Physique Numérique – Semaine 9

Rappel de la semaine 8

- ❑ **Chapitre 4 Intégration spatio-temporelle**
- ❑ **Section 4.1 Advection-Diffusion**
- ❑ Différences finies explicite à 2 niveaux
- ❑ Limite de stabilité: critère CFL . Advection.

Plan de la semaine 9

- ❑ **4.1 Advection-Diffusion**
- ❑ Diffusion. Critère de stabilité.
- ❑ Analyse de stabilité de Von Neuman

- ❑ **4.1 Ondes**
- ❑ Différences finies explicite à 3 niveaux
- ❑ Limite de stabilité: critère CFL
- ❑ Analyse de stabilité de Von Neuman
- ❑ **Ex.5 - Vague dans un océan de profondeur variable**

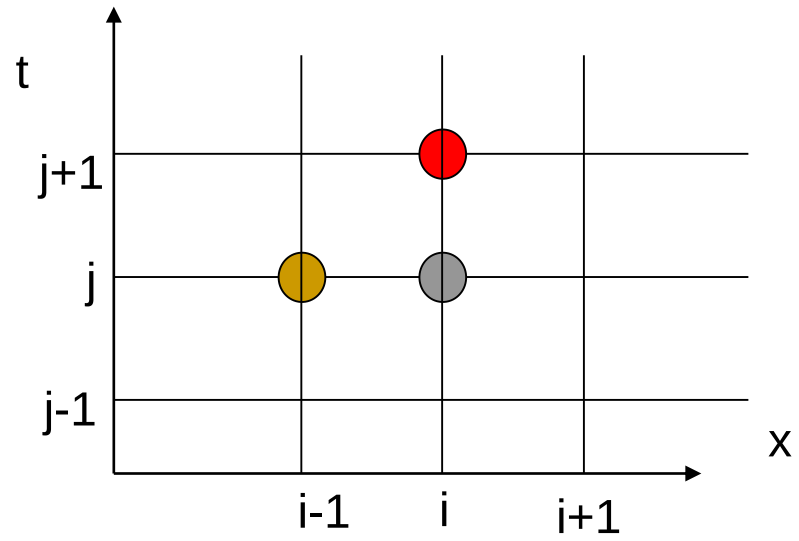
Documentation

- Lecture pour la Semaine #8: Notes de cours
  - **Section 4.1 Advection-Diffusion**
  - **Sectino 4.2 Ondes**

http://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=8220

Advection - Schéma explicite à 2 niveaux

- Discrétisation $\{x_i, t_j\}$
- Différences finies



$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t}$$ "forward"

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$$ "backward"

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{f_{i,j+1} = f_{i,j} - \frac{v\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i,j} - f_{i-1,j}\right)}$$

- Paramètre CFL (Courant, Friedricks, Lewy) $\boxed{\beta = \frac{v\Delta t}{\Delta x}}$

Advection – Schéma explicite 2 niveaux

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \beta \left(f_{i,j} - f_{i-1,j} \right)$$

- **Paramètre CFL (Courant, Friedrichs, Lewy)**

$$\boxed{\beta = v \frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

- **On verra que ce schéma est instable si β>1 ou si β<0**
- **On verra aussi que ce schéma, lorsqu'il est stable, introduit de la diffusion non-physique («diffusion numérique»)**

Advection et Diffusion

4.1.1- 4.1.2

Flux de matière: $\vec{j} = f\,\vec{v} - \mathrm{D}\,\vec{\nabla} f$

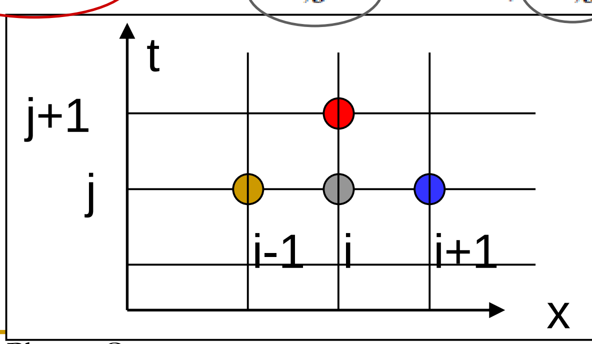
Conservation de la masse (Eq. Continuité): $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Cas 1D, incompressible, D=const, v=const :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0} \qquad (4.19)$$

Différences finies Schéma explicite 2 niveaux

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \beta\left(f_{i,j} - f_{i-1,j}\right) + \alpha\left(f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}\right)$$



$$\boxed{\beta = v\frac{\Delta t}{\Delta x}} \ \textbf{(CFL)} \qquad \boxed{\alpha = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}}$$

Solution analytique - propriétés

- La dérivation est faite en Annexe C des Notes de Cours
- Pour une condition initiale où toutes les particules sont en x=x0 en t=0, $f(x,0) = N\delta(x-x_0)$

  la solution est: $$f(x,t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-vt)^2}{4Dt}\right)$$

Définitions:

$$N(t) = \int f(x,t)dx$$

$$<x>(t) = \frac{1}{N(t)} \int x f(x,t)dx$$

$$<x^2>(t) = \frac{1}{N(t)} \int x^2 f(x,t)dx$$

$$\sigma^2(t) = <x^2>(t) - \left(<x>(t)\right)^2$$

Solution analytique – propriétés (2)

- Pour toute condition initiale, la solution de l'équation d'advection-diffusion, Eq.(4.19), satisfait les propriétés:

$$(1)\; N(t) = N(0), \forall t$$

$$(2) < x > (t) =< x > (0) + vt, \forall t$$

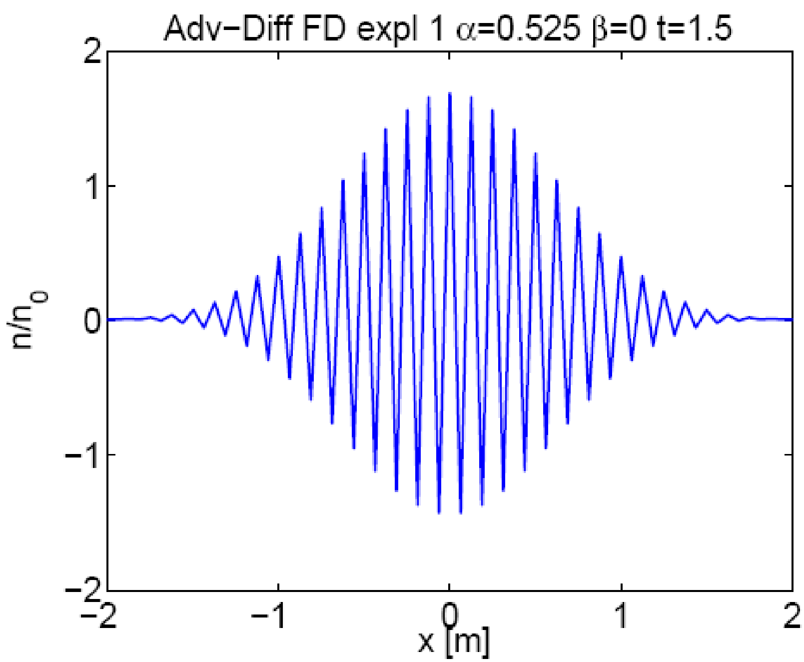
$$(3)\; \sigma^2(t) = \sigma^2(0) + 2Dt, \forall t$$

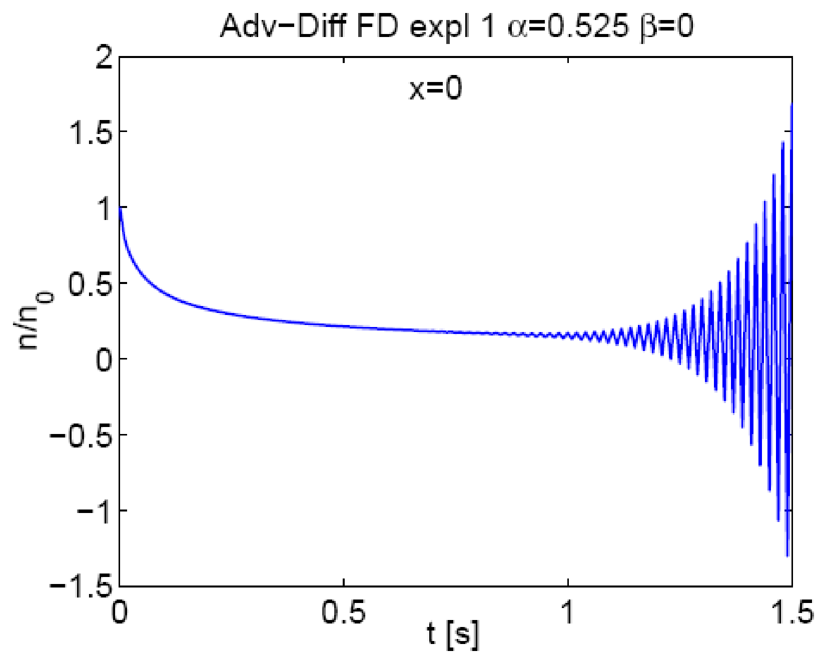
$$(4)\; f(x,t) \geq 0, \forall x, \forall t \text{ si } f(x,0) \geq 0, \forall x$$

1) Conservation globale
2) Mouvement uniforme de la position moyenne, à la vitesse v (***advection***)
3) La variance augmente linéairement avec le temps, proportionnellement au coefficient de ***diffusion*** D
4) La quantité reste positive partout et en tous temps

Diffusion. Instabilité

- **Différences finies, explicite 2 niveaux. Diffusion seule**





Croissance exponentielle dans le temps d'une perturbation de courte longueur d'onde (2 points de maillage par longueur d'onde)

Advection et diffusion. Différences finies. Schéma explicite 2 niveaux. Critères de stabilité numérique.

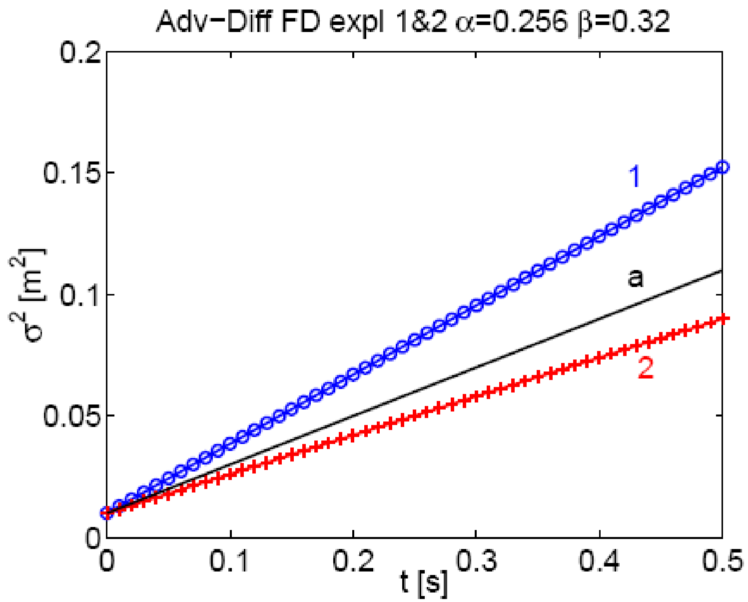
$$\boxed{0 \leq \beta \leq 1} \qquad \beta = v\frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad \textbf{CFL}$$

Courant-Friedrichs-Lewy

$$\boxed{0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}} \qquad \alpha = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

La démonstration sera présentée ultérieurement. Voir Notes de Cours 4.1.3

Advection-Diffusion. Diffusion numérique



- Evolution de la variance: (a) solution analytique, (1) solution numérique avec schéma explicite à 2 niveaux et advection upwind, (2) advection centrée
- Le surcroît de diffusion est un artefact dû à la diffusion numérique créée par le schéma de l'advection upwind

Schéma différences finies explicite 2 niveaux

4.1.2 Advection et Diffusion - résumé

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0} . \qquad (4.19)$$

Paramètre CFL : $\beta = v\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ $\qquad \alpha = \dfrac{D\Delta t}{\Delta x^2}$

Courant-Friedrichs-Lewy

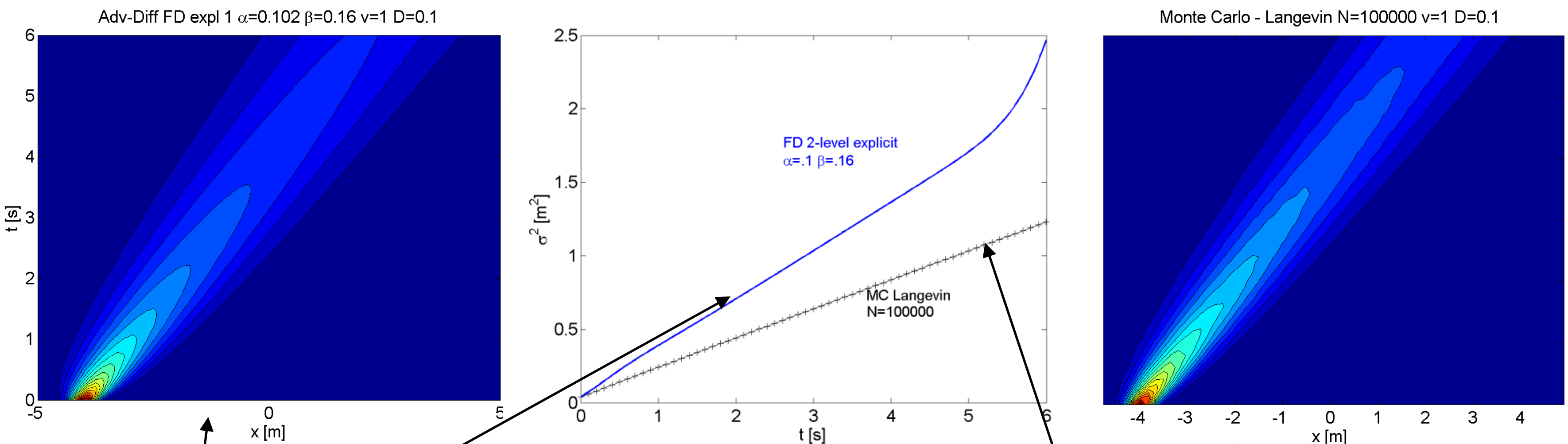
$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \beta\left(n_{i,j} - n_{i-1,j}\right) + \alpha\left(n_{i-1,j} - 2n_{i,j} + n_{i+1,j}\right)$$

- **Il peut y avoir instabilité numérique!**
- **Le schéma explicite upwind pour l'advection stabilise, mais introduit de la diffusion numérique**
- **Conditions de stabilité**

$$\boxed{0 \le \beta \le 1} \qquad \boxed{0 \le \alpha \le \frac{1}{2}}$$

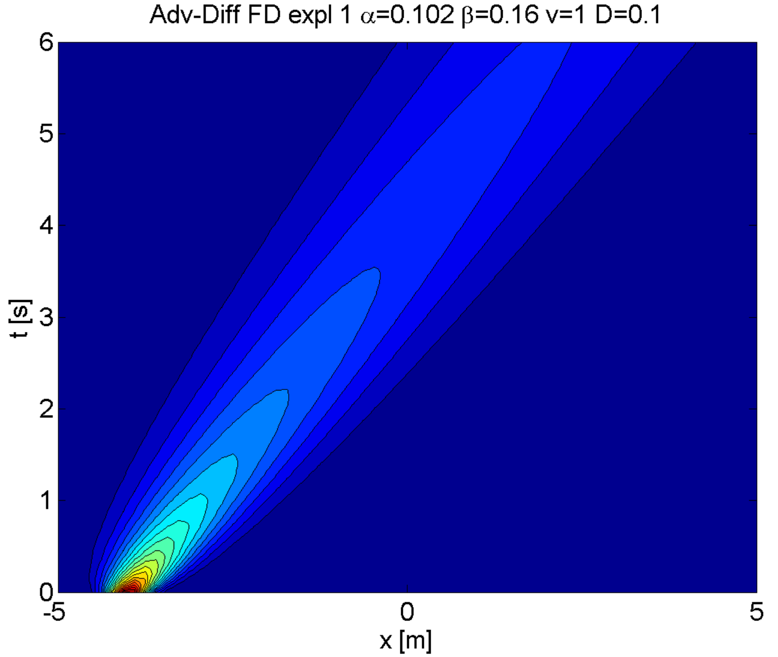
Euler ou Lagrange? Radar ou mouchard?

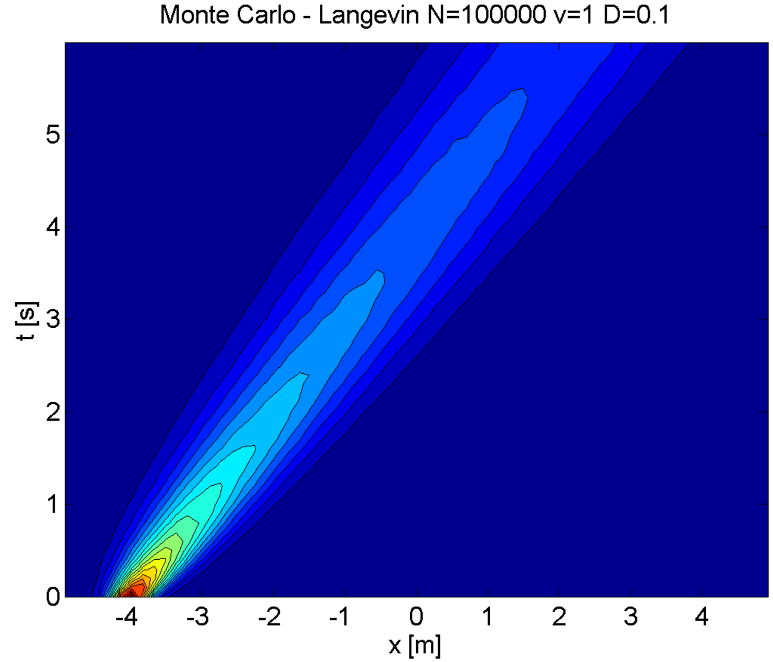
Comparaison entre schéma numérique «Eulérien» et schéma numérique «Lagrangien» ou «particle»

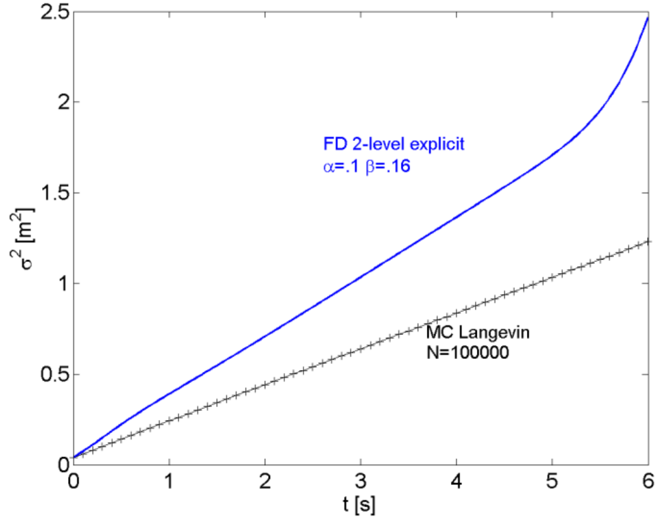


Eulerien, différences finies
explicite 2 niveaux
Limite de stabilité
Diffusion numérique

Lagrangien, Langevin: Pas de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité
CFL! (Δt arbitraire)







Langevin: pas de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité CFL! (Δt arbitraire)

4.2 Ondes

- **4.2.1 Milieu homogène 1D** perturbation $f(x,t)$
  - **EDP d'Alembert** $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$
  - **Solution générale**

$$f(x,t) = \underbrace{F(x-|u|t)}_{\textit{progressive}} + \underbrace{G(x+|u|t)}_{\textit{rétrograde}}$$

  - **Obtenir une solution unique dans le domaine [x_l, x_r] requiert 2 conditions initiales et 2 conditions aux bords**

Ondes – schéma numérique

- **Schéma différences finies explicite 3 niveaux**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

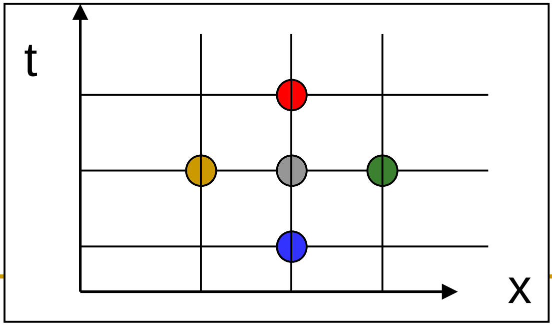
Discrétisation {(xi,tj)}

$$f_j'' = \frac{1}{h^2}\left(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}\right) + \mathcal{O}(h^2) \qquad \text{(A.21)}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1}) - 2f(x_i,t_n) + f(x_i,t_{n-1})}{(\Delta t)^2} \approx u^2 \left(\frac{f(x_{i+1},t_n) - 2f(x_i,t_n) + f(x_{i-1},t_n)}{(\Delta x)^2}\right) \qquad (4.40)$$

$$\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{f(x_i,t_{n+1}) \approx 2\left(1-\beta^2\right) f(x_i,t_n) - f(x_i,t_{n-1}) + \beta^2\left[f(x_{i+1},t_n) + f(x_{i-1},t_n)\right]} \qquad (4.42)$$



Ondes - Conditions initiales

- Eq. du 2e ordre en temps → 2 conditions initiales requises
  - (1) $f(x,0) = f_{init}(x)$ donné
  - (2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x)$ donné
- Dans le schéma différences finies: on a besoin de connaître *f* au temps t=0 *et au temps t=-Δt* pour initialiser l'algorithme
  - (1) $f_{i,0} = f_{init}(x_i)$
  - (2) $\dfrac{f_{i,0} - f_{i,-1}}{\Delta t} = g_{init}(x_i) \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) - g_{init}(x_i)\Delta t$

Ondes – conditions initiales (suite)

- Cas (a): système au repos pour t<=0

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x) = 0 \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i)$$

- Cas (b): onde progressive $f(x,t) = F(\xi) = F(x - |u|t)$

$$f(x,-\Delta t) = F(x + |u|\Delta t) = f_{init}(x + |u|\Delta t)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i + |u|\Delta t)$$

  - *Autre méthode:*

$$f(x,t) = F(\xi) = F(x - |u|t) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x) = -|u|F'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = F' \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -|u|\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) + |u|\Delta t \frac{df_{init}}{dx}(x_i) \approx f_{init}(x_i + |u|\Delta t)$$

- Cas (c): onde rétrograde: similaire, mais G(x+|u|t) …

Ondes – conditions aux limites

- Eq. Diff. 2e ordre en x → 2 conditions aux limites: bord gauche et bord droite
- Cas 1. Bord g. fixe $f(x_L,t)=C\,,\forall t \Rightarrow f_{0,j}=C,\forall j$
- Cas 2. Bord g. «libre»

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_L,t)=0,\forall t \Rightarrow \frac{f_{1,j}-f_{0,j}}{\Delta x}=0 \Rightarrow f_{0,j}=f_{1,j},\forall j$$

- Cas 3: périodique; $f_{N+1,j}=f_{0,j},\forall j$
- Cas 4: excitation sinusoïdale : en exercice
- Cas 5. Sortie de l'onde
  - au bord gauche → onde rétrograde au bord gauche
  - au bord droite → onde progressive au bord droite
- NB: Les conditions aux limites doivent être appliquées à chaque pas de temps

Sortie au bord droite

- Sortie de l'onde au bord droite: on impose une onde purement progressive au voisinage de $x = x_r$.

$$f(x,t) = F(x - |u|t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_r,t) = \frac{\partial}{\partial t}F(x_r - |u|t) = F'(x_r - |u|t)(-|u|) = -|u|\frac{\partial f}{\partial x}(x_r,t)$$

$$\frac{f_{N,j+1} - f_{N,j}}{\Delta t} = -|u|\frac{f_{N,j} - f_{N-1,j}}{\Delta x}$$

$$f_{N,j+1} = f_{N,j} - \beta\left(f_{N,j} - f_{N-1,j}\right) \qquad \forall j$$

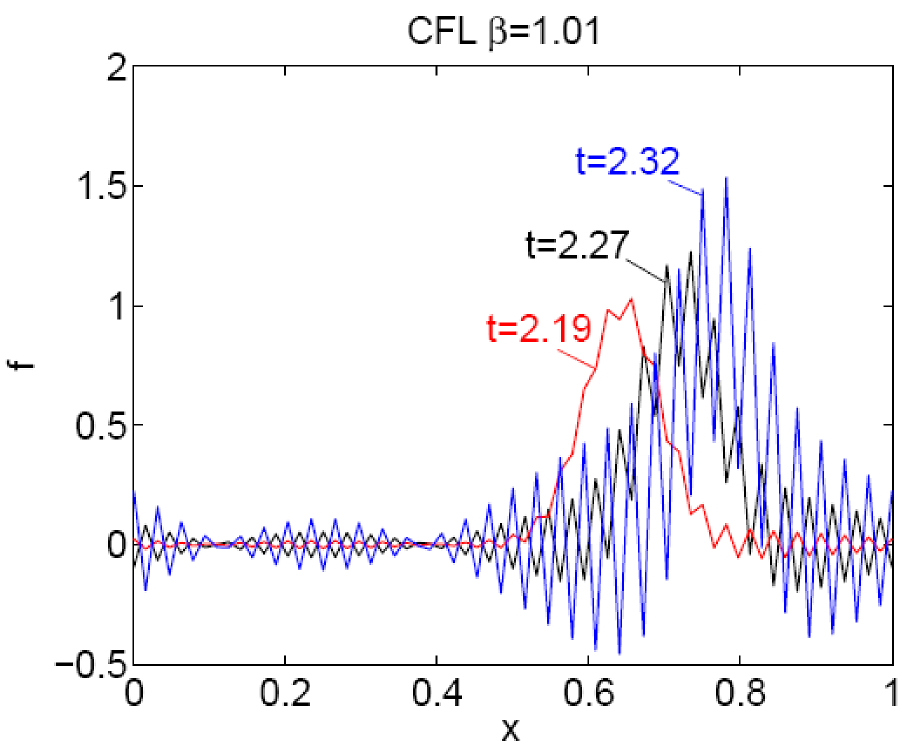
Ondes en milieu homogène, 1D

- Quelques démonstrations en «live»
  - Initialisation: immobile, progressive, rétrograde
  - Conditions aux limites: fixes, «libres», sortie
  - Réflexions
  - Superpositions
  - Ondes stationnaires, modes propres, fréquences propres
  - Excitation résonante
  - …

Ondes – instabilité numérique

- **4.2.2 Stabilité du schéma différences finies explicite 3 niveaux pour l'équation d'ondes**

Condition de stabilité CFL $\boxed{0 \leq \beta^2 \leq 1}$ $\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$

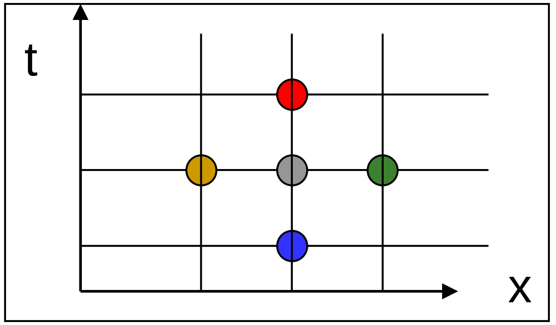


$\boxed{\beta = 1.01}$

Ondes – instabilité numérique

- Le mode instable est une ***oscillation*** dans l'espace (avec 2 pts de maillage x_i par longueur d'onde) et le temps (2 pts de maillage t_j par période) dont ***l'amplitude croît exponentiellement***
- On fera la démonstration au tableau du critère de stablilité CFL: analyse de ***Von Neumann – voir aussi section 4.2.2***

Ondes – Analyse de stabilité Von Neumann



$$\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f(x_i, t_{n+1}) \approx 2(1-\beta^2) f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta^2 \left(f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n) \right)$$

(4.43)

Ansatz: on cherche une solution de (4.43) de type ondulatoire, avec la possibilité d'avoir une amplitude exponentielle dans le temps

$$f(x_i, t_n) = \hat{f} \exp\{i(k x_i - \omega t_n)\}, \ \hat{f} \in \mathrm{C}, k \in R, \quad \omega \in \mathrm{C} \quad (4.26)$$

On définit le «gain» G: $f(x_i, t_{n+1}) = G f(x_i, t_n), \quad G = e^{-i\omega\Delta t}$

Condition de stabilité: $|G| \leq 1, \forall k, \forall \omega$

Analyse de stabilité de Von Neumann

Ondes. Explicite 3 niveaux. Stabilité

Introduisant (4.26) dans (4.43) :

$$\hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n+\Delta t))} = 2(1-\beta^2)\hat{f} e^{i(kx_i-\omega t_n)} - \hat{f} e^{i(kx_i-\omega(t_n-\Delta t))} + \beta^2\left[\hat{f} e^{i(k(x_i+\Delta x)-\omega t_n)} + \hat{f} e^{i(k(x_i-\Delta x)-\omega t_n)}\right]$$

En posant $G = e^{-i\omega\Delta t}$ (on note que $e^{+i\omega\Delta t} = \frac{1}{G}$),

factorisant $\hat{f} e^{i(kx_i-\omega t_n)}$ et

utilisant $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2\cos(k\Delta x) = 2\left(1-2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)$

posant $\theta = \frac{k\Delta x}{2}$, on obtient :

$$G = 2-2\beta^2 - \frac{1}{G} + \beta^2(2 + 4\sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$G^2 - 2(1-2\beta^2\sin^2\theta)G + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$G = 1-2\beta^2\sin^2\theta \pm \sqrt{\Delta}, \text{ avec}$$

$$\Delta = (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 - 1 .$$

On rappelle que le critère de stabilité est $|G| \le 1$.

• Si $\beta^2 \le 1$, alors $\sin^2\theta \le 1 \Rightarrow 2\beta^2\sin^2\theta \le 2$

$\Rightarrow (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 \le 1 \Rightarrow \Delta \le 0$

et donc

$$G = 1-2\beta^2\sin^2\theta \pm i\sqrt{1-(1-2\beta^2\sin^2\theta)^2}$$

$$\Rightarrow |G|^2 = (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 + 1 - (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2$$

$\Rightarrow |G|^2 = 1, \forall\theta \Rightarrow$ STABLE

• Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin\theta = 1$,

$$\Delta = (1-2\beta^2)^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow G = 1-2\beta^2 \pm \sqrt{\Delta}$$

On a $1-2\beta^2 < -1$, et en prenant la solution $-\sqrt{\Delta}$,

on a $G < -1$, et donc $|G| > 1 \Rightarrow$ INSTABLE

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité

$$\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

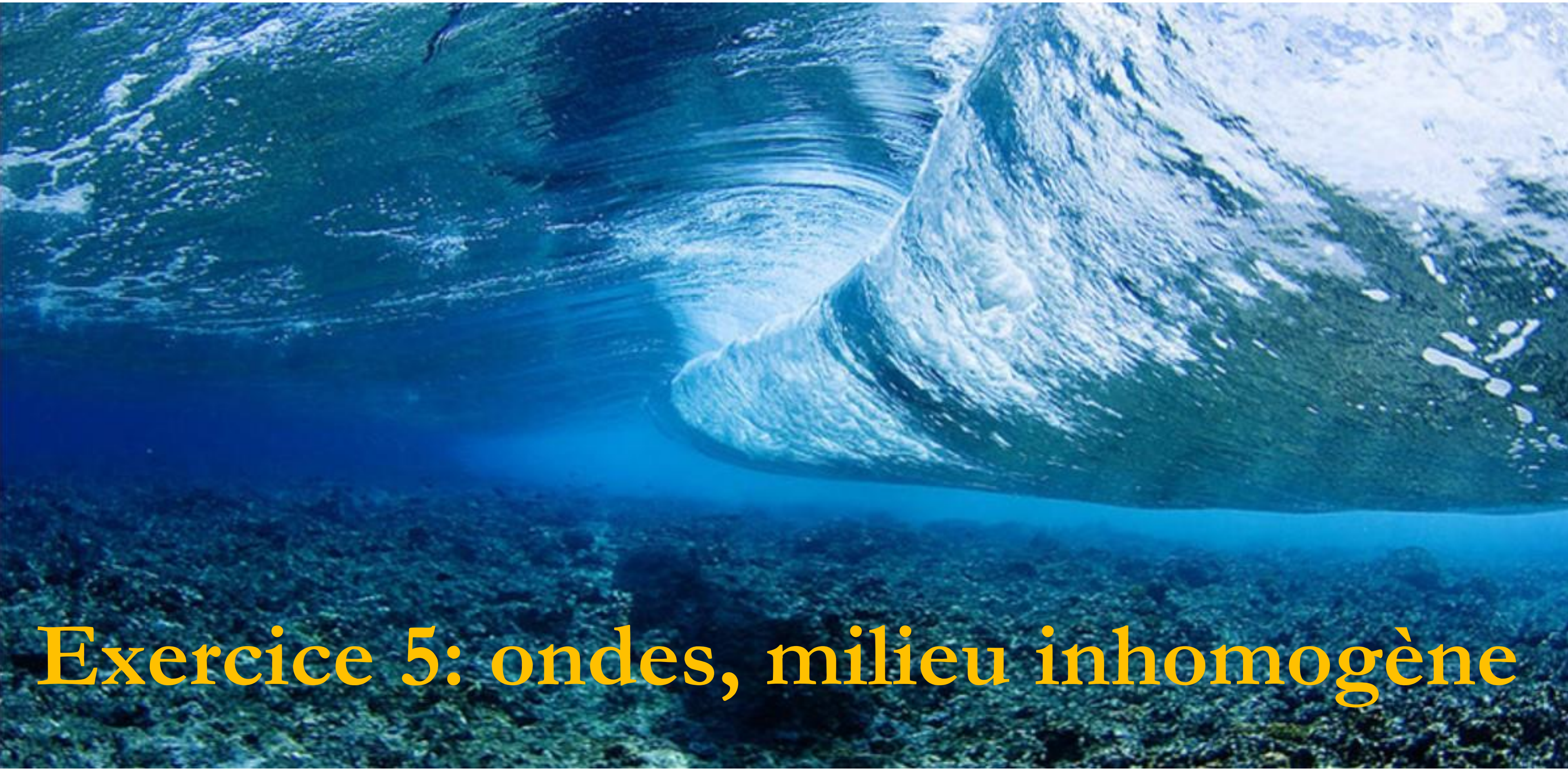
$$\boxed{\text{Si } \beta^2 \leq 1,\ |G|^2 = 1 \Rightarrow \text{stable}}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta^2 > 1, \text{ alors, pour } \sin^2\theta = 1, G < -1 \Rightarrow \text{instable}}$$

$$\theta = k\,\Delta x/2 \qquad \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{k\Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2\pi/\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2\Delta x}$$

- 2 points de maillage par longueur d'onde, c'est bien ce que l'on a observé sur les simulations instables!



Exercice 5: ondes, milieu inhomogène

- Equations
- **Solution analytique approximative: méthode WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)**
- Simulations numériques et comparaison

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(x)$

Vagues en eau peu profondes – Annexe E

$$u^2(x) = g\, h_0(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} f \right) = 0 \quad (B)$$

Laquelle de ces équations est-elle correcte?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2(x)\, f \right) = 0 \quad (C)$$

Cela fait-il une différence sur la propagation de la vague?

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(x)$

- Les Eqs. (B) et (C) comportent des termes additionnels de 1ᵉ , respectivement 2ᵉ dérivée de $u^2(x)$. On utilisera les différences finies centrées pour ces termes:

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x} \approx \frac{(u^2{}_{i+1} - u^2{}_{i-1})}{2\Delta x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{(u^2{}_{i+1} - 2u^2{}_i + u^2{}_{i-1})}{(\Delta x)^2}$$

Ondes en milieu inhomogène 2D: $u^2(x,y)$

(Ex.7, facultatif)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla \cdot (u^2 \nabla f)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - g(x_{i-1}, y_j)}{2h_x},$$

Pour $g=u^2$ ou $g=f$

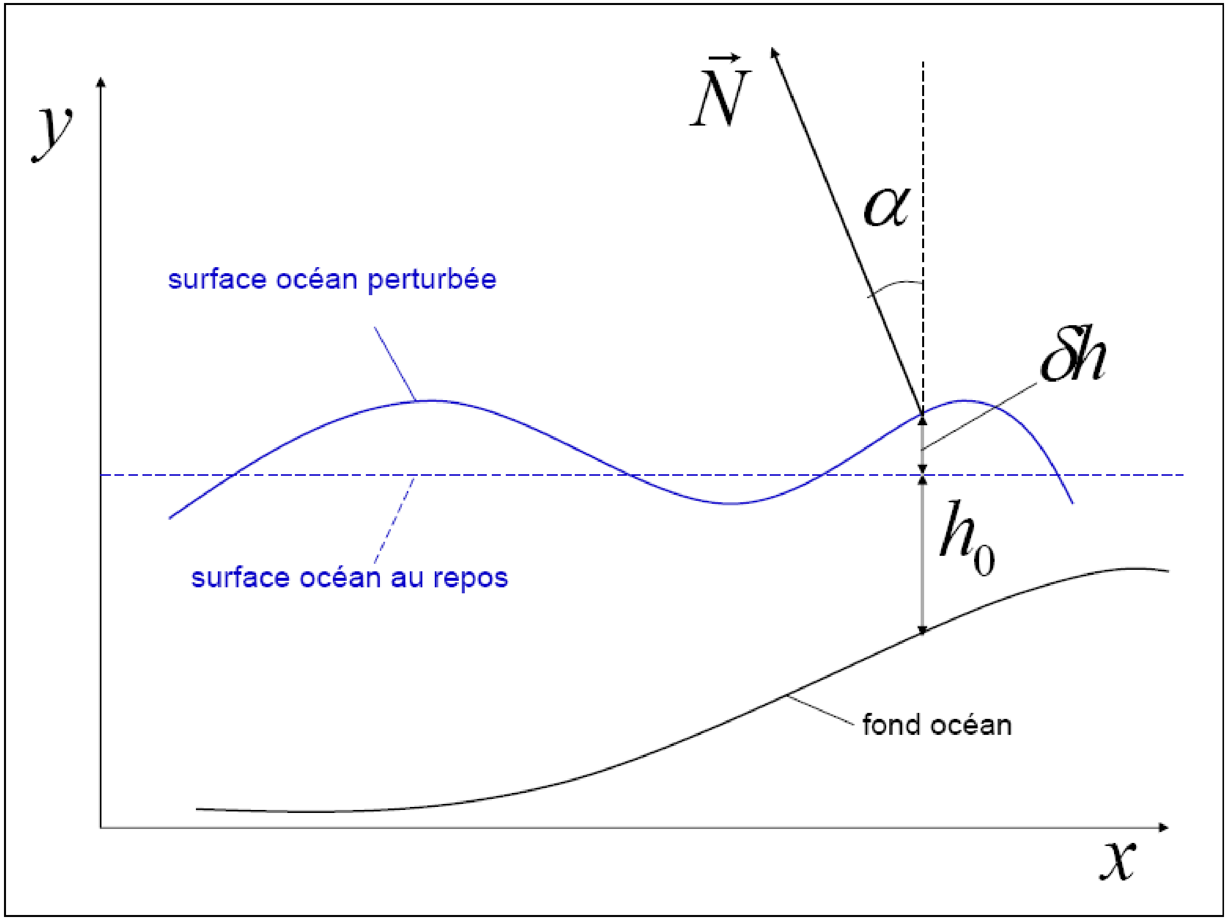
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_{j-1})}{2h_y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - 2g(x_i, y_j) + g(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - 2g(x_i, y_j) + g(x_i, y_{j-1})}{h_y^2} \quad (3)$$

Equations en eaux peu profondes

- Voir Annexe E des Notes de Cours + au tableau



Profondeur variable $h_0(x)$ $u(x) = \sqrt{g h_0(x)}$

Vitesse de propagation variable u(x)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - u^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta h) = 0 \quad \text{(A)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta h\right) = 0 \quad \text{(B)}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2(x)\,\delta h\right) = 0 \quad \text{(C)}$$

Laquelle de ces équations est correcte?

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

Méthode WKB

- Wentzel, Kramers, Brillouin
- Solution analytique avec des approximations basées sur des hypothèses
- Au cœur de la méthode: séparation des échelles de variation
- Dépendance temporelle sinusoidale $\delta h(x,t) = e^{-i\omega t}\,\delta\hat{h}(x)$
- Substituant dans l'Eq.(B):

$$-\omega^2 \delta\hat{h}(x) = \frac{d}{dx}\left(u^2(x)\frac{d}{dx}\delta\hat{h}(x)\right) \quad (*)$$

- Dépendance spatiale ~sinusoidale, phase S(x) ***rapidement*** variable, amplitude A(x) ***lentement*** variable

$$\delta\hat{h}(x) = A(x)\exp\big(iS(x)\big) \quad (**)$$

WKB (2) – “ordering”

- On fait l’hypothèse que la variation de A(x) est liée à la variation de $u^2(x)$, i.e. ce sont des variations lentes du même ordre
- On va «tagger» les termes variant lentement avec ε , qui symbolise la «petitesse» du terme
- Chaque fois qu’on dérive un terme, il prend un ordre supérieur, symbolisé par une puissance de ε supérieure

$$\frac{dS}{dx} \equiv k(x) \quad \textit{rapide (grand):} \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{dk}{dx} \sim \frac{d^2S}{dx^2} \sim \varepsilon^1$$

$$A \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{dA}{dx} \sim \varepsilon^1 \qquad \frac{d^2A}{dx^2} \sim \varepsilon^2$$

$$u^2 \sim \varepsilon^0 \qquad \frac{du^2}{dx} \sim \varepsilon^1 \qquad \frac{d^2u^2}{dx^2} \sim \varepsilon^2$$

(***)

WKB (3) – “ordering” (suite)

- On insère (**) dans (*), et on simplifie par e^{is} .
- On inspecte chaque terme, en y ajoutant les «tags» (***)
- On regroupe les termes ordre par ordre, i.e. par puissance de ε.
- On résout ordre par ordre, en insérant la solution à l’ordre 0 dans l’équation d’ordre 1
- *…. La présentation sera faite au tableau ….*
- La solution à l’ordre 0 donne:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \equiv k^2(x) = \frac{\omega^2}{u^2(x)} = \frac{\omega^2}{gh_0(x)}$$

- La solution à l’ordre 1 donne:

$$A(x) = A_0\left(u(x)\right)^{-1/2} \sim \left(h_0(x)\right)^{-1/4}$$