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{v}) = 0 \quad (\text{E.4}) \quad \text{1D: } -\frac{\partial(v_x h)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Hypothèses:

- fluide parfait, incompressible
- 1D
- Eaux peu profondes: $h_0 \ll \lambda$
- Petites perturbations \rightarrow linéarisation

$$\alpha \ll 1$$

$$\left| \frac{dv_y}{dt} \right| \ll g$$

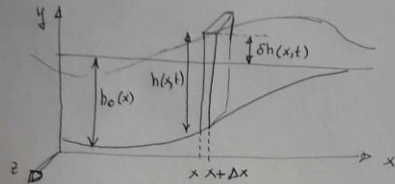
$$h(x, t) = h_0(x) + \delta h(x, t)$$

$$\vec{v}(x, t) = 0 + \delta \vec{v}(x, t)$$

Présentation au tableau

Ondes en eaux "peu profondes", profondeur variable

On considère une tranche de fluide d'épaisseur Δx , largeur L selon z , et on note sa hauteur $h(x, t)$.



On note $h_0(x)$ la profondeur de l'océan à l'équilibre, et $h(x, t) = h_0(x) + \delta h(x, t)$.

Le fluide est supposé incompressible, donc son volume est conservé. La variation de volume à travers les faces latérales de la tranche de fluide, par unité de temps, est :

$$-v_x(x, t) h(x, t) L + v_x(x + \Delta x, t) h(x + \Delta x, t) L. \quad (1)$$

La variation de volume de la tranche de fluide par unité de temps, due à son mouvement vertical, est

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \Delta x L. \quad (2)$$

La variation totale implique (1)+(2) = 0. En divisant par L , puis par Δx , et faisant $\lim \Delta x \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x h) = 0 \quad (E.4)$$

C'est, en 1D, l'Eq. (E.4) des notes de cours. L'autre équation fondamentale est l'Eq. d'Euler (Navier-Stokes en négligeant la viscosité) :

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g} \quad (E.3)$$

On résout ces équations avec les hypothèses "d'eaux peu profondes" (en fait : $h_0 \ll \lambda$), impliquant que l'accélération verticale $|\frac{dv_y}{dt}| \ll g$

et que les perturbations sont "petites" ; d'où :

$$h(x, t) = h_0(x) + \delta h(x, t)$$

$$\vec{v}(x, t) = 0 + \delta \vec{v}(x, t)$$

on négligera les termes en δh^2 , $\delta h \delta v$, $(\delta v)^2$, etc, ce qui veut dire : on linéarise les équations.

Écrivant (E.3) selon x et selon y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho_0 g \end{array} \right. \quad (6)$$

La surface de l'eau est une isobare ; $\vec{\nabla} P \perp$ surface
 $\Rightarrow \frac{\partial P / \partial x}{-\partial P / \partial y} = \tan \alpha = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7)$

Combinant (5)(6)(7), négligeant $\frac{dv_y}{dt}$ dans (6),

$$\rho_0 \frac{dv_x}{dt} = -\rho_0 g \frac{\partial \delta h}{\partial x}$$

On se rappelle que d/dt est la dérivée totale, ou dérivée convective, qui est $\partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, et donc

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = -g \frac{\partial \delta h}{\partial x} \quad (8)$$

Nous avons donc le système d'équations (E.4)(8).

En linéarisant, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \delta h}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_0 \delta v_x) = 0 \end{array} \right.$$

Dérivant par rapport au temps ($\partial/\partial t$) cette dernière équation, et substituant $\partial \delta v_x / \partial t$ de la première,

$$\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (h_0 (-g \frac{\partial \delta h}{\partial x})) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial \delta h}{\partial x} \right) \right] = 0$$

La vitesse de propagation est $u(x) = \sqrt{g h_0(x)}$
 (Pour $h_0 = 7000$ m, $u = 262$ m/s = 944 km/h !)

Profondeur variable $h_0(\mathbf{x})$ $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$

Vitesse de propagation variable $u(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta h) = 0 \quad (\text{A})$$

Laquelle de ces équations est correcte?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta h \right) = 0 \quad (\text{B})$$

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2(x) \delta h) = 0 \quad (\text{C})$$

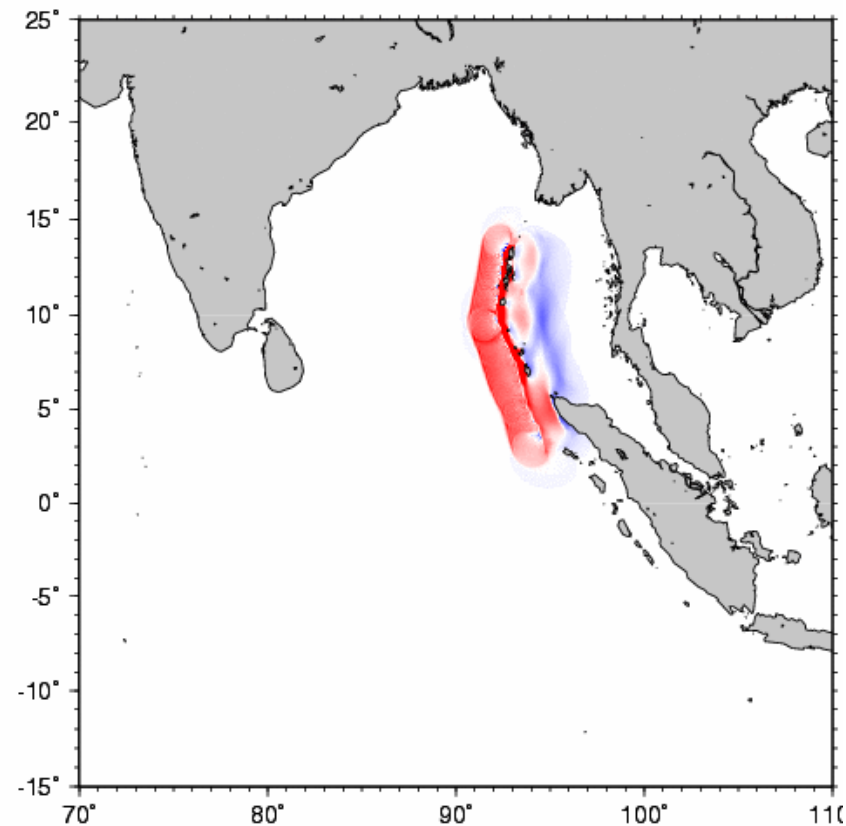
26 December 2004, 7h55 (WIB)

The Earth shakes



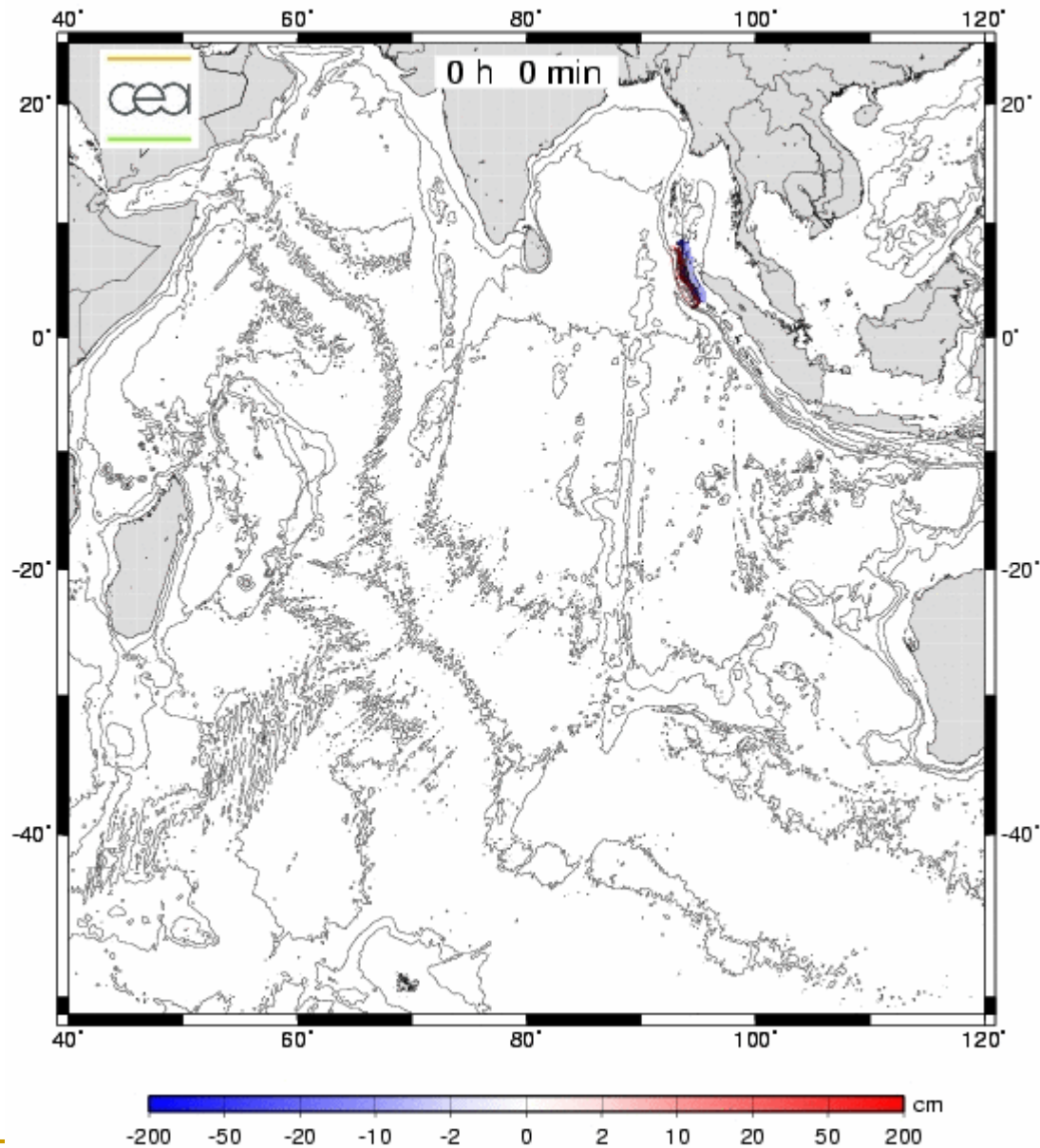
26 décembre 2004, 7h58 (WIB)

2004 Sumatra Earthquake 010 min



<http://www.psychceu.com/tsunami/animation.sm.gif>

Indian Ocean tsunami 2004



http://www-dase cea.fr/actu/dossiers_scientifiques/2004-12-26/index_en.html



- Cette usine électrique flottante (3000 tonnes) s'est retrouvée à 6 km à l'intérieur des terres – Banda Aceh, Indonésie

Profondeur variable $h_0(\mathbf{x})$ $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$

Vitesse de propagation variable $u(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta h) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta h \right) = 0 \quad (\text{B})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2(x) \delta h) = 0 \quad (\text{C})$$

Laquelle de ces équations est correcte?

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

Méthode WKB

- Wentzel, Kramers, Brillouin
- Solution analytique avec des approximations basées sur des hypothèses
- Au cœur de la méthode: séparation des échelles de variation
- Dépendance temporelle sinusoidale $\delta h(x, t) = e^{-i\omega t} \delta \hat{h}(x)$
- Substituant dans l'Eq.(B):

$$-\omega^2 \delta \hat{h}(x) = \frac{d}{dx} \left(u^2(x) \frac{d}{dx} \delta \hat{h}(x) \right) \quad (*)$$

- Dépendance spatiale ~sinusoidale, phase $S(x)$
rapidement variable, amplitude $A(x)$ **lentement** variable

$$\delta \hat{h}(x) = A(x) \exp(iS(x)) \quad (**)$$

WKB (2) – “ordering”

- On fait l’hypothèse que la variation de $A(x)$ est liée à la variation de $u^2(x)$, i.e. ce sont des variations lentes du même ordre
- On va «tagger» les termes variant lentement avec ε , qui symbolise la «petitesse» du terme
- Chaque fois qu’on dérive un terme, il prend un ordre supérieur, symbolisé par une puissance de ε supérieure

$$\begin{array}{lll}
 \frac{dS}{dx} \equiv k(x) & \text{rapide (grand): } \sim \varepsilon^0 & \frac{dk}{dx} \sim \frac{d^2 S}{dx^2} \sim \varepsilon^1 \\
 A \sim \varepsilon^0 & \frac{dA}{dx} \sim \varepsilon^1 & \frac{d^2 A}{dx^2} \sim \varepsilon^2 \\
 u^2 \sim \varepsilon^0 & \frac{du^2}{dx} \sim \varepsilon^1 & \frac{d^2 u^2}{dx^2} \sim \varepsilon^2
 \end{array} \quad (***)$$

WKB (3) – “ordering” (suite)

- On insère (**) dans (*), et on simplifie par e^{is} .
- On inspecte chaque terme, en y ajoutant les «tags» (***)
- On regroupe les termes ordre par ordre, i.e. par puissance de ε .
- On résout ordre par ordre, en insérant la solution à l'ordre 0 dans l'équation d'ordre 1
- *La présentation sera faite au tableau*
- La solution à l'ordre 0 donne:

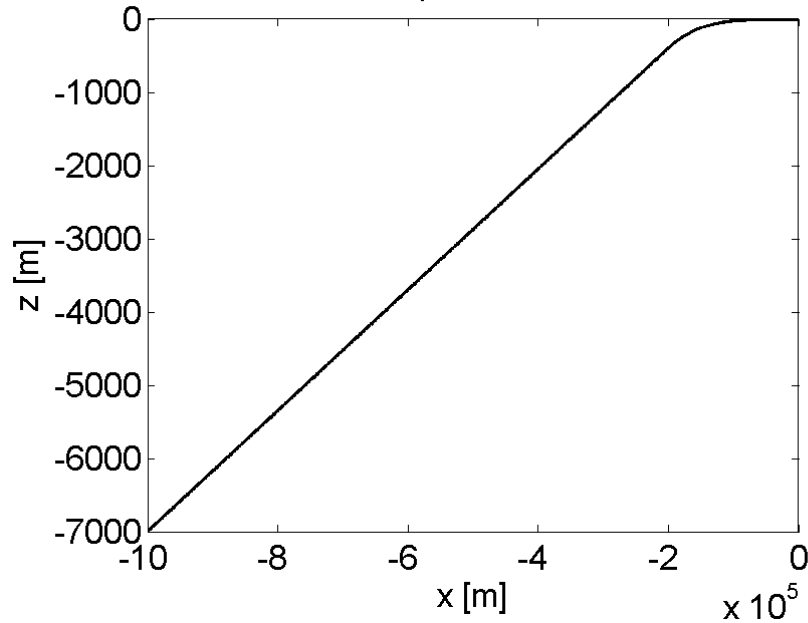
$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \equiv k^2(x) = \frac{\omega^2}{u^2(x)} = \frac{\omega^2}{gh_0(x)}$$

- La solution à l'ordre 1 donne:

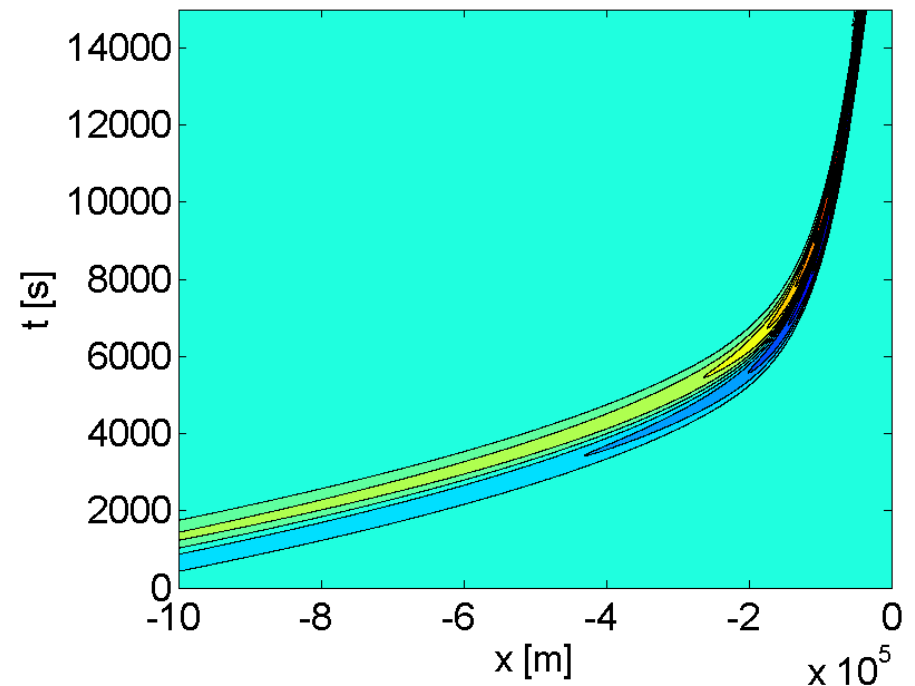
$$A(x) = A_0(u(x))^{-1/2} \sim (h_0(x))^{-1/4}$$

Comparaison WKB - numérique

Onde Explicite 3 niveaux



Profondeur de l'océan



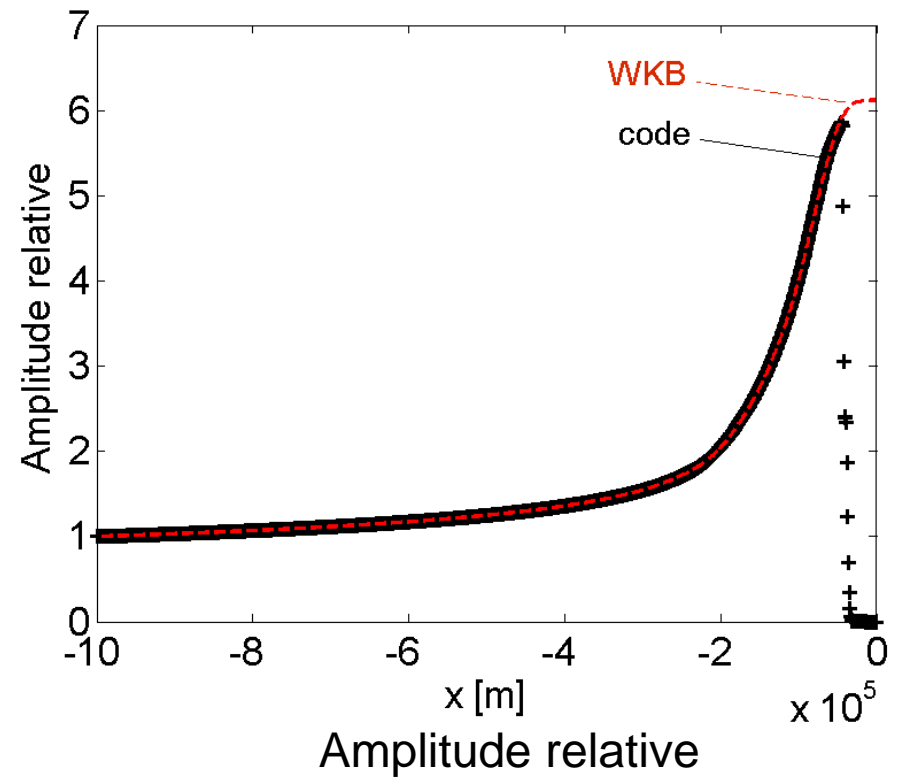
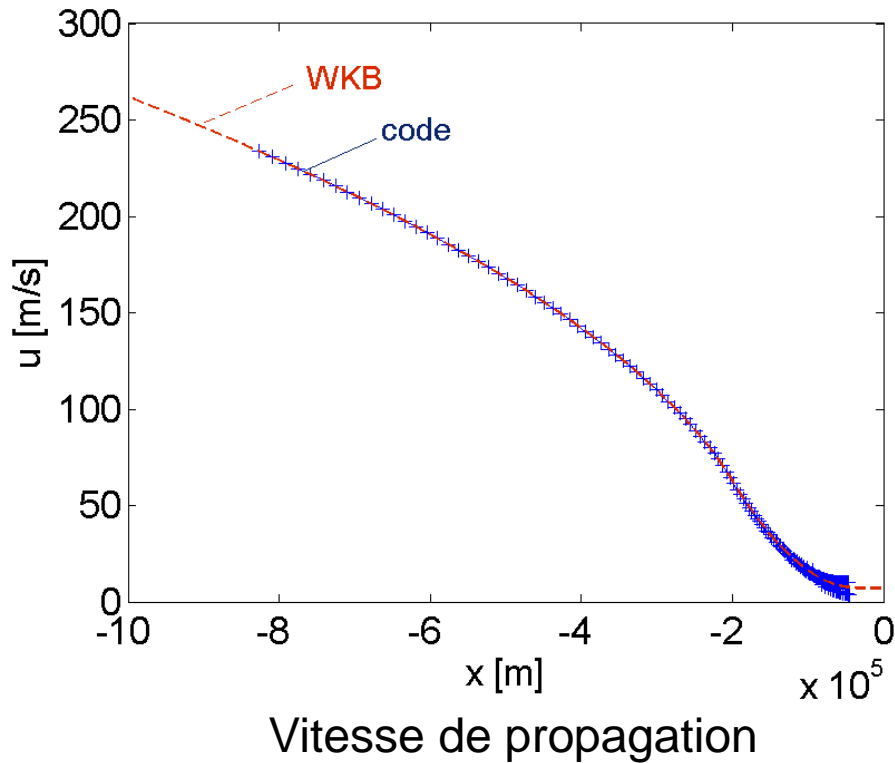
Solution numérique $f(x,t)$

Période de la perturbation $T=2000s$

$N_x = 1024$ ($\Delta x = 976.6m$)

$\beta_{CFL}^{\max} = 1$ ($\Delta t = 3.7266s$)

Comparaison WKB - numérique



Conclusion: la méthode WKB donne des résultats en excellent accord avec les simulations numériques

Wilayah Kalimantan Barat (W.K.B.)
= West Kalimantan Region



- Cette usine électrique flottante (3000 tonnes) s'est retrouvée à 6 km à l'intérieur des terres – Banda Aceh, Indonésie

Conclusions

- La simulation numérique et la méthode WKB permettent de mettre en évidence que:
 - la vitesse de propagation et la longueur d'onde diminuent quand la vague se rapproche des côtes

$$u(x) = \sqrt{gh(x)}$$

$$\lambda(x) = 2\pi / k(x) = 2\pi u(x) / \omega = 2\pi \sqrt{gh(x)} / \omega$$

- l'amplitude de la vague augmente quand la vague se rapproche des côtes

$$A(x) = \frac{A_0}{(h(x))^{1/4}}$$

Remarques

- Les équations ont été dérivées sous trois approximations:
 - Longueur d'onde $\lambda \gg$ profondeur h_0
 - Petites perturbations $\delta h \ll h_0 \rightarrow$ linéarisation
 - Cas unidimensionnel
- Lorsque la vague se rapproche des côtes, la 2e hypothèse n'est plus vérifiée. Des phénomènes non linéaires apparaissent, tels le « wave breaking » et les solitons. Voir les équations de Burger et de Korteweg – de Vries.
- D'autres phénomènes peuvent encore modifier (et malheureusement augmenter parfois) l'amplitude de la vague, notamment la focalisation lorsque la profondeur n'est pas 1D.
- $h_0(x,y) \rightarrow$ focalisation; démonstration (Ex.7 facultatif)