

Physique Numérique – Semaine 9

Rappel de la semaine 8

- Chapitre 4 Intégration spatio-temporelle**
- Section 4.1 Advection-Diffusion**
- Différences finies explicite à 2 niveaux
- Limite de stabilité: critère CFL . Advection.

Plan de la semaine 9

- 4.1 Advection-Diffusion**
- Diffusion. Critère de stabilité.
- Analyse de stabilité de Von Neuman

- 4.1 Ondes**
- Différences finies explicite à 3 niveaux
- Limite de stabilité: critère CFL
- Analyse de stabilité de Von Neuman
- Ex.5 - Vague dans un océan de profondeur variable**

Documentation

- Lecture pour la Semaine #8: Notes de cours
 - **Section 4.1 Advection-Diffusion**
 - **Sectino 4.2 Ondes**

<http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220>

Advection - Schéma explicite à 2 niveaux

- Discrétisation $\{x_j, t_j\}$
- Différences finies

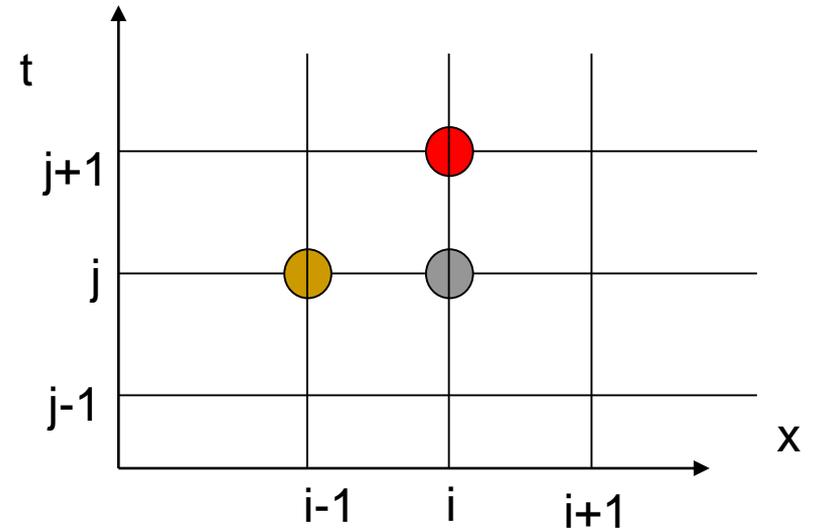
$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad \text{“forward”}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{“backward”}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \frac{v\Delta t}{\Delta x} (f_{i,j} - f_{i-1,j})$$

$$\beta = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$$



- Paramètre CFL (Courant, Friedrichs, Lewy)

Advection – Schéma explicite 2 niveaux

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \beta (f_{i,j} - f_{i-1,j})$$

- Paramètre CFL [*]

$$\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

- Ce schéma est instable si $\beta > 1$ ou si $\beta < 0$
- Ce schéma, lorsqu'il est stable, introduit de la diffusion non-physique («diffusion numérique»)

[*] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, Math. Ann. 100, 32 (1928)

Advection et Diffusion

4.1.1- 4.1.2

Flux de matière: $\vec{j} = f \vec{v} - D \vec{\nabla} f$

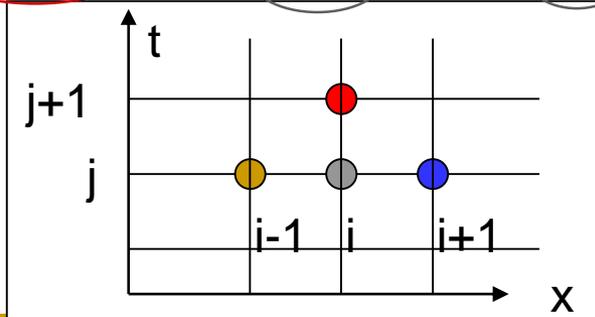
Conservation de la masse (Eq. Continuité): $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Cas 1D, incompressible, $D=\text{const}$, $v=\text{const}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (4.19)$$

Différences finies Schéma explicite 2 niveaux

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \beta (f_{i,j} - f_{i-1,j}) + \alpha (f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j})$$



$$\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (\text{CFL})$$

$$\alpha = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$$

Solution analytique - propriétés

- La dérivation est faite en Annexe C des Notes de Cours
- Pour une condition initiale où toutes les particules sont en $x=x_0$ en $t=0$, $f(x, 0) = N\delta(x - x_0)$

la solution est:
$$f(x, t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - vt)^2}{4Dt}\right)$$

Définitions:
$$N(t) = \int f(x, t) dx$$

$$\langle x \rangle (t) = \frac{1}{N(t)} \int x f(x, t) dx$$

$$\langle x^2 \rangle (t) = \frac{1}{N(t)} \int x^2 f(x, t) dx$$

$$\sigma^2(t) = \langle x^2 \rangle (t) - (\langle x \rangle (t))^2$$

Solution analytique – propriétés (2)

- Pour toute condition initiale, la solution de l'équation d'advection-diffusion, Eq.(4.19), satisfait les propriétés:

$$(1) N(t) = N(0), \forall t$$

$$(2) \langle x \rangle (t) = \langle x \rangle (0) + vt, \forall t$$

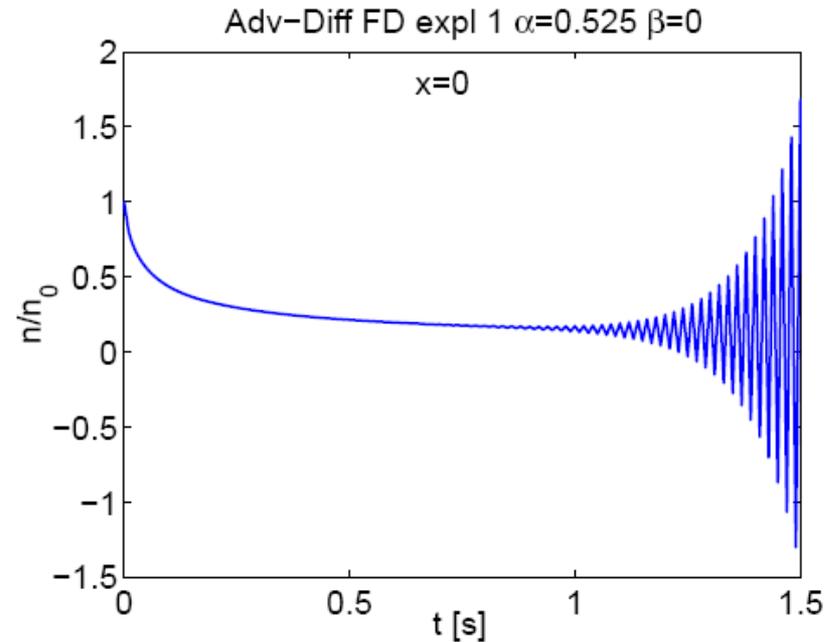
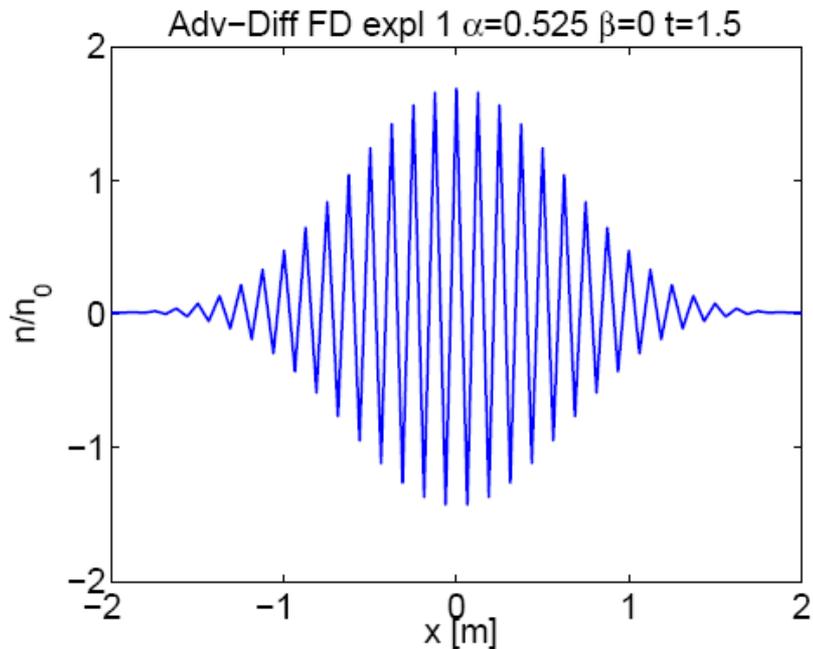
$$(3) \sigma^2(t) = \sigma^2(0) + 2Dt, \forall t$$

$$(4) f(x, t) \geq 0, \forall x, \forall t \text{ si } f(x, 0) \geq 0, \forall x$$

- 1) Conservation globale
- 2) Mouvement uniforme de la position moyenne, à la vitesse v (**advection**)
- 3) La variance augmente linéairement avec le temps, proportionnellement au coefficient de **diffusion** D
- 4) La quantité reste positive partout et en tous temps

Diffusion. Instabilité

- Différences finies, explicite 2 niveaux. Diffusion seule



Croissance exponentielle dans le temps d'une perturbation de courte longueur d'onde (2 points de maillage par longueur d'onde)

Advection et diffusion. Différences finies. Schéma explicite 2 niveaux. Critères de stabilité numérique.

$$\boxed{0 \leq \beta \leq 1} \quad \beta = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{CFL}$$

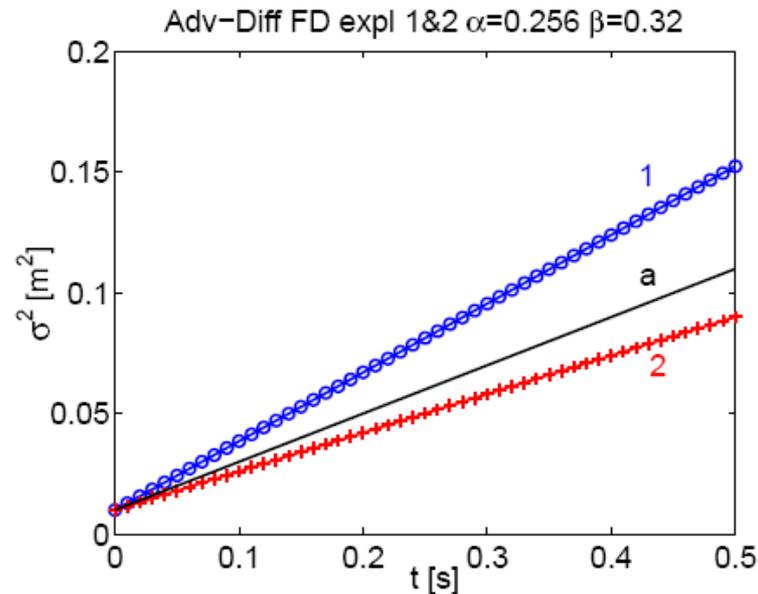
Courant-Friedrichs-Lewy

$$\boxed{0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$$

La démonstration sera présentée ultérieurement. Voir Notes de Cours 4.1.3

Advection-Diffusion. Diffusion

numérique



- Evolution de la variance: (a) solution analytique, (1) solution numérique avec schéma explicite à 2 niveaux et advection upwind, (2) advection centrée
- Le surcroît de diffusion est un artefact dû à la diffusion numérique créée par le schéma de l'advection upwind

Schéma différences finies explicite 2 niveaux

4.1.2 Advection et Diffusion - résumé

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0} \quad (4.19)$$

Paramètre CFL : $\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$ $\alpha = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}$
 Courant-Friedrichs-Lewy

$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \beta (n_{i,j} - n_{i-1,j}) + \alpha (n_{i-1,j} - 2n_{i,j} + n_{i+1,j})$$

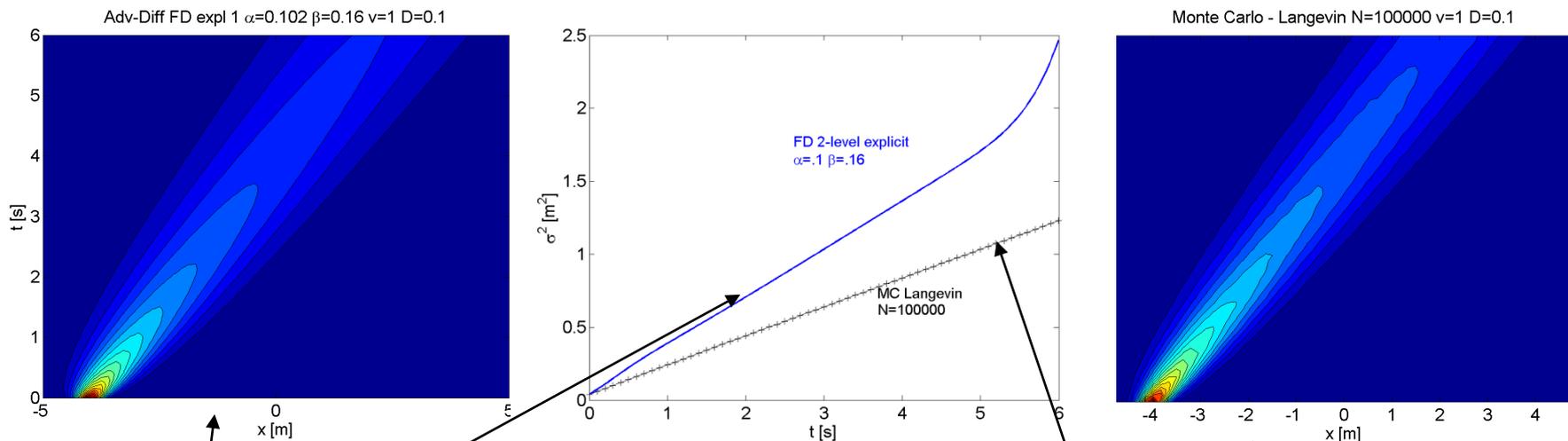
- **Il peut y avoir instabilité numérique!**
- **Le schéma explicite upwind pour l'advection stabilise, mais introduit de la diffusion numérique**
- **Conditions de stabilité**

$$\boxed{0 \leq \beta \leq 1}$$

$$\boxed{0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}}$$

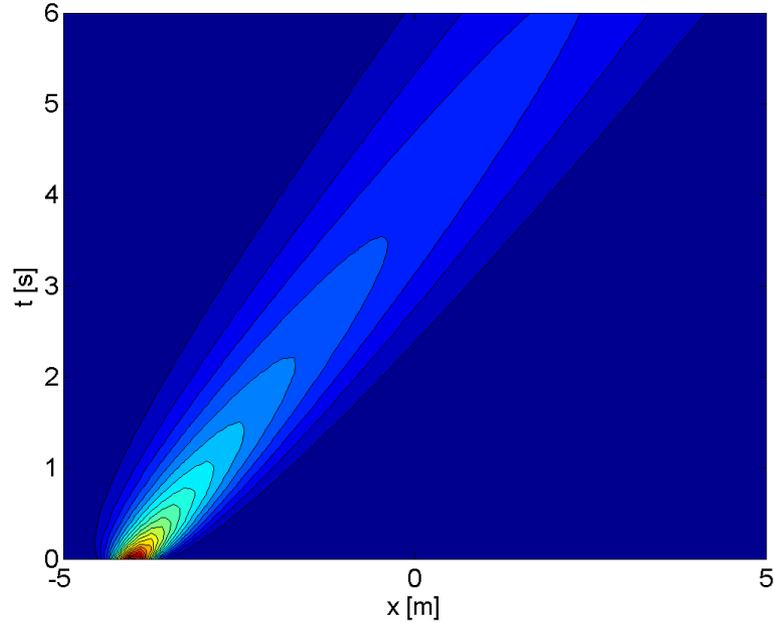
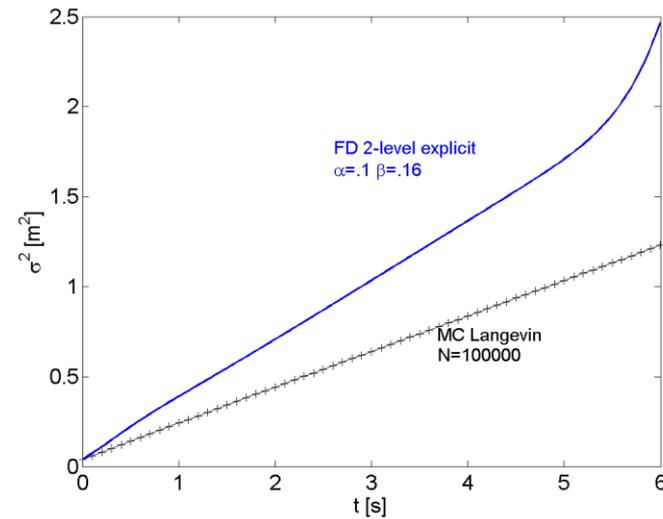
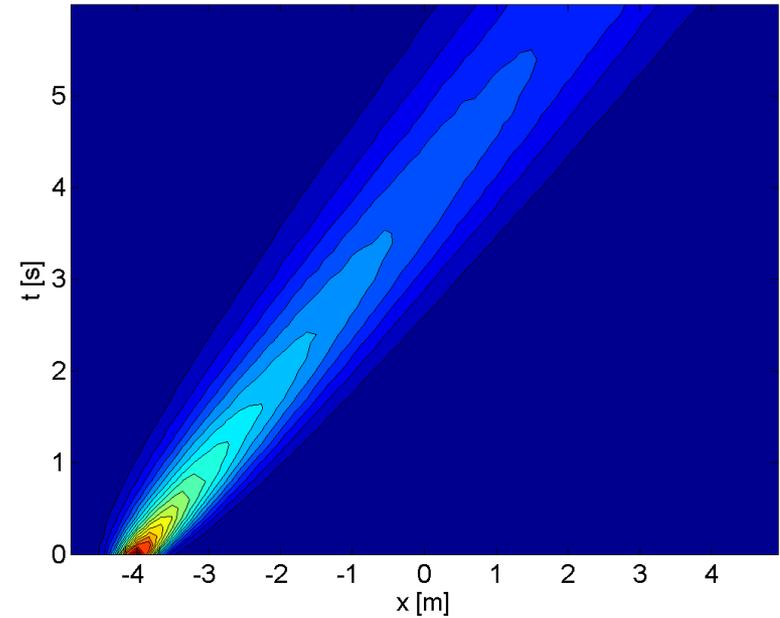
Euler ou Lagrange? Radar ou mouchard?

Comparaison entre schéma numérique «Eulérien»
et schéma numérique «Lagrangien» ou «particle»



Eulerien, différences finies
explicite 2 niveaux
Limite de stabilité
Diffusion numérique

Lagrangien, Langevin: Pas
de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité
CFL! (Δt arbitraire)

Adv-Diff FD expl 1 $\alpha=0.102$ $\beta=0.16$ $v=1$ $D=0.1$ Monte Carlo - Langevin $N=100000$ $v=1$ $D=0.1$ 

Langevin: pas de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité CFL! (Δt arbitraire)

4.2 Ondes

□ 4.2.1 Milieu homogène 1D perturbation $f(x, t)$

- EDP d'Alembert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- Solution générale

$$f(x, t) = \underbrace{F(x - |u|t)}_{\text{progressive}} + \underbrace{G(x + |u|t)}_{\text{rétrograde}}$$

- Obtenir une solution unique dans le domaine $[x_l, x_r]$ requiert 2 conditions initiales et 2 conditions aux bords

Ondes – schéma numérique

■ Schéma différences finies explicite 3 niveaux

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

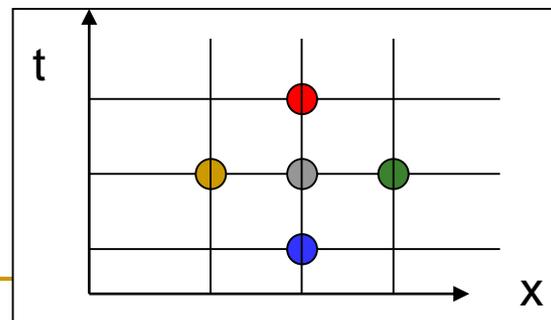
Discrétisation $\{(x_i, t_j)\}$

$$f_j'' = \frac{1}{h^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{f(x_i, t_{n+1}) - 2f(x_i, t_n) + f(x_i, t_{n-1}))}{(\Delta t)^2} \approx u^2 \left(\frac{f(x_{i+1}, t_n) - 2f(x_i, t_n) + f(x_{i-1}, t_n))}{(\Delta x)^2} \right) \quad (4.40)$$

$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f(x_i, t_{n+1}) \approx 2(1 - \beta^2)f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta^2 [f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)] \quad (4.42)$$



Ondes - Conditions initiales

- Eq. du 2e ordre en temps \rightarrow 2 conditions initiales requises
 - (1) $f(x,0) = f_{init}(x)$ donné
 - (2) $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x)$ donné
- Dans le schéma différences finies: on a besoin de connaître f au temps $t=0$ et au temps $t=-\Delta t$ pour initialiser l'algorithme
 - (1) $f_{i,0} = f_{init}(x_i)$
 - (2) $\frac{f_{i,0} - f_{i,-1}}{\Delta t} = g_{init}(x_i) \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) - g_{init}(x_i)\Delta t$

Ondes – conditions initiales (suite)

- Cas (a): système au repos pour $t \leq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = g_{init}(x) = 0 \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i)$$

- Cas (b): onde progressive $f(x, t) = F(\xi) = F(x - |u|t)$

$$f(x, -\Delta t) = F(x + |u|\Delta t) = f_{init}(x + |u|\Delta t)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i + |u|\Delta t)$$

- *Autre méthode:*

$$f(x, t) = F(\xi) = F(x - |u|t) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = g_{init}(x) = -|u| F'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = F' \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = -|u| \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) + |u| \Delta t \frac{df_{init}}{dx}(x_i) \approx f_{init}(x_i + |u| \Delta t)$$

- Cas (c): onde rétrograde: similaire, mais $G(x + |u|t)$...

Ondes – conditions aux limites

- Eq. Diff. 2^e ordre en $x \rightarrow 2$ conditions aux limites: bord gauche et bord droite

- Cas 1. Bord g. fixe $f(x_L, t) = C, \forall t \Rightarrow f_{0,j} = C, \forall j$

- Cas 2. Bord g. «libre»

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_L, t) = 0, \forall t \Rightarrow \frac{f_{1,j} - f_{0,j}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow f_{0,j} = f_{1,j}, \forall j$$

- Cas 3: périodique; $f_{N+1,j} = f_{0,j}, \forall j$

- Cas 4: excitation sinusoïdale : en exercice

- Cas 5. Sortie de l'onde

- au bord gauche \rightarrow onde rétrograde au bord gauche
- au bord droite \rightarrow onde progressive au bord droite

- NB: Les conditions aux limites doivent être appliquées à chaque pas de temps

Sortie au bord droite

- Sortie de l'onde au bord droite: on impose une onde purement progressive au voisinage de $x = x_r$.

$$f(x, t) = F(x - |u|t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_r, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(x_r - |u|t) = F'(x_r - |u|t)(-|u|) = -|u| \frac{\partial f}{\partial x}(x_r, t)$$

$$\frac{f_{N,j+1} - f_{N,j}}{\Delta t} = -|u| \frac{f_{N,j} - f_{N-1,j}}{\Delta x}$$

$$f_{N,j+1} = f_{N,j} - \beta(f_{N,j} - f_{N-1,j}) \quad \forall j$$

Ondes en milieu homogène, 1D

- Quelques démonstrations en «live»
 - Initialisation: immobile, progressive, rétrograde
 - Conditions aux limites: fixes, «libres», sortie
 - Réflexions
 - Superpositions
 - Ondes stationnaires, modes propres, fréquences propres
 - Excitation résonante
 - ...

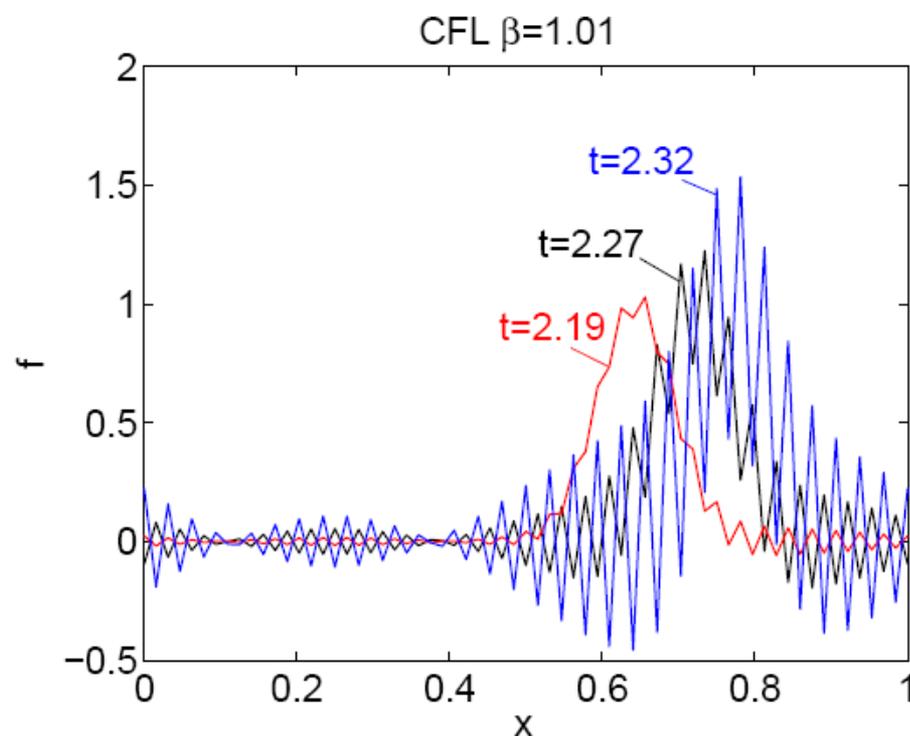
Ondes – instabilité numérique

■ 4.2.2 Stabilité du schéma différences finies explicite 3 niveaux pour l'équation d'ondes

Condition de stabilité CFL

$$0 \leq \beta^2 \leq 1$$

$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

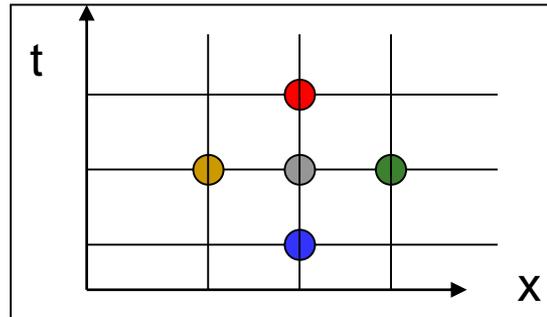


$$\beta = 1.01$$

Ondes – instabilité numérique

- Le mode instable est une ***oscillation*** dans l'espace (avec 2 pts de maillage x_j par longueur d'onde) et le temps (2 pts de maillage t_j par période) dont ***l'amplitude croît exponentiellement***
- On fera la démonstration au tableau du critère de stabilité CFL: analyse de ***Von Neumann – voir aussi section 4.2.2***

Ondes – Analyse de stabilité Von Neumann



$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f(x_i, t_{n+1}) \approx 2(1 - \beta^2)f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta^2(f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)) \quad (4.43)$$

Ansatz: on cherche une solution de (4.43) de type ondulatoire, avec la possibilité d'avoir une amplitude exponentielle dans le temps

$$f(x_i, t_n) = \hat{f} \exp\{i(kx_i - \omega t_n)\}, \quad \hat{f} \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (4.26)$$

On définit le «gain» G : $f(x_i, t_{n+1}) = G f(x_i, t_n), \quad G = e^{-i\omega\Delta t}$

Condition de stabilité: $|G| \leq 1, \forall k, \forall \omega$

Analyse de stabilité de Von Neumann

Ondes. Explicite 3 niveaux. Stabilité

Introduisant (4.26) dans (4.43) :

$$\hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n + \Delta t))} = 2(1 - \beta^2) \hat{f} e^{i(kx_i - \omega t_n)} - \hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n - \Delta t))}$$

$$+ \beta^2 \left[\hat{f} e^{i(k(x_i + \Delta x) - \omega t_n)} + \hat{f} e^{i(k(x_i - \Delta x) - \omega t_n)} \right]$$

En posant $G = e^{-i\omega \Delta t}$ (on note que $e^{+i\omega \Delta t} = \frac{1}{G}$),
factorisant $\hat{f} e^{i(kx_i - \omega t_n)}$ et

utilisant $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2 \cos(k\Delta x) = 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)$

posant $\theta = \frac{k\Delta x}{2}$, on obtient :

$$G = 2 - 2\beta^2 - \frac{1}{G} + \beta^2(2 + 4\sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$G^2 - 2(1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)G + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$G = 1 - 2\beta^2 \sin^2\theta \pm \sqrt{\Delta}, \text{ avec}$$

$$\Delta = (1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)^2 - 1.$$

On rappelle que le critère de stabilité est $|G| \leq 1$.

• Si $\beta^2 \leq 1$, alors $\sin^2\theta \leq 1 \Rightarrow 2\beta^2 \sin^2\theta \leq 2$

$$\Rightarrow (1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)^2 \leq 1 \Rightarrow \Delta \leq 0$$

et donc

$$G = 1 - 2\beta^2 \sin^2\theta \pm i \sqrt{1 - (1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)^2}$$

$$\Rightarrow |G|^2 = (1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)^2 + 1 - (1 - 2\beta^2 \sin^2\theta)^2$$

$$\Rightarrow |G|^2 = 1, \forall \theta \Rightarrow \text{STABLE}$$

• Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin\theta = 1$,

$$\Delta = (1 - 2\beta^2)^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow G = 1 - 2\beta^2 \pm \sqrt{\Delta}$$

On a $1 - 2\beta^2 < -1$, et en prenant la solution $-\sqrt{\Delta}$,
on a $G < -1$, et donc $|G| > 1 \Rightarrow \text{INSTABLE}$

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité

$$\beta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Si $\beta^2 \leq 1$, $|G|^2 = 1 \Rightarrow$ stable

Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin^2 \theta = 1$, $G < -1 \Rightarrow$ instable

$$\theta = k \Delta x / 2 \quad \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{k \Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2\pi / \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\Delta x$$

- 2 points de maillage par longueur d'onde, c'est bien ce que l'on a observé sur les simulations instables!



Exercice 5: ondes milieu inhomogène

- Equations
- **Solution analytique approximative: méthode WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)**
- Simulations numériques et comparaison

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(x)$

Vagues en eaux «peu profondes» – Annexe E

$$u^2(x) = g h_0(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} f \right) = 0 \quad (B)$$

Laquelle de ces équations est-elle correcte?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2(x) f) = 0 \quad (C)$$

Cela fait-il une différence sur la propagation de la vague?

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(\mathbf{x})$

- Les Eqs. (B) et (C) comportent des termes additionnels de 1^e, respectivement 2^e dérivée de $u^2(\mathbf{x})$. On utilisera les différences finies centrées pour ces termes:

$$\frac{du^2}{dx} \approx \frac{(u^2_{i+1} - u^2_{i-1}))}{2\Delta x}$$

$$\frac{d^2u^2}{dx^2} \approx \frac{(u^2_{i+1} - 2u^2_i + u^2_{i-1}))}{(\Delta x)^2}$$

Ondes en milieu inhomogène 2D: $u^2(\mathbf{x}, y)$

(Ex.5, facultatif)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla \cdot (u^2 \nabla f)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - g(x_{i-1}, y_j)}{2h_x}, \quad \text{Pour } g=u^2 \text{ ou } g=f$$

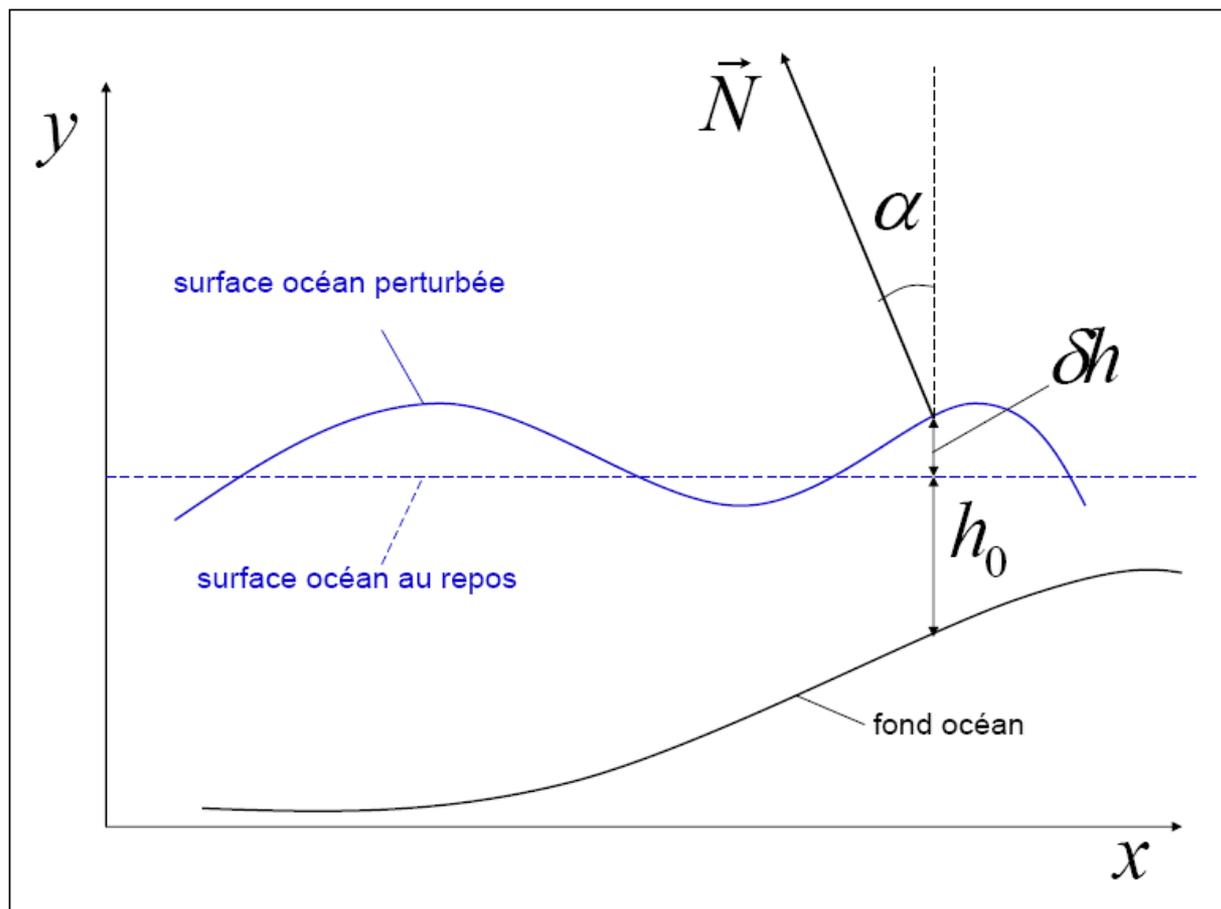
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_{j-1})}{2h_y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - 2g(x_i, y_j) + g(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - 2g(x_i, y_j) + g(x_i, y_{j-1})}{h_y^2}, \quad (3)$$

Equations en eaux peu profondes

- Voir Annexe E des Notes de Cours + au tableau



Profondeur variable $h_0(\mathbf{x})$ $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$

Vitesse de propagation variable $u(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta h) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta h \right) = 0 \quad (\text{B})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2(x) \delta h) = 0 \quad (\text{C})$$

Laquelle de ces équations est correcte?

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

Méthode WKB

- Wentzel, Kramers, Brillouin
- Solution analytique avec des approximations basées sur des hypothèses
- Au cœur de la méthode: séparation des échelles de variation
- Dépendance temporelle sinusoidale $\delta h(x, t) = e^{-i\omega t} \delta \hat{h}(x)$
- Substituant dans l'Eq.(B):

$$-\omega^2 \delta \hat{h}(x) = \frac{d}{dx} \left(u^2(x) \frac{d}{dx} \delta \hat{h}(x) \right) \quad (*)$$

- Dépendance spatiale ~sinusoidale, phase $S(x)$
rapidement variable, amplitude $A(x)$ **lentement** variable

$$\delta \hat{h}(x) = A(x) \exp(iS(x)) \quad (**)$$

WKB (2) – “ordering”

- On fait l’hypothèse que la variation de $A(x)$ est liée à la variation de $u^2(x)$, i.e. ce sont des variations lentes du même ordre
- On va «tagger» les termes variant lentement avec ε , qui symbolise la «petitesse» du terme
- Chaque fois qu’on dérive un terme, il prend un ordre supérieur, symbolisé par une puissance de ε supérieure

$$\begin{array}{l}
 \frac{dS}{dx} \equiv k(x) \quad \text{rapide (grand): } \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{dk}{dx} \sim \frac{d^2 S}{dx^2} \sim \varepsilon^1 \\
 A \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{dA}{dx} \sim \varepsilon^1 \qquad \frac{d^2 A}{dx^2} \sim \varepsilon^2 \\
 u^2 \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{du^2}{dx} \sim \varepsilon^1 \qquad \frac{d^2 u^2}{dx^2} \sim \varepsilon^2 \qquad \text{(***)}
 \end{array}$$

WKB (3) – “ordering” (suite)

- On insère (**) dans (*), et on simplifie par e^{iS} .
- On inspecte chaque terme, en y ajoutant les «tags» (***)
- On regroupe les termes ordre par ordre, i.e. par puissance de ε .
- On résout ordre par ordre, en insérant la solution à l'ordre 0 dans l'équation d'ordre 1
- *La présentation sera faite au tableau*

- La solution à l'ordre 0 donne:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \equiv k^2(x) = \frac{\omega^2}{u^2(x)} = \frac{\omega^2}{gh_0(x)}$$

- La solution à l'ordre 1 donne:

$$A(x) = A_0 (u(x))^{-1/2} \sim (h_0(x))^{-1/4}$$