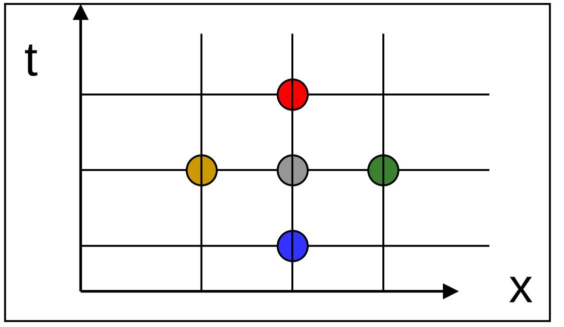
Semaine 22 – Plan

- **4.2 Ondes**
  - Schéma explicite 3 niveaux
  - **Modes propres, fréquences propres, excitation résonante**
  - **Limite de stabilité CFL (4.2.2)**
    - **analyse de stabilité de Von Neuman**
  - **Vitesse de phase variable (tsunami) (Annexe E)**
    - **équations en eaux peu profondes**
    - **numérique: démo (4.2.3)**
    - **analytique: approximation WKB (4.2.4)**

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité



$$\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$f(x_i,t_{n+1}) \approx 2(1-\beta^2) f(x_i,t_n) - f(x_i,t_{n-1}) + \beta^2 \left(f(x_{i+1},t_n) + f(x_{i-1},t_n) \right)$$

(4.43)

Ansatz: on cherche une solution de (4.43) de type ondulatoire, avec la possibilité d'avoir une amplitude exponentielle dans le temps

$$f(x_i,t_n) = \hat{f} \exp\{i(k x_i - \omega t_n)\}, \ \hat{f} \in C, k \in R, \quad \omega \in C \quad (4.26)$$

On définit le «gain» G: $f(x_i,t_{n+1}) = G\, f(x_i,t_n), \quad G = e^{-i\omega\Delta t}$

Condition de stabilité: $|G| \le 1, \forall k, \forall \omega$

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité

$$\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta^2 \le 1,\ \left|G\right|^2 = 1 \Rightarrow \text{stable}}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta^2 > 1, \text{alors, pour} \sin^2\theta = 1, G < -1 \Rightarrow \text{instable}}$$

$$\theta = k\,\Delta x / 2 \qquad \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{k\Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2\pi / \lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2\Delta x}$$

- 2 points de maillage par longueur d'onde, c'est bien ce que l'on a observé sur les simulations instables!

Ondes en eaux “peu profondes” et tsunamis

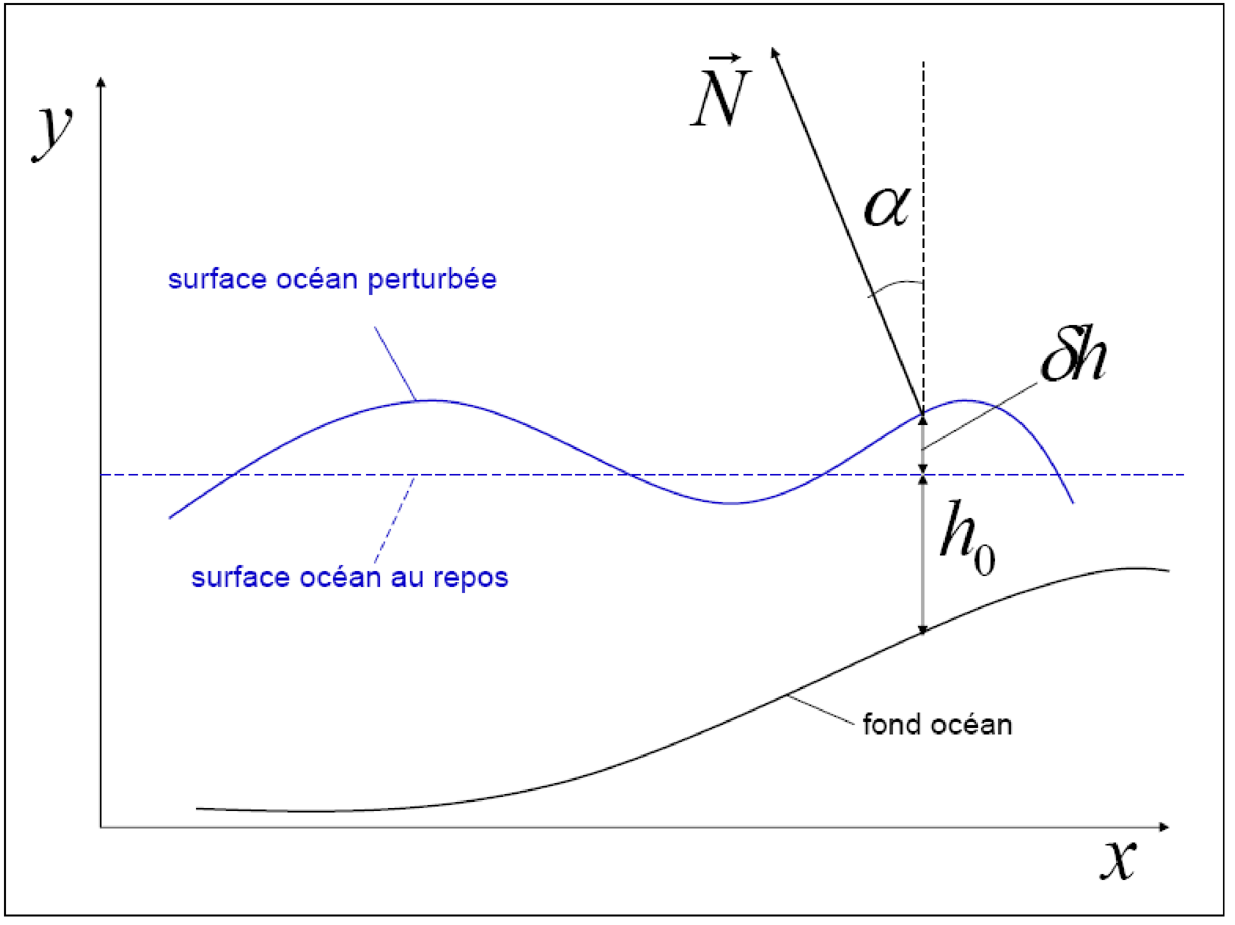
Equations

Solution analytique approximative: méthode WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin)

Simulations numériques et comparaison

Equations en eaux peu profondes

- Voir Annexe E des Notes de Cours + au tableau



$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho_0 \vec{g} \quad \text{(E.3)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{v}) = 0 \quad \text{(E.4)}$$

1D: $-\frac{\partial (v_x h)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$

Hypothèses:

- fluide parfait, incompressible
- 1D
- Eaux peu profondes: $h_0 << \lambda$
- Petites perturbations → linéarisation

$\alpha << 1$

$$\left| \frac{dv_y}{dt} \right| << g$$

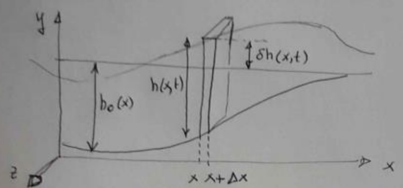
$$h(x,t) = h_0(x) + \delta h(x,t)$$

$$\vec{v}(x,t) = 0 + \delta\vec{v}(x,t)$$

Présentation au tableau

Ondes en eaux "peu profondes", profondeur variable

On considère une tranche de fluide d'épaisseur Δx, largeur L selon z, et on note sa hauteur $h(x,t)$.



On note $h_0(x)$ la profondeur de l'océan à l'équilibre, et $h(x,t) = h_0(x) + \delta h(x,t)$.

Le fluide est supposé incompressible, donc son volume est conservé. La variation de volume à travers les faces latérales de la tranche de fluide, par unité de temps, est :

$$- v_x(x,t)\,h(x,t)\,L \;+\; v_x(x+\Delta x,t)\,h(x+\Delta x,t)\,L \,. \qquad (1)$$

La variation de volume de la tranche de fluide par unité de temps, due à son mouvement vertical, es[t]

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}\,\Delta x\, L \,. \qquad (2)$$

La variation totale implique $(1)+(2)=0$.
En divisant par L, puis par Δx, et faisant $\lim \Delta x \to 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x h) = 0} \qquad (E.4)$$

C'est, en 1D, l'Eq. (E.4) des notes de cours. L'autre équation fondamentale est l'Eq. d'Euler (Navier-Stokes en négligeant la viscosité) :

$$\boxed{\rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho_0 \vec{g}} \qquad (E.3)$$

On résout ces équations avec les hypothèses "d'eaux peu profondes" (en fait : $h_0 \ll \lambda$), impliquant que l'accélération verticale $\left|\frac{dv_y}{dt}\right| \ll g$

et que les perturbations sont "petites" ; écrivant :

$$h(x,t) = h_0(x) + \delta h(x,t)$$
$$\vec{v}(x,t) = 0 + \delta\vec{v}(x,t)$$

on négligera les termes en δh^2, $\delta h\,\delta v$, $(\delta v)^2$, etc, ce qui veut dire : on linéarisera les équations.

Ecrivant (E.3) selon x et selon y :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} & (5) \\[2ex] \rho_0 \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} - \rho_0 g \,. & (6) \end{cases}$$

La surface de l'eau est une isobare ; $\vec{\nabla} P \perp$ surfa[ce]

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P/\partial x}{-\partial P/\partial y} = \tan\alpha = \frac{\partial \delta h}{\partial x} \qquad (7)$$

Combinant (5)(6)(7), négligeant $\frac{dv_y}{dt}$ dans (6),

$$\rho_0 \frac{dv_x}{dt} = -\rho_0 g \frac{\partial \delta h}{\partial x}$$

On se rappelle que d/dt est la dérivée totale, ou dérivée convective, qui est $\partial/\partial t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$, et donc

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \delta h}{\partial x}} \qquad (8)$$

Nous avons donc le système d'équations (E.4)(8).
En linéarisant, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta v_x}{\partial t} = -g \dfrac{\partial \delta h}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \delta h}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_0\, \delta v_x) = 0 \,. \end{cases}$$

Dérivant par rapport au temps ($\partial/\partial t$) cette dernière équation, et substituant $\partial \delta v_x/\partial t$ de la première,

$$\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h_0\left(-g \frac{\partial \delta h}{\partial x}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \delta h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g h_0 \frac{\partial \delta h}{\partial x}\right) = 0}$$

La vitesse de propagation est $u(x) = \sqrt{g\, h_0(x)}$

(Pour $h_0 = 7000$ m, $u = 262$ m/s $= 944$ km/h !)

Profondeur variable $h_0(x)$ $\quad u(x) = \sqrt{g h_0(x)}$
Vitesse de propagation variable u(x)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - u^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\delta h\right) = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta h\right) = 0 \; (B)$$

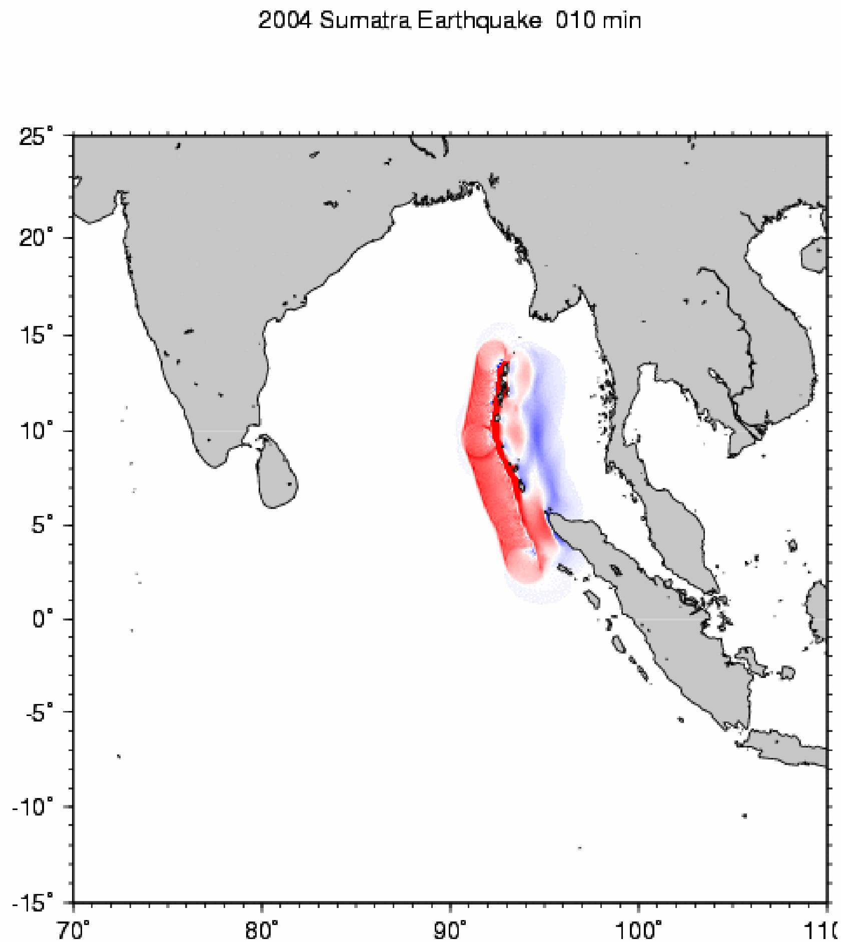
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta h - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2(x)\,\delta h\right) = 0 \quad (C)$$

Laquelle de ces équations est correcte?

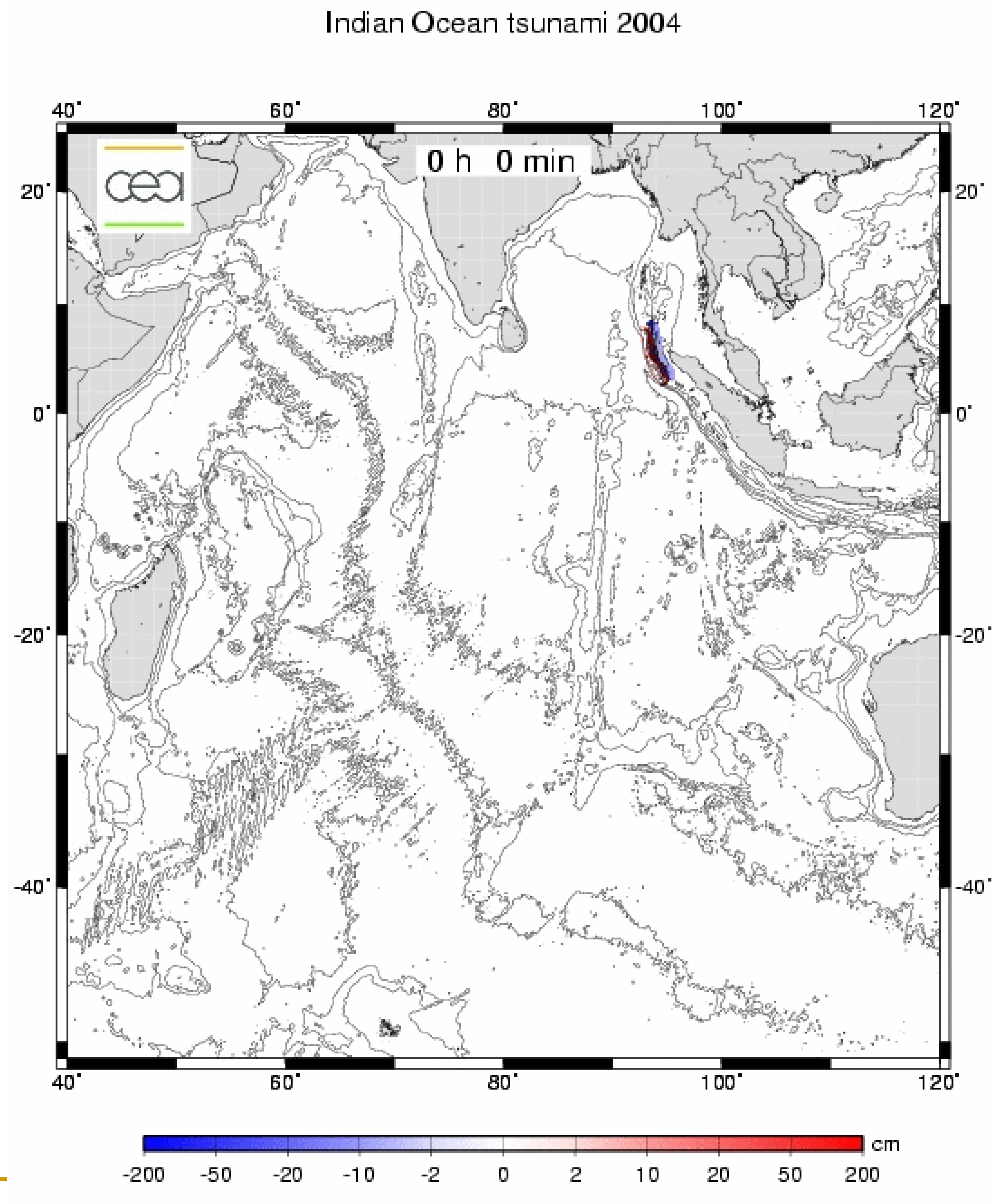
Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

26 December 2004, 7h55 (WIB)
The Earth shakes

26 décembre 2004, 7h58 (WIB)



http://www.psychceu.com/tsunami/animation.sm.gif



http://www-dase.cea.fr/actu/dossiers_scientifiques/2004-12-26/index_en.html

EPFL

- Cette usine électrique flottante (3000 tonnes) s'est retrouvée à 6 km à l'intérieur des terres – Banda Aceh, Indonésie