

Semaine 23 – Plan

•4.2 Ondes

- Schéma explicite 3 niveaux
- Modes propres, fréquences propres, excitation résonante
- Limite de stabilité CFL (4.2.2)
 - analyse de stabilité de Von Neuman
- **Vitesse de phase variable (tsunami) (Annexe E)**
 - équations en eaux peu profondes
 - numérique: démo (4.2.3)
 - analytique: approximation WKB (4.2.4)
 - indications pratiques pour l'Ex.7

Ondes en eaux “peu profondes” et tsunamis

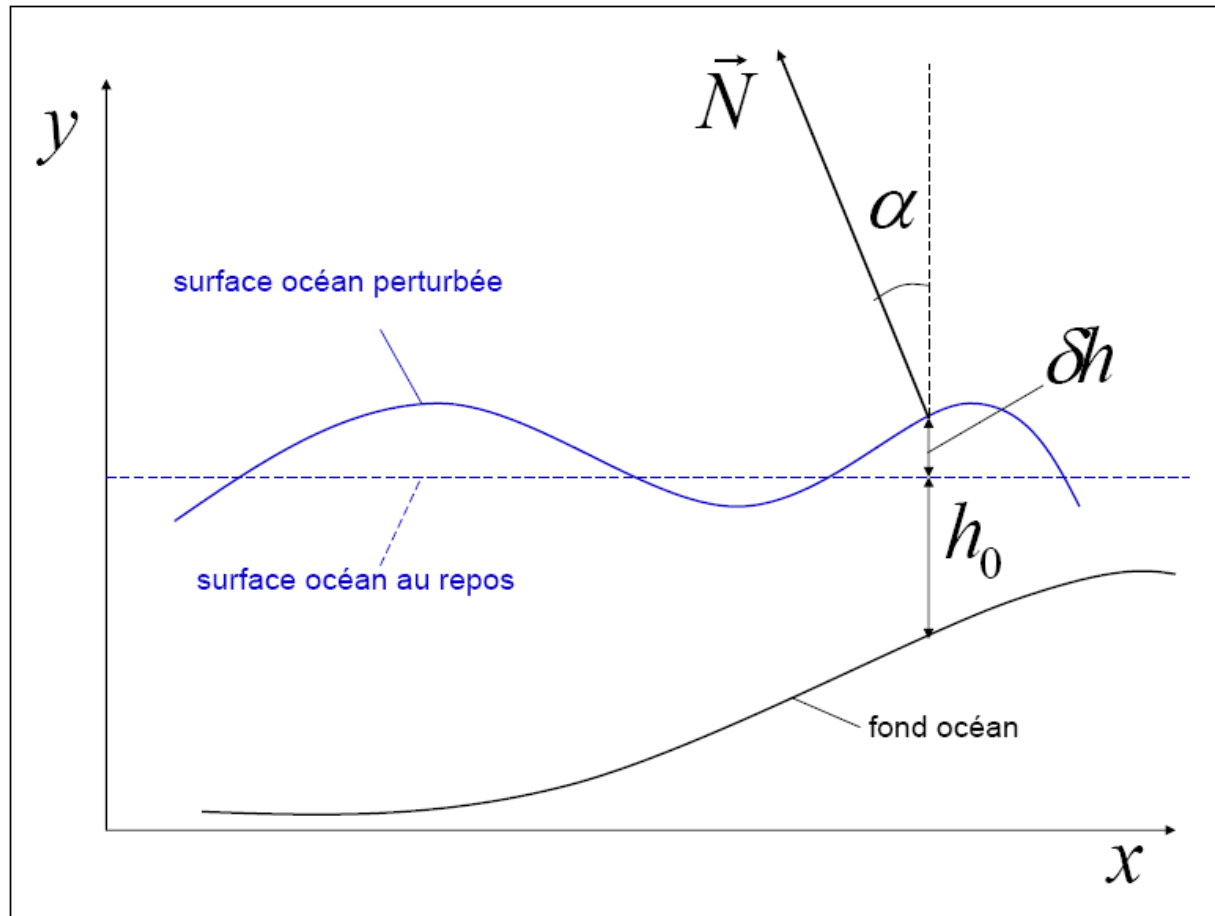
Equations

**Solution analytique approximative:
méthode WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)**

Simulations numériques et comparaison

Equations en eaux peu profondes

- Voir Annexe E des Notes de Cours + au tableau



Profondeur variable $h_0(x)$ $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$
 Vitesse de propagation variable $u(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta h) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta h \right) = 0 \quad (\text{B})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2(x) \delta h) = 0 \quad (\text{C})$$

Laquelle de ces équations est correcte?

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?



- Cette usine électrique flottante (3000 tonnes) s'est retrouvée à 6 km à l'intérieur des terres – Banda Aceh, Indonésie

Méthode WKB

- Wentzel, Kramers, Brillouin
- Solution analytique avec des approximations basées sur des hypothèses
- Au cœur de la méthode: séparation des échelles de variation
- Dépendance temporelle sinusoidale $\delta h(x, t) = e^{-i\omega t} \delta \hat{h}(x)$
- Substituant dans l'Eq.(B):

$$-\omega^2 \delta \hat{h}(x) = \frac{d}{dx} \left(u^2(x) \frac{d}{dx} \delta \hat{h}(x) \right) \quad (*)$$

- Dépendance spatiale ~sinusoidale, phase $S(x)$
rapidement variable, amplitude $A(x)$ **lentement** variable

$$\delta \hat{h}(x) = A(x) \exp(iS(x)) \quad (**)$$

WKB (2) – “ordering”

- On fait l’hypothèse que la variation de $A(x)$ est liée à la variation de $u^2(x)$, i.e. ce sont des variations lentes du même ordre
- On va «tagger» les termes variant lentement avec ε , qui symbolise la «petitesse» du terme
- Chaque fois qu’on dérive un terme, il prend un ordre supérieur, symbolisé par une puissance de ε supérieure

$$\begin{array}{lll}
 \frac{dS}{dx} \equiv k(x) & \text{rapide (grand): } \sim \varepsilon^0 & \frac{dk}{dx} \sim \frac{d^2 S}{dx^2} \sim \varepsilon^1 \\
 A \sim \varepsilon^0 & \frac{dA}{dx} \sim \varepsilon^1 & \frac{d^2 A}{dx^2} \sim \varepsilon^2 \\
 u^2 \sim \varepsilon^0 & \frac{du^2}{dx} \sim \varepsilon^1 & \frac{d^2 u^2}{dx^2} \sim \varepsilon^2
 \end{array}
 \quad (***)$$

WKB (3) – “ordering” (suite)

- On insère (**) dans (*), et on simplifie par e^{is} .
- On inspecte chaque terme, en y ajoutant les «tags» (***)
- On regroupe les termes ordre par ordre, i.e. par puissance de ε .
- On résout ordre par ordre, en insérant la solution à l'ordre 0 dans l'équation d'ordre 1
- *La présentation sera faite au tableau*
- La solution à l'ordre 0 donne:

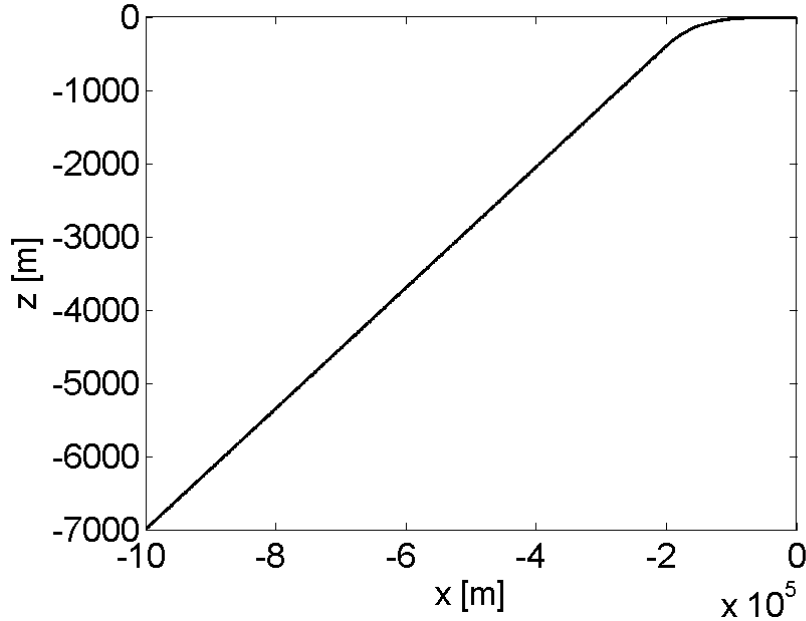
$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \equiv k^2(x) = \frac{\omega^2}{u^2(x)} = \frac{\omega^2}{gh_0(x)}$$

- La solution à l'ordre 1 donne:

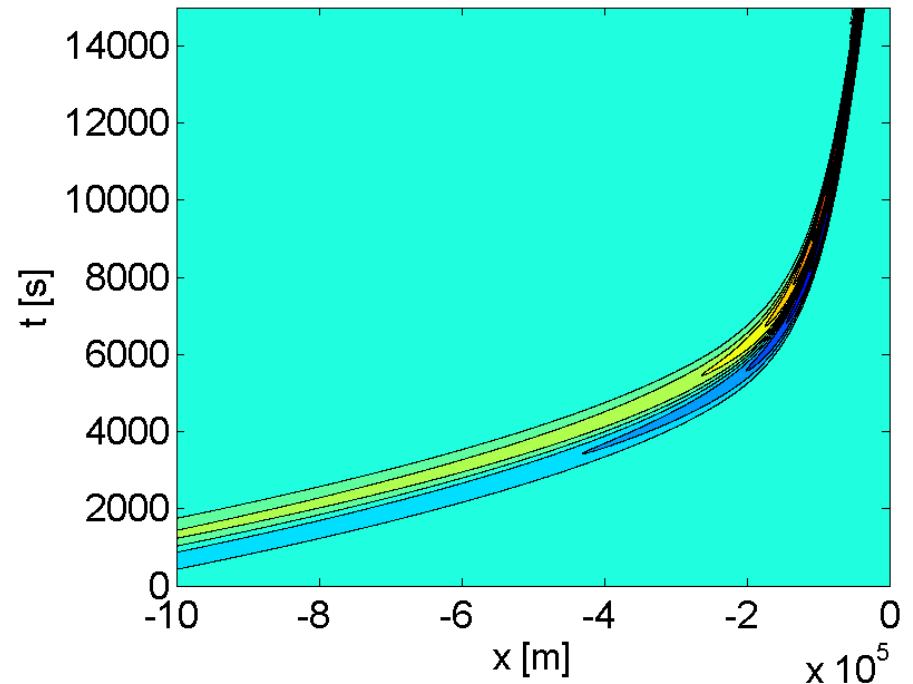
$$A(x) = A_0(u(x))^{-1/2} \sim (h_0(x))^{-1/4}$$

Comparaison WKB - numérique

Onde Explicite 3 niveaux



Profondeur de l'océan



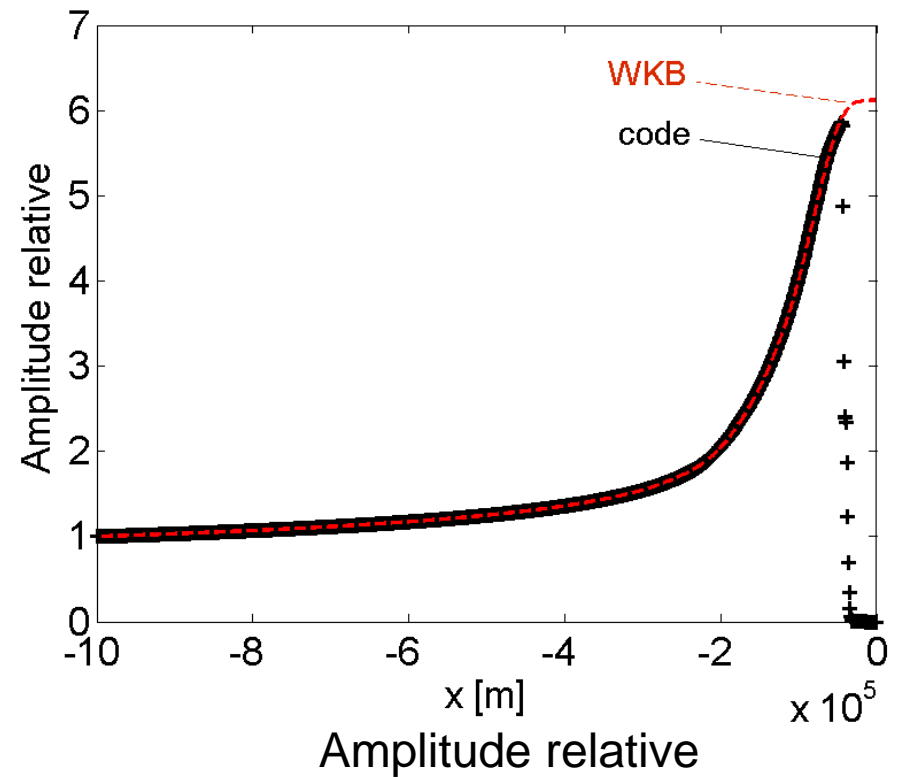
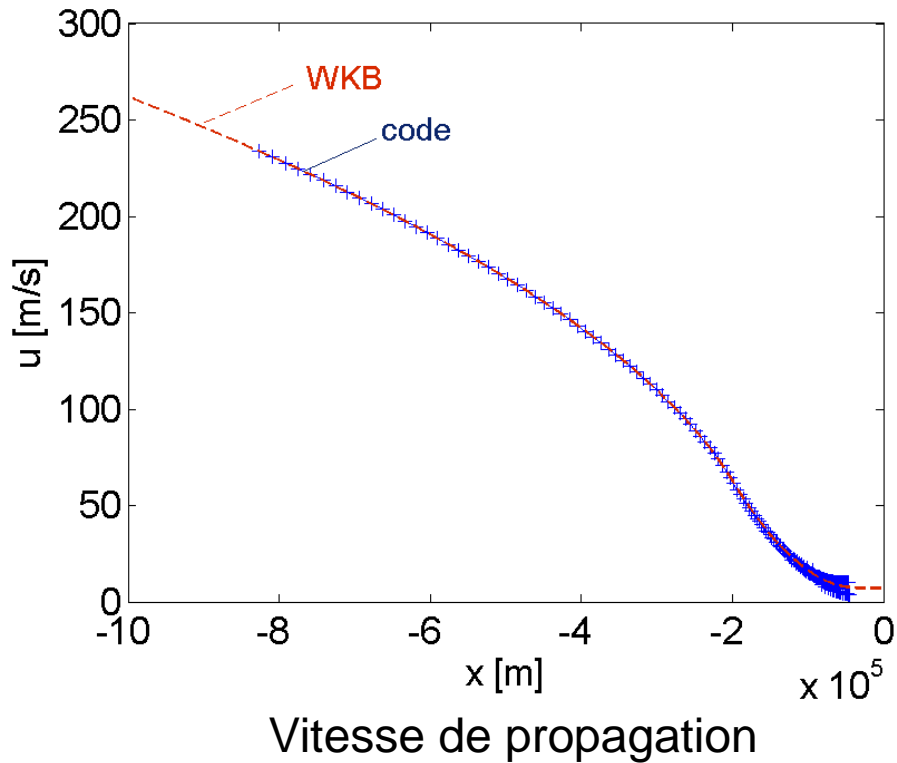
Solution numérique $f(x,t)$

Période de la perturbation $T=2000s$

$N_x = 1024$ ($\Delta x=976.6m$)

$\beta_{CFL}^{max} = 1$ ($\Delta t=3.7266s$)

Comparaison WKB - numérique



Conclusion: la méthode WKB donne des résultats en excellent accord avec les simulations numériques

Wilayah Kalimantan Barat (W.K.B.)
= West Kalimantan Region



- Cette usine électrique flottante (3000 tonnes) s'est retrouvée à 6 km à l'intérieur des terres – Banda Aceh, Indonésie

Conclusions

- La simulation numérique et la méthode WKB permettent de mettre en évidence que:
 - la vitesse de propagation et la longueur d'onde diminuent quand la vague se rapproche des côtes

$$u(x) = \sqrt{gh(x)}$$

$$\lambda(x) = 2\pi / k(x) = 2\pi u(x) / \omega = 2\pi \sqrt{gh(x)} / \omega$$

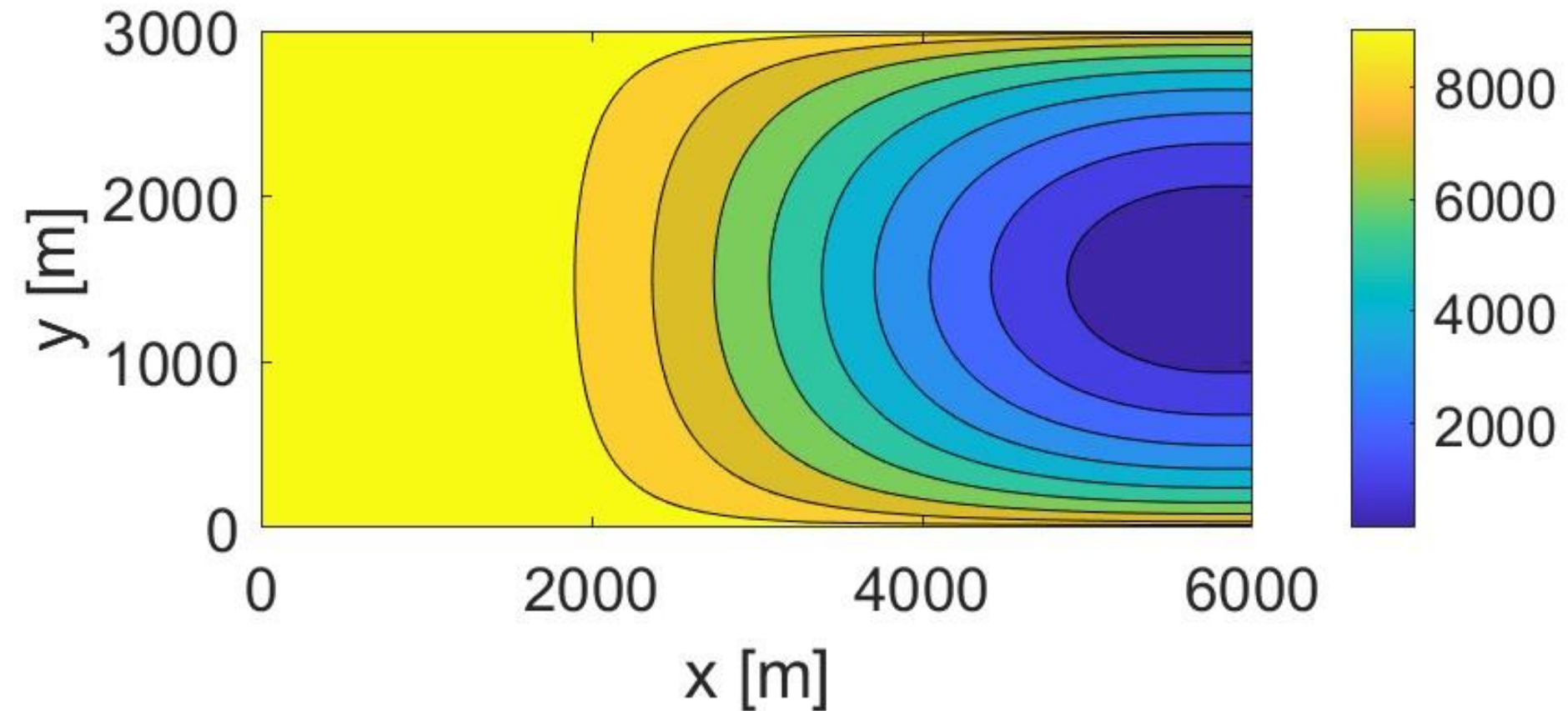
- l'amplitude de la vague augmente quand la vague se rapproche des côtes

$$A(x) = \frac{A_0}{(h(x))^{1/4}}$$

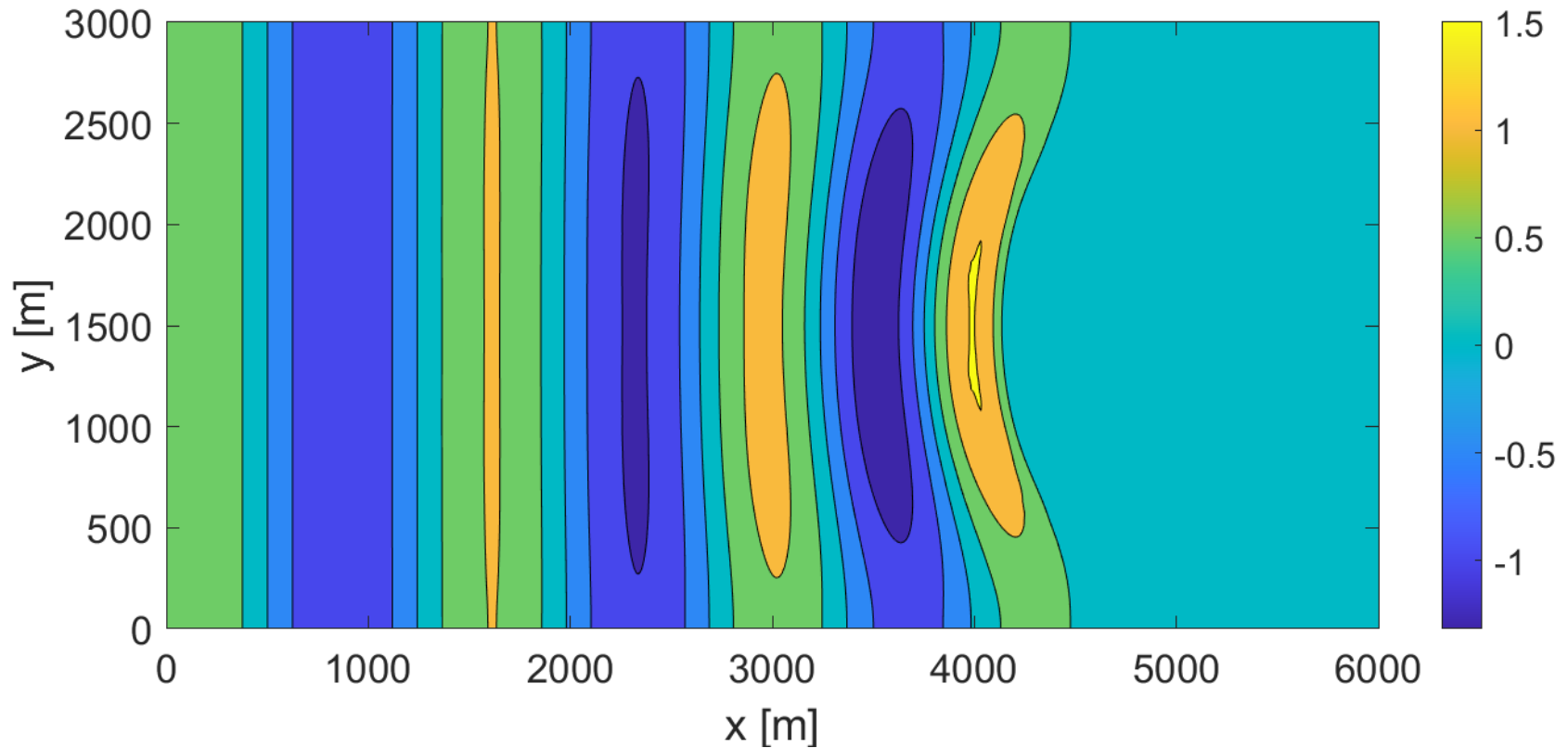
Remarques

- Les équations ont été dérivées sous trois approximations:
 - Longueur d'onde $\lambda \gg$ profondeur h_0
 - Petites perturbations $\delta h \ll h_0 \rightarrow$ linéarisation
 - Cas unidimensionnel
- Lorsque la vague se rapproche des côtes, la 2e hypothèse n'est plus vérifiée. Des phénomènes non linéaires apparaissent, tels le « wave breaking » et les solitons. Voir les équations de Burger et de Korteweg – de Vries.
- D'autres phénomènes peuvent encore modifier (et malheureusement augmenter parfois) l'amplitude de la vague, notamment la focalisation lorsque la profondeur n'est pas 1D.
- $h_0(x,y) \rightarrow$ focalisation; démonstration (Ex.7 facultatif)

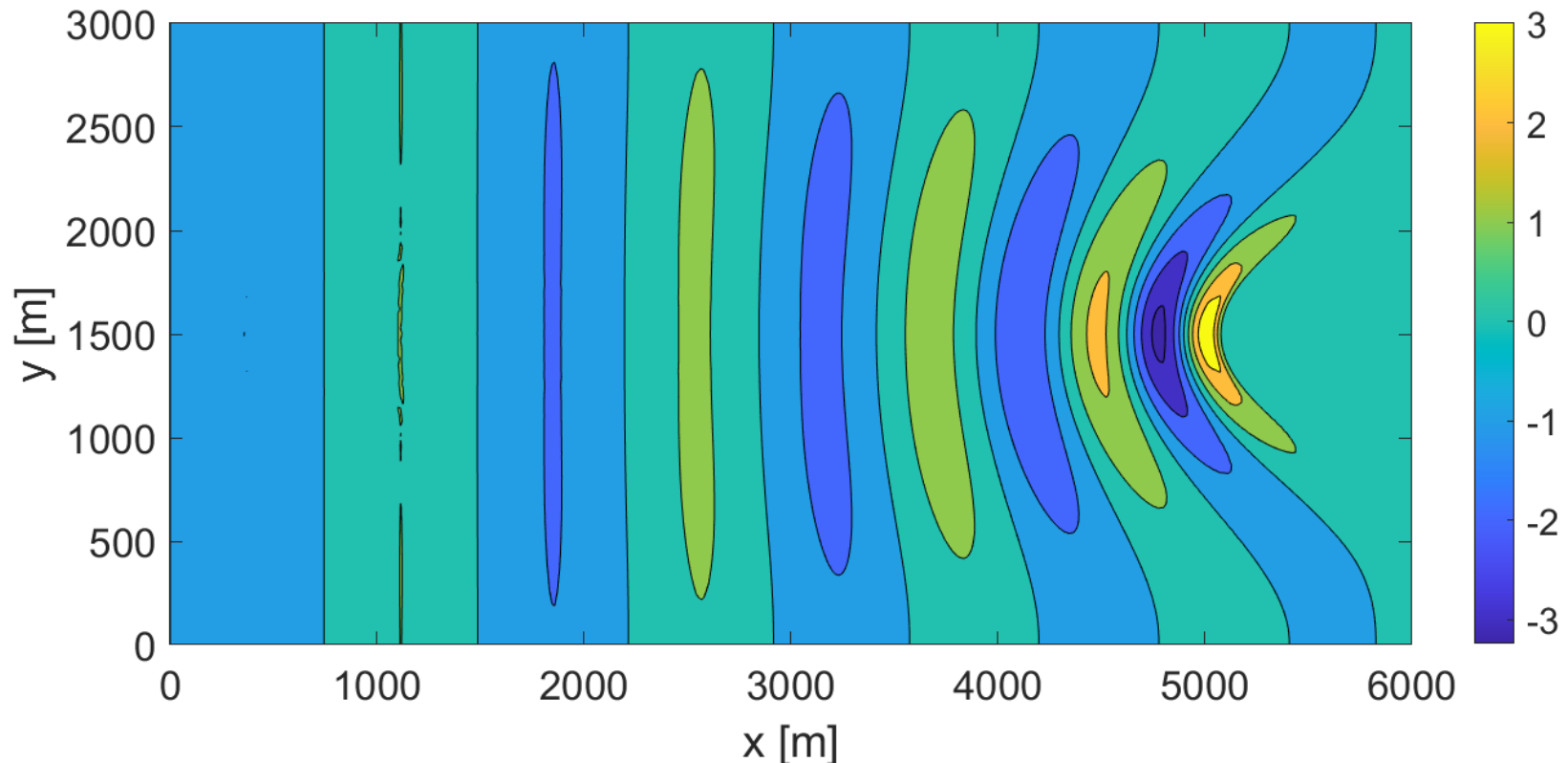
Profondeur 2D $h_0(x,y)$. Focalisation.



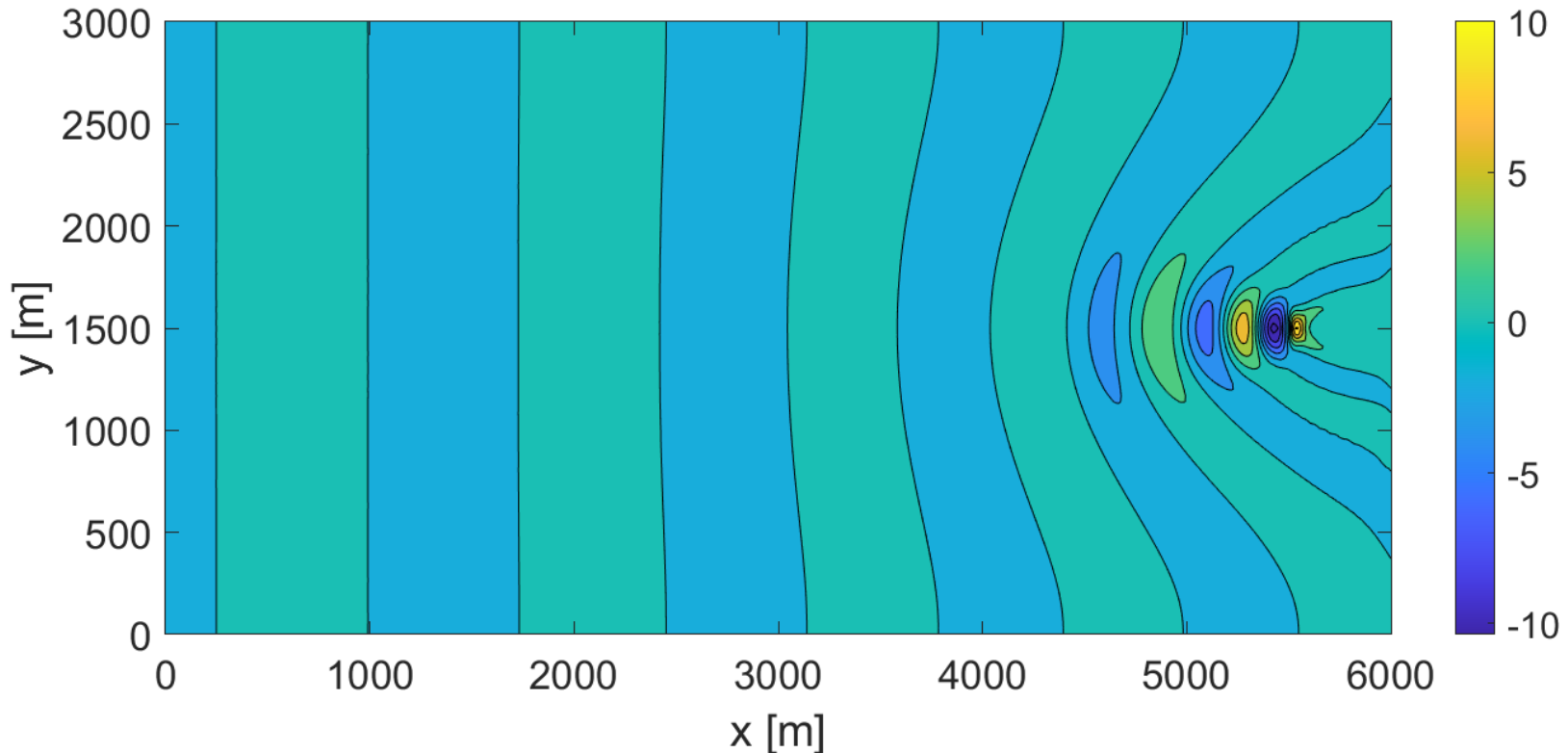
Profondeur 2D $h_0(x,y)$. Focalisation.



Profondeur 2D $h_0(x,y)$. Focalisation.

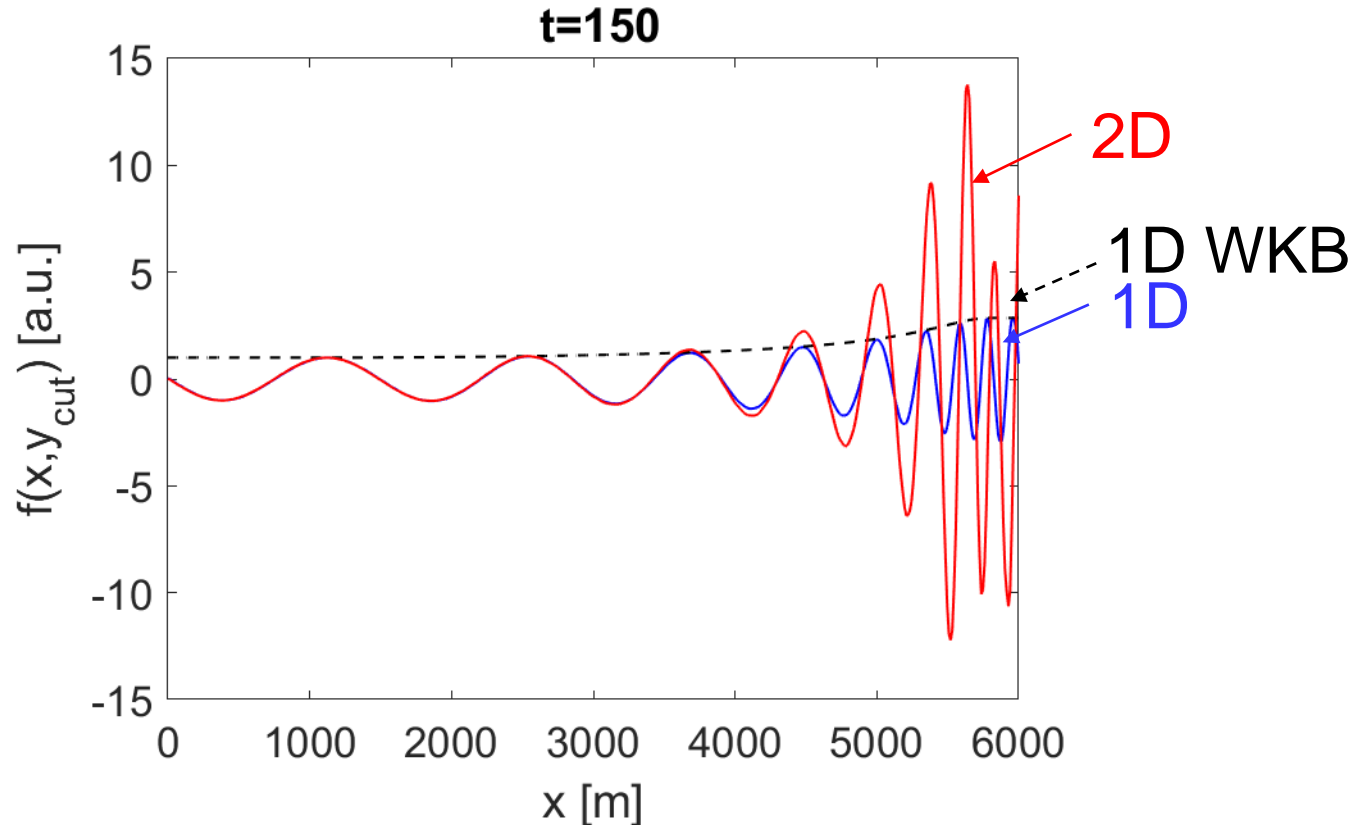


Profondeur 2D $h_0(x,y)$. Focalisation.



Nous avons en fait une lentille gravitationnelle convergente...

Profondeur 2D $h_0(x,y)$. Focalisation.



...et le haut-fond ne nous protège pas, bien au contraire!