Physique Numérique – Semaine 2

Rappel des concepts introduits en semaine 1

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t),\ \text{avec condition initiale}\ \ y(0) = y_0$$

- ❑ Discrétisation: Eqs différentielles → Eqs algébriques → opérations arithmétiques
- ❑ Erreurs: troncature et arrondi
- ❑ Convergence: limite $\Delta t \to 0$ (erreur) = 0 (*)
  - ❑ Ordre de convergence: n tel que limite $\Delta t \to 0$ (erreur) ~ $O(\Delta t)^n$ (**)
- ❑ Stabilité
  - ❑ Comportement en fonction du temps: erreur ~ $e^{\gamma t}$
- ❑ Différences finies (**)
  - ❑ Pourquoi centrer les schémas?
- ❑ Explicite / Implicite / Semi-implicite

(*) Les erreurs d'arrondi de convergent PAS! On parle d'ordre de convergence uniquement pour les erreurs de troncature.

(**) suppose des fonctions f et y infiniment différentiables

Documentation

- Lecture pour la Semaine #2: Notes de cours
  - Chapitre 1 Section 1.5
  - Chapitre 2, Section 2.4, section 2.7.1

http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220

Plan Semaine 2

- Ordre de convergence: définition, exemples
- Analyse de stabilité de Von Neuman pour l'équation de la désintégration
- Oscillateur harmonique, schéma d'Euler explicite
  - Analyse de stabilité de Von Neuman
  - Solution analytique des équations discrétisées
  - Evolution temporelle de l'énergie mécanique
- Schéma Euler-Cromer (ou Euler symplectique): apprenons à marcher…

Ordre de convergence (1.5)

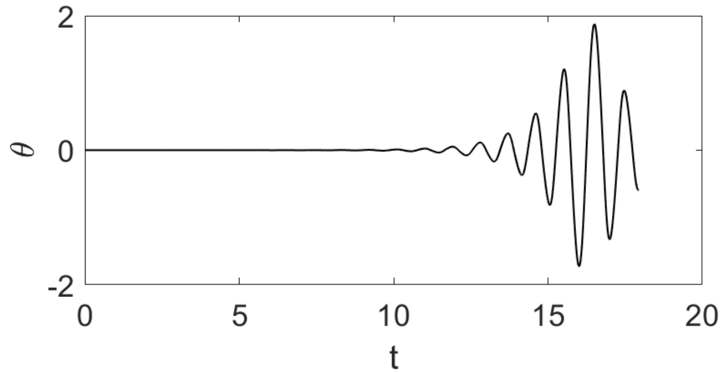
- On intègre numériquement de $t=t_0$ à $t=t_f$ en N_{steps} pas de temps équidistants Δt.
- On suppose que l'erreur $|y_{exact}(t_f)-y_{num}(t_f)|$ peut s'écrire comme un développement en puissances entières de Δt
- L'ordre de convergence est défini comme l'exposant du premier terme non-nul de ce développement (mis à part l'ordre 0)

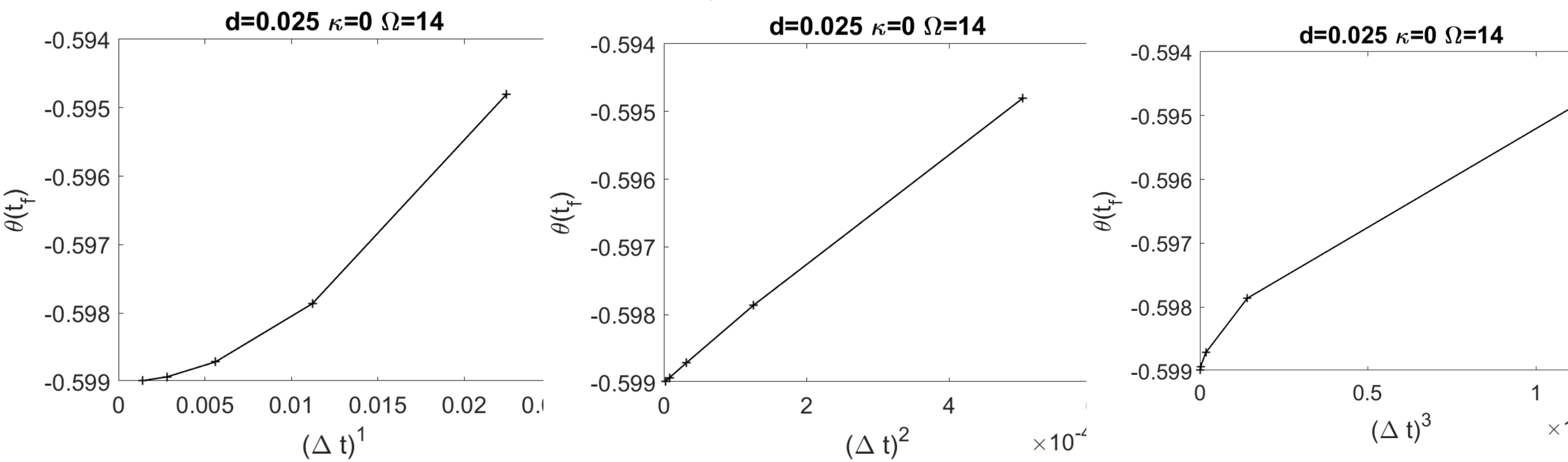
$$y_{\mathrm{num}}(t_f) = y_{\mathrm{exact}}(t_f) + c_n(\Delta t)^n + c_{n+1}(\Delta t)^{n+1} + \ldots$$

- Comment représenter graphiquement une étude de convergence? Comment, en pratique, déterminer l'ordre de convergence?

Cas 1: on ne connaît pas la solution exacte

- Exemple: pendule L=20cm, excitation verticale, $\Omega=2\omega_0$, d=2.5cm , t_f=20 périodes, schéma de Verlet (semaine prochaine)



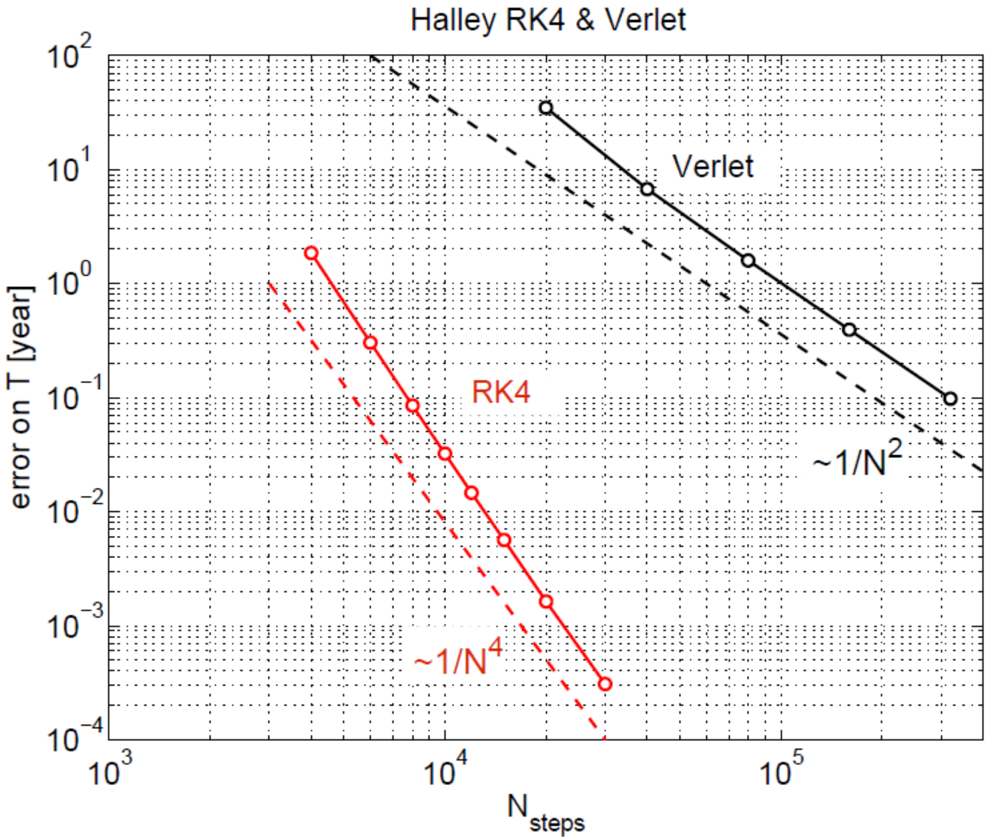


Cas 2: on connaît la solution exacte

- On peut alors calculer la 'vraie' erreur

$$Err = |y_{exact}(t_f)-y_{num}(t_f)|$$

- Exemple: période de révolution de la comète de Halley

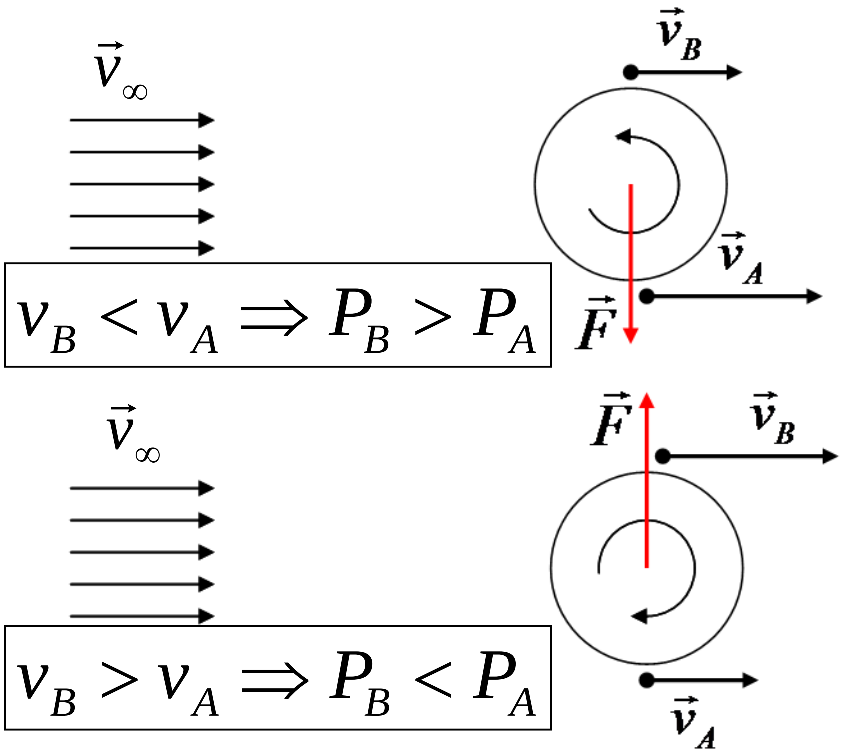


Analyse de stabilité Von Neumann

- Cas du schéma d'Euler explicite
  - Cas de la désintégration
- Sera présenté au tableau

Force de portance, effet Magnus

- Expériences



$$\boxed{v_B < v_A \Rightarrow P_B > P_A}$$

$$\boxed{v_B > v_A \Rightarrow P_B < P_A}$$

- Eq. Bernouilli

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + P = const}$$

(le long d'une ligne de courant)

- Formule semi-empirique

$$\boxed{\vec{F}_p = \rho \mu R^3 \vec{v}_\infty \times \vec{\omega}}$$

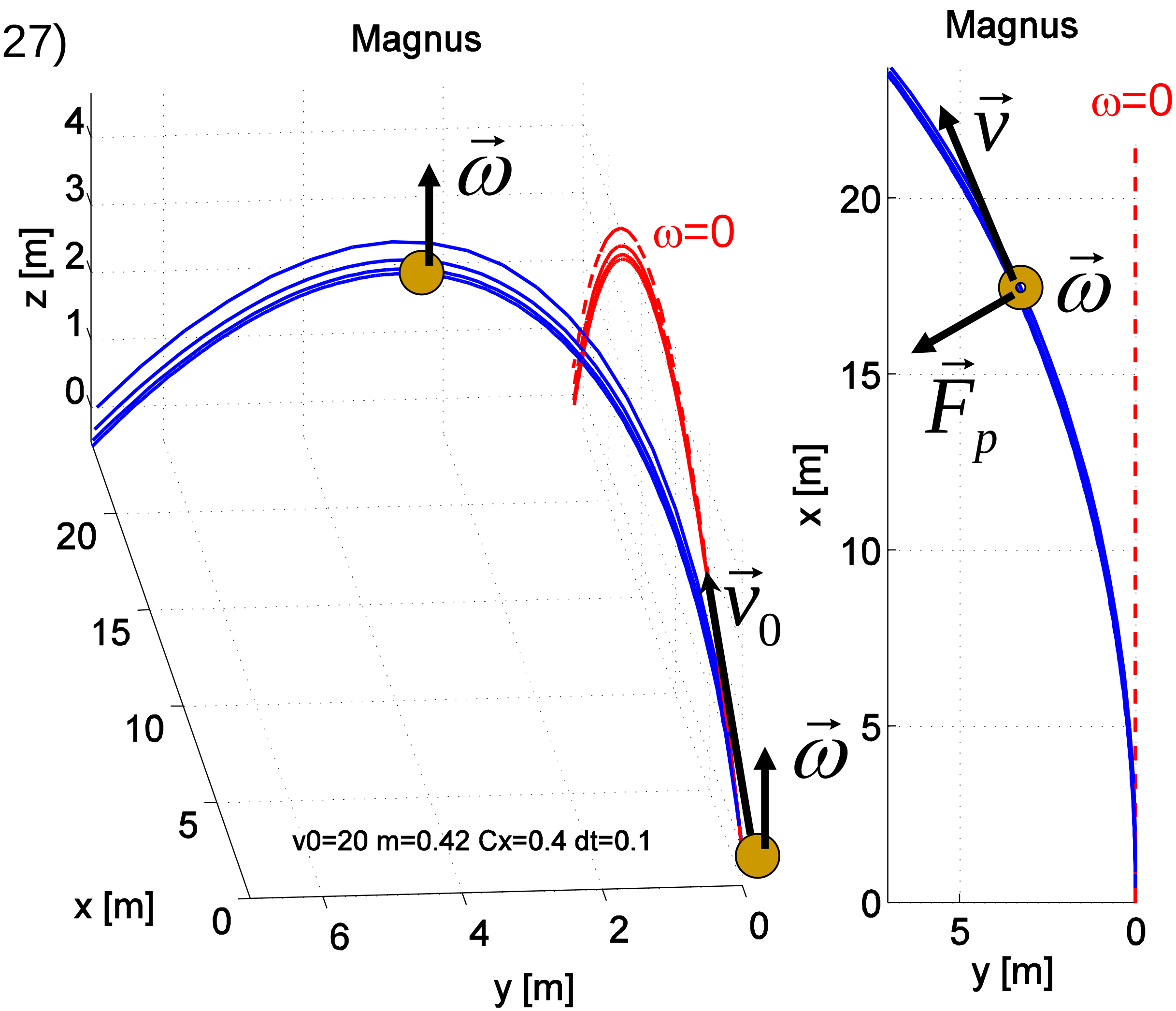
(dans le référentiel de l'obstacle)

$$\boxed{\vec{F}_p = \rho \mu R^3 \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

(dans le référentiel du sol)

Magnus tire un coup franc au football

Eq.(2.27)



R=0.11

m=0.42

C_x=0.4

v_0=20

α=30º

ρ=1.3

$\mu=2\pi$

$\omega=4\pi$

γ=0

Δt=0.1, 0.0125

Oscillateur harmonique, particule dans champ B, effet Magnus, force de Coriolis: même structure mathématique

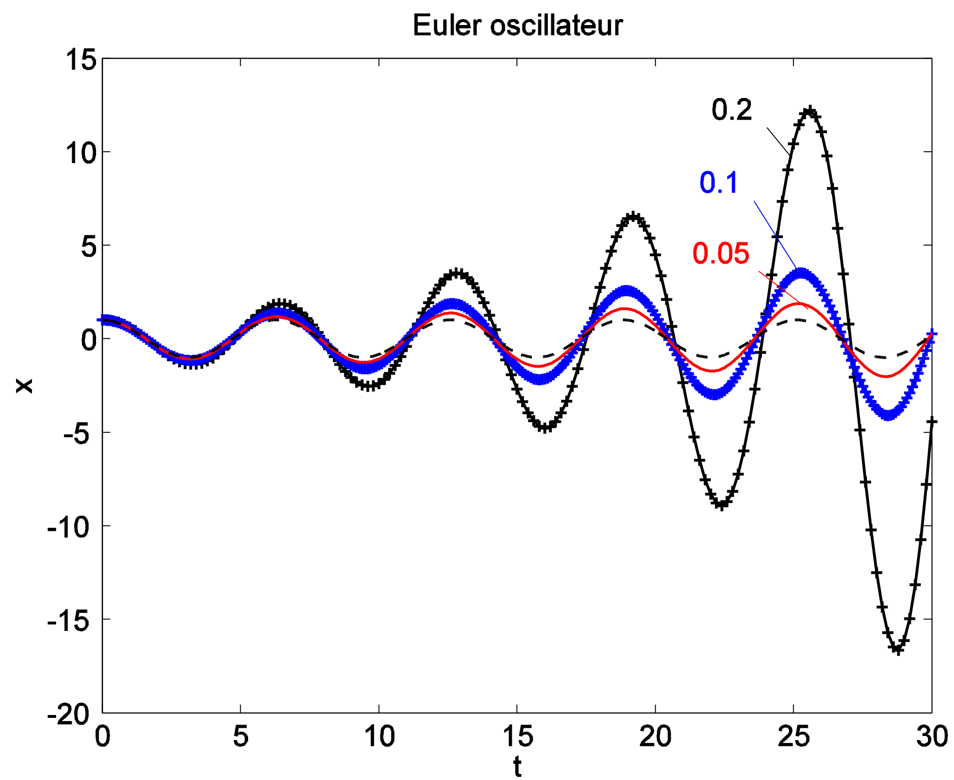
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0{}^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\qquad \Omega = \frac{qB}{m}$
- Effet Magnus: $\vec{F} = -\mu R^3 \rho \vec{v} \times \vec{\omega}$ $\qquad \Omega = -\frac{\mu R^3 \rho \omega}{m}$
- Coriolis: $\vec{F} = -2m\,\overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}'$ $\qquad \Omega = \Omega_{R')R}$

2.4 Euler explicite et oscillateur harmonique instabilité

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(k/m)x \end{pmatrix}$$



Solution analytique:

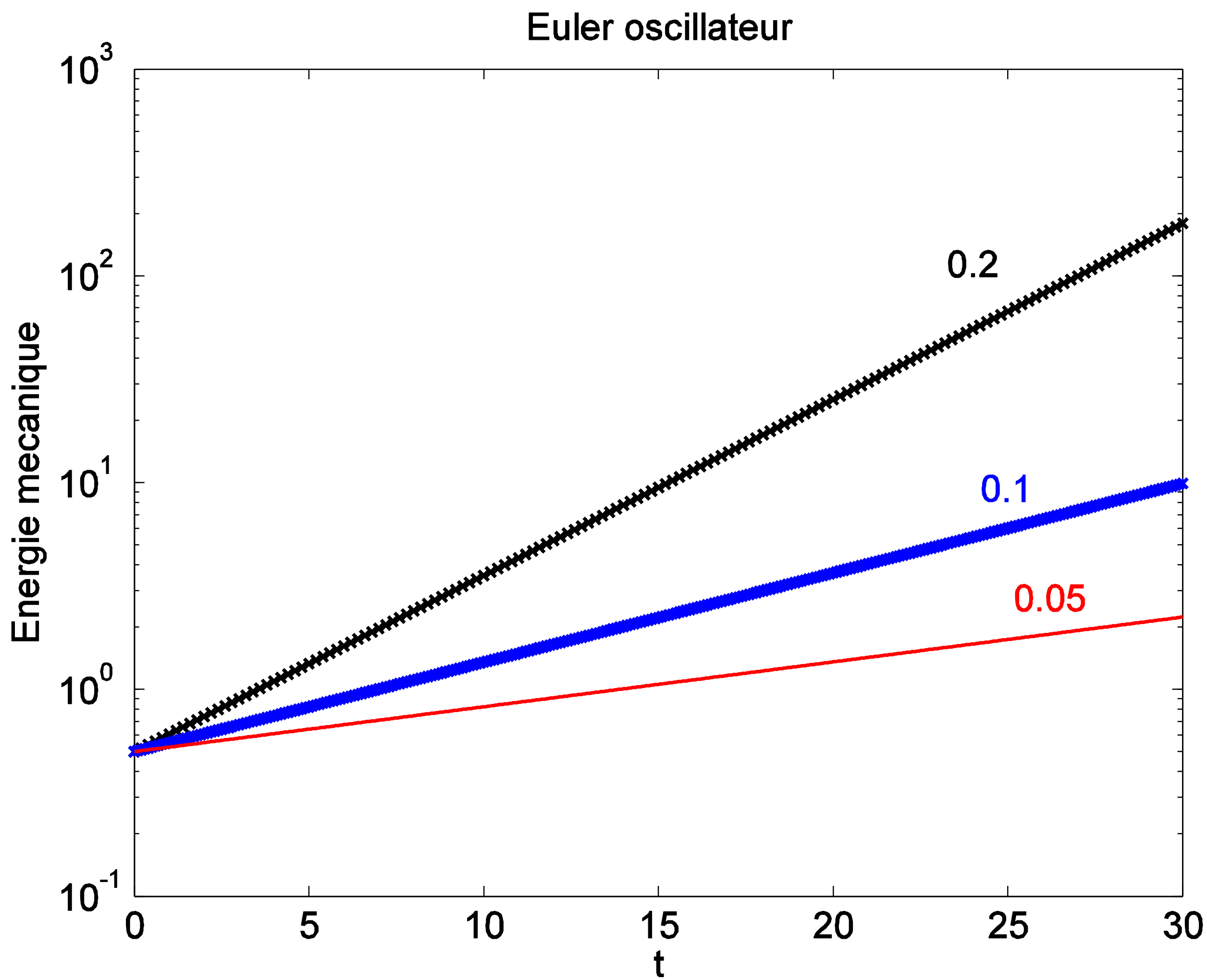
$$y(t) = |A|\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$

- Le schéma d'Euler explicite est ***toujours instable*** lorsqu'il est appliqué à l'oscillateur harmonique. La norme de l'erreur augmente à chaque pas de temps
- L'amplitude des oscillations croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à Δt

Oscillateur harmo. Euler explicite. Conservation E_{mec}?

L'énergie mécanique, au lieu d'être conservée, croît exponentiellement dans le temps.

Le taux de croissance de E_{mec} est proportionnel à Δt.



Simulation de Systèmes Oscillatoires

2.4 Oscillations

- 2.4.1 Oscillateur harmonique. Instabilité du schéma d'Euler
- 2.4.2-2.4.4 **Analyses de stabilité numérique**

Propagation de l'erreur e_n	Oscillation, (dé)croissance?	Propriétés de conservation
Matrice de gain G	$y_{num} = Ae^{i\omega t}$	$E_{mec} = const$
Valeurs propres λ_i	$\omega = \omega_r + i\gamma$ oscillant (ω_r), exponentiel (γ)	$E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + ??$
Stable si $\lvert \lambda_i \rvert \le 1$	$\gamma \ge 0$	$\dfrac{\Delta E_{mec}^{(num)}}{\Delta t} \le 0$
Section 2.3.2 – Von Neumann	Section 2.3.3	Section 2.3.4

2.4.2. Analyse de stabilité de Von Neumann

- Sera présentée au tableau
- Voir aussi les Notes de Cours

EPFL

2.4.3 Stabilité. Oscillations, (dé)croissance exponentielle. Sol. Analytique des Eqs. Discrètes.

$$\boxed{y_n = \Re e\{Ae^{i\omega t_n}\} = \Re e\{Ae^{i\sqrt{k/m}\,t_n} e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n}\}}$$

$$\boxed{y_n = \underbrace{e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n} \, |A|}_{} \underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t_n + \varphi\right)}_{}}$$

Amplitude augmentant exponentiellement dans le temps

Taux de croissance proportionnel à Δt

Oscillation sinusoidale

En accord avec nos résultats numériques

2.4.4 Euler expl. osc. harmo. Conservation E_{mec} 1

Analytiquement: $$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

Numériquement: $$E_{mec,n+1} = \frac{1}{2}m{v_{n+1}}^2 + \frac{1}{2}k{x_{n+1}}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_n - \frac{k}{m}x_n\Delta t\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_n + v_n\Delta t\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m{v_n}^2 + \frac{1}{2}k{x_n}^2 - v_n k x_n \Delta t + k x_n v_n \Delta t + \frac{1}{2}\frac{k^2}{m}{x_n}^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}k{v_n}^2\Delta t^2$$

$$\boxed{E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + \left(\frac{k}{m}E_{mec,n}\Delta t\right)\Delta t} \quad (*)$$

$$\boxed{E_{mec,n+1} > E_{mec,n} \quad \forall \Delta t}$$

L'énergie mécanique augmente à chaque pas de temps

2.4.4 Euler expl. osc. harmo. Conservation E_{mec} 2

$$\boxed{\frac{\Delta E_{mec,n}}{\Delta t} = \left(\frac{k}{m}\Delta t\right) E_{mec,n}}$$

$$\boxed{E_{mec,n} = E_{mec,0}\, e^{\left(\frac{k}{m}\Delta t\right) t_n}}$$

$$\boxed{\gamma_{Emec} = \frac{k}{m}\Delta t}$$

L'énergie mécanique augmente exponentiellement au cours du temps

Le taux de croissance est proportionnel à Δt

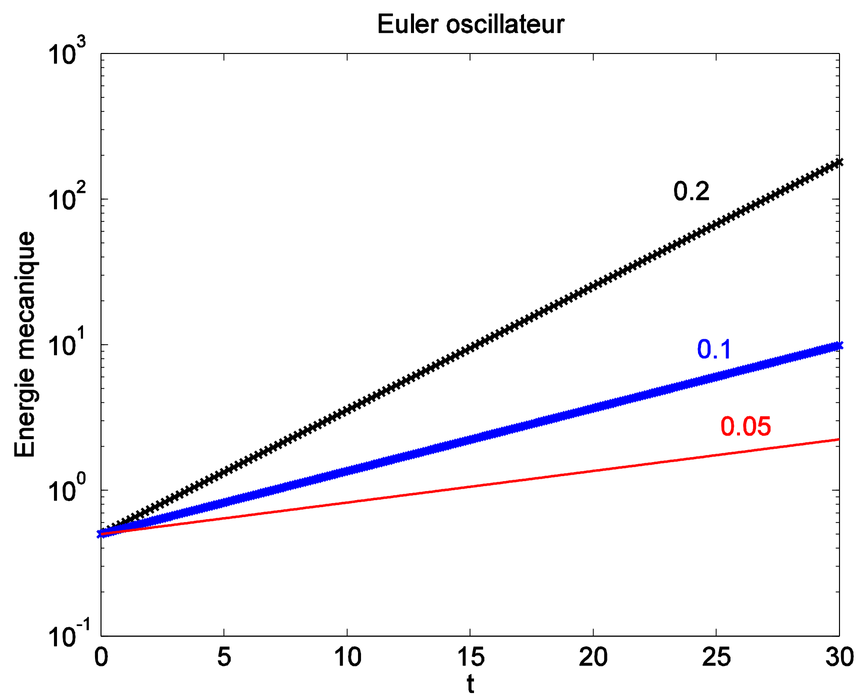


FIG. 2.8 (bas)

On trouvait un taux de croissance du mode propre

$$\boxed{\gamma = \mathrm{Im}(\omega) = -\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}}$$

$$\boxed{\gamma_{Emec} = -2\gamma}$$

???

2.4. Oscillateur harmonique. Conclusions

- Le schéma d'Euler explicite est toujours instable lorsqu'il est appliqué à l'oscillateur harmonique. La norme de l'erreur augmente à chaque pas de temps
- L'amplitude des oscillations croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à Δt
- L'énergie mécanique n'est pas conservée, mais croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à Δt
- Paramètre numérique crucial: $\boldsymbol{\omega\Delta t}$
  - $\omega\Delta t \ll 1$ veut dire plusieurs pas temporels par période
- Amélioration des schémas numériques nécessaire!
  - Euler – Cromer $\sim\Delta t$ (*)
  - Stormer-Verlet $\sim(\Delta t)^2$

    Symplectiques: Emec=const en moyenne
  - Runge-Kutta ordre 4 $\sim(\Delta t)^4$
  - Augmenter l'ordre du schéma augmente la précision
- (*) changement apparemment minime, mais… (demo)

2.7.1 Euler-Cromer: déjà un grand progrès!

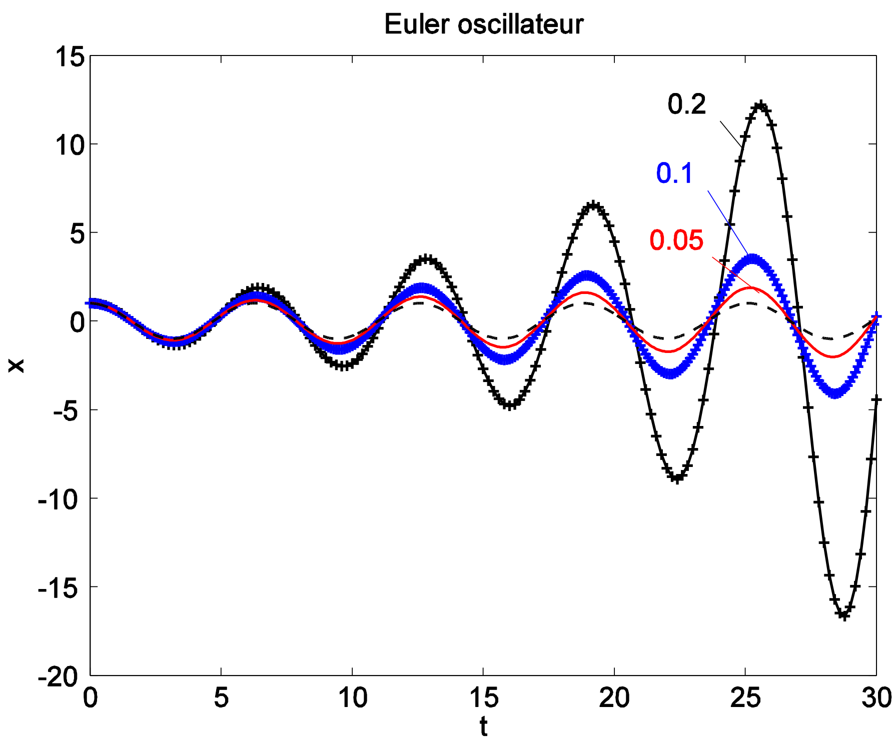


FIG. 2.8

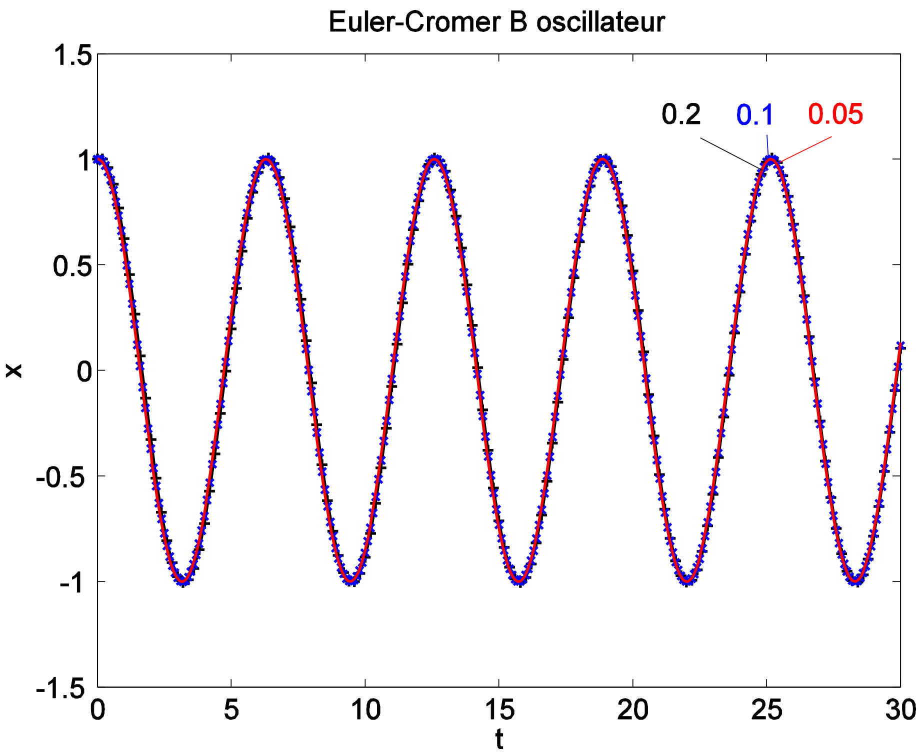


FIG. 2.9

- Les schémas d'Euler-Cromer et de Verlet seront présentés au tableau et seront illustrés par des simulations numériques.

2.7.1 Euler-Cromer («symplectique»)

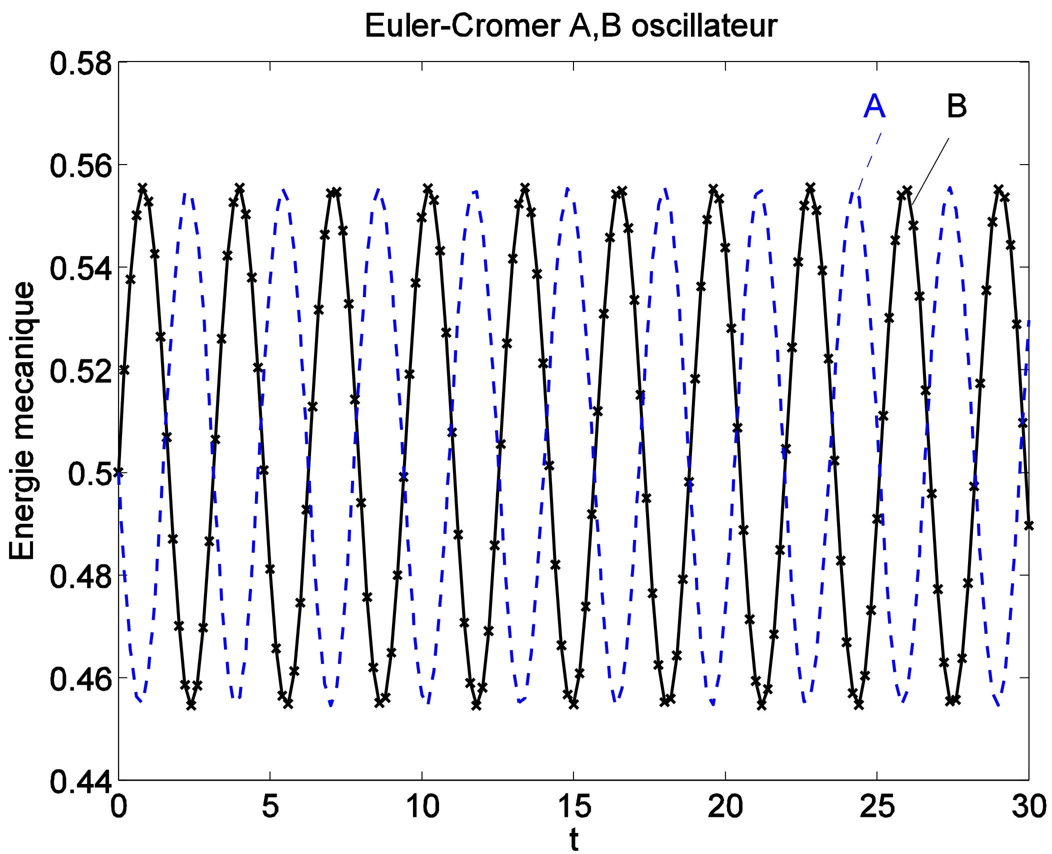
- Pour la force de portance de Magnus, comme pour la force de Lorentz due au champ magnétique, l'accélération en x dépend de vz, et l'accélération en z dépend de vx.
- Le schéma d'Euler-Cromer, s'écrit, pour la particule dans un champ magnétique selon z:

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \Omega v_{y,n}$$

- $$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \Omega v_{x,n+1}$$ (Euler explicite: $v_{x,n}$)

- Vous pouvez essayer ce schéma pour le problème de Magnus (Ex.1)

2.7.1 Euler-Cromer: pied gauche ou pied droite d'abord?



- En combinant Euler-Cromer « A » et « B » pour deux demi-pas de temps, on aboutit au schéma de Verlet. La dérivation sera présentée au tableau.