Semaine 21 – Plan

- **4.2 Ondes**
  - Schéma explicite 3 niveaux
  - **Modes propres, fréquences propres, excitation résonante**
  - **Limite de stabilité CFL (4.2.2)**
    - **analyse de stabilité de Von Neuman**
  - **Vitesse de phase variable (tsunami) (Annexe E)**
    - **équations en eaux peu profondes**
    - **numérique: démo (4.2.3)**
    - **analytique: approximation WKB (4.2.4)**

Modes propres, fréquences propres

- Mode propre: mvmt particulier du système homogène (i.e. SANS excitation extérieure) pour lequel TOUS les degrés de liberté oscillent à la même fréquence, appelée fréquence propre.
- De démonstrations seront faites en simulation.
- Principe de superposition: la somme algébrique de 2 modes propres est également solution du système homogène.

Modes et fréquences propres – Solution générale

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Séparation des variables $f(x,t) = A(x)B(t)$

$$A(x)\frac{d^2B}{dt^2}(t) = u^2 \frac{d^2A}{dx^2}(x)B(t) \qquad \frac{1}{B}\frac{d^2B}{dt^2}(t) = u^2 \frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2}(x)$$

fct(t) = fct(x) = const =C

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}B(t) = C\,B(t)}$$

B(t) est fonction propre de l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2}$ de valeur propre C

$$\boxed{B(t) = \hat{B}e^{-i\omega t}} \quad \Rightarrow -\omega^2\hat{B}e^{-i\omega t} = C\hat{B}e^{-i\omega t} \Rightarrow C = -\omega^2$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}A(x) = \frac{-\omega^2}{u^2}A(x)}$$

A(x) est fonction propre de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ de valeur propre $-\omega^2/u^2$

$$\boxed{A(x) = \hat{A}e^{ikx}} \quad \Rightarrow -k^2\hat{A}e^{ikx} = -\left(\omega^2/u^2\right)\hat{A}e^{ikx}$$

Modes et fréquences propres – Solution générale

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{u^2}}$$ **Relation de dispersion** 2 solutions possibles: $$\boxed{k = \pm\frac{\omega}{u}}$$

et la solution générale s'écrit comme superposition linéaire de ces 2 solutions

$$\boxed{f(x,t) = \hat{A}_1 \exp[i(kx - \omega t)] + \hat{A}_2 \exp[i(-kx - \omega t)]}$$

On peut aussi l'écrire comme:

$$\underbrace{\underbrace{\hat{A}_1 \exp\left[ik\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right]}_{\boxed{F(x-ut)}\ \text{progressive}} + \underbrace{\hat{A}_2 \exp\left[-ik\left(x + \frac{\omega}{k}t\right)\right]}_{\boxed{G(x+ut)}\ \text{rétrograde}}}_{\text{stationnaire}} = f(x,t)$$

$$\boxed{u = \frac{\omega}{k}}$$

Vitesse de phase

Modes et fréquences propres – conditions aux bords

- Pour l'exercice 7, on prend des conditions aux bord ***fixes à gauche et à droite***.
- On applique ces conditions aux bords à la solution générale.
- Cela conduit à une ***quantification*** des fréquences possibles, appelées ***fréquences propres.***
- La fonction spatiale correspondant à chaque fréquence propre est appelée fonction propre ou ***mode propre.***

Modes et fréquences propres – superposition

La **fonction propre** correspondant à cette fréquence propre ω_n est:

$$\boxed{f_n(x,t) = \hat{A}_n \underbrace{\sin(k_n x)}_{} \underbrace{\exp(-i\omega_n t)}_{}}$$

$$\hat{A}_n = |\hat{A}_n| e^{i\varphi_n} \in C$$

Dépendance spatiale de la fonction propre

Dépendance temporelle de la fonction propre: oscillation à la fréqeuce ω_n

L'équation d'onde étant linéaire, toute superposition linéaire de solutions est aussi une solution. Ainsi, la solution générale (mais satisfaisant les conditions aux bords) peut s'écrire comme superposition de modes propres:

$$\boxed{f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \sin(k_n x) \exp(-i\omega_n t)}$$

Les coefficients (complexes) A_n sont déterminés par les **conditions initiales**

Superposition de modes propres – conditions initiales

- Dans cet exemple, on prend des conditions aux initiales ***au repos***.

$$\begin{cases} f(x,0) = f_{init}(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{A}_n| \cos(\varphi_n) \sin(k_n x) = f_{init}(x) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -|\hat{A}_n| \sin(k_n x) \omega_n \sin(\varphi_n) = 0 \end{cases}$$

De la 2e éq, satisfaite pour tout x, on tire : $\sin(\varphi_n) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_n) = \pm 1 \equiv \sigma_n$

Et donc, on peut écrire la 1e Eq: $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n |\hat{A}_n| \sin(k_n x) = f_{init}(x)}$$

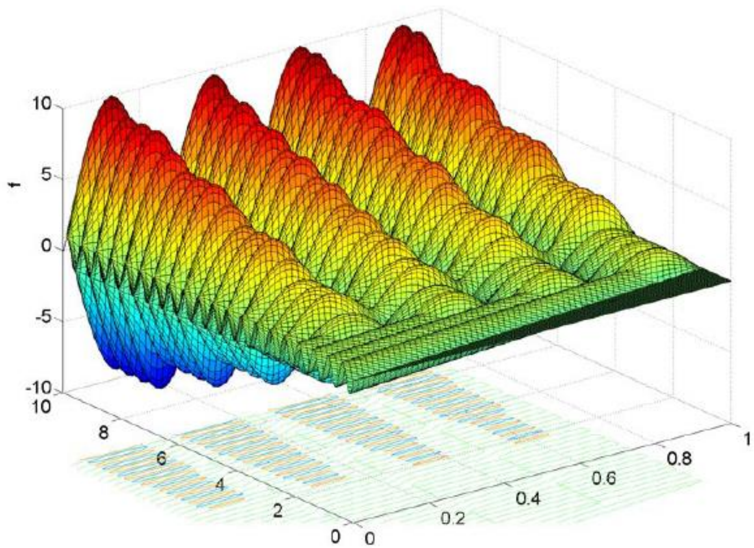
Les $\sigma_n|A_n|$ sont donc les **coefficients de la série de Fourier de f_{init}**

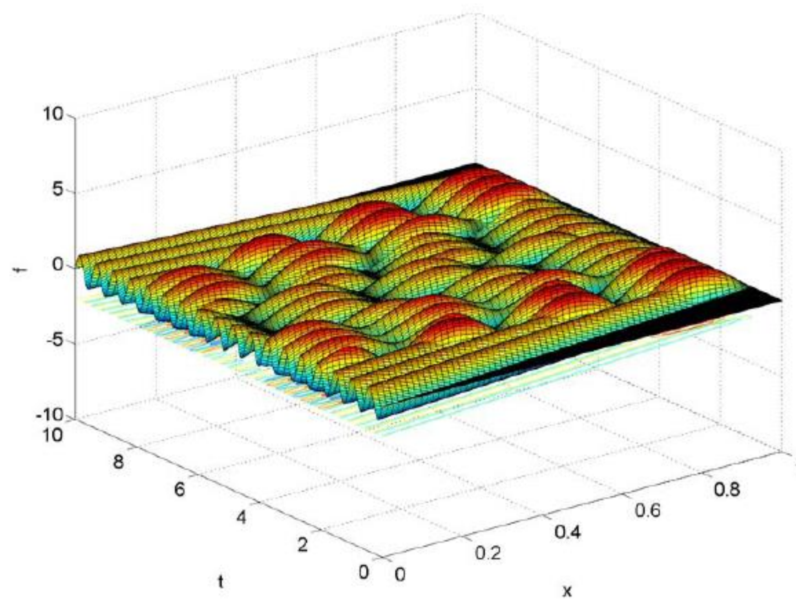
Démonstrations (simulations «live»)

- www.falstad.com
  - Math and Physics aplets
    - loadedstring
- Recherche de modes propres et fréquences propres par excitation résonante

Ondes - excitation

- **Recherche de modes propres**





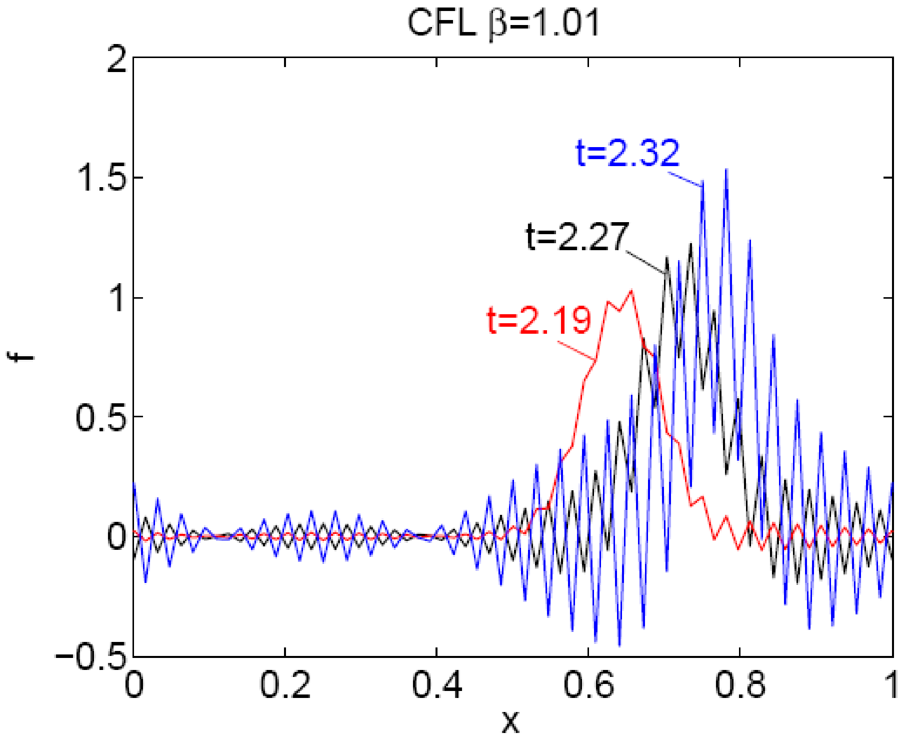
$$\omega = 4\frac{\pi u}{x_r - x_l}$$

$$\omega = 3.6\frac{\pi u}{x_r - x_l}$$

Ondes – instabilité numérique

- **4.2.2 Stabilité du schéma différences finies explicite 3 niveaux pour l’équation d’ondes**

Condition de stabilité CFL $\boxed{0 \leq \beta^2 \leq 1}$ $\boxed{\beta = u\dfrac{\Delta t}{\Delta x}}$

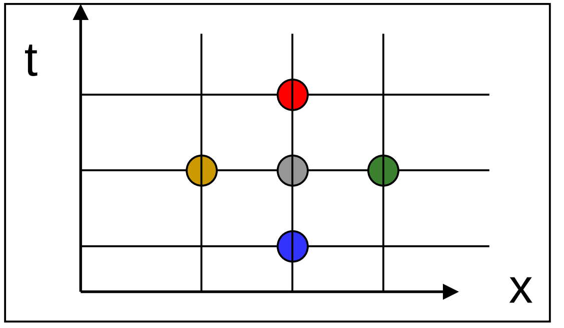


$\boxed{\beta = 1.01}$

Ondes – instabilité numérique

- Le mode instable est une ***oscillation*** dans l'espace (avec 2 pts de maillage x_i par longueur d'onde) et le temps (2 pts de maillage t_j par période) dont ***l'amplitude croît exponentiellement***
- On fera la démonstration au tableau du critère de stablilité CFL: analyse de ***Von Neumann – voir aussi section 4.2.2***

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité



$$\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f\left(x_i,t_{n+1}\right) \approx 2\left(1-\beta^2\right) f\left(x_i,t_n\right) - f\left(x_i,t_{n-1}\right) + \beta^2\left(f\left(x_{i+1},t_n\right) + f\left(x_{i-1},t_n\right)\right)$$

(4.43)

Ansatz: on cherche une solution de (4.43) de type ondulatoire, avec la possibilité d'avoir une amplitude exponentielle dans le temps

$$f\left(x_i,t_n\right) = \hat{f}\,\exp\left\{i\left(k x_i - \omega t_n\right)\right\},\ \hat{f} \in \mathrm{C}, k \in R, \quad \omega \in \mathrm{C} \quad (4.26)$$

On définit le «gain» G: $f\left(x_i,t_{n+1}\right) = G\, f\left(x_i,t_n\right), \quad G = e^{-i\omega\Delta t}$

Condition de stabilité: $|G| \leq 1, \forall k, \forall \omega$

Présentation au tableau

Ondes. Explicite 3 niveaux. Stabilité

Introduisant (4.26) dans (4.43) :

$$\hat{f} e^{i(kx_i - \omega(t_n+\Delta t))} = 2(1-\beta^2)\hat{f} e^{i(kx_i-\omega t_n)} - \hat{f} e^{i(kx_i-\omega(t_n-\Delta t))} + \beta^2\left[\hat{f} e^{i(k(x_i+\Delta x)-\omega t_n)} + \hat{f} e^{i(k(x_i-\Delta x)-\omega t_n)}\right]$$

En posant $G = e^{-i\omega\Delta t}$ (on note que $e^{+i\omega\Delta t} = \frac{1}{G}$), factorisant $\hat{f} e^{i(kx_i-\omega t_n)}$ et utilisant $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2\cos(k\Delta x) = 2\left(1-2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right)$ posant $\theta = \frac{k\Delta x}{2}$, on obtient :

$$G = 2 - 2\beta^2 - \frac{1}{G} + \beta^2(2 + 4\sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$G^2 - 2(1-2\beta^2\sin^2\theta)G + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$G = 1 - 2\beta^2\sin^2\theta \pm \sqrt{\Delta}, \text{ avec}$$

$$\Delta = (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 - 1 .$$

On rappelle que le critère de stabilité est $|G| \le 1$.

• Si $\beta^2 \le 1$, alors $\sin^2\theta \le 1 \Rightarrow 2\beta^2\sin^2\theta \le 2$

$\Rightarrow (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 \le 1 \Rightarrow \Delta \le 0$

et donc

$$G = 1 - 2\beta^2\sin^2\theta \pm i\sqrt{1-(1-2\beta^2\sin^2\theta)^2}$$

$$\Rightarrow |G|^2 = (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2 + 1 - (1-2\beta^2\sin^2\theta)^2$$

$$\Rightarrow |G|^2 = 1, \forall\theta \Rightarrow \text{STABLE}$$

• Si $\beta^2 > 1$, alors, pour $\sin\theta = 1$,

$$\Delta = (1-2\beta^2)^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow G = 1 - 2\beta^2 \pm \sqrt{\Delta}$$

On a $1-2\beta^2 < -1$, et en prenant la solution $-\sqrt{\Delta}$, on a $G < -1$, et donc $|G| > 1 \Rightarrow$ INSTABLE

Ondes, schéma explicite 3 niveaux - stabilité

$$\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta^2 \leq 1,\ |G|^2 = 1 \Rightarrow \text{stable}}$$

$$\boxed{\text{Si } \beta^2 > 1, \text{ alors, pour } \sin^2\theta = 1, G < -1 \Rightarrow \text{instable}}$$

$$\theta = k\,\Delta x / 2 \qquad \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{k\Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2\pi/\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2\Delta x}$$

- 2 points de maillage par longueur d'onde, c'est bien ce que l'on a observé sur les simulations instables!