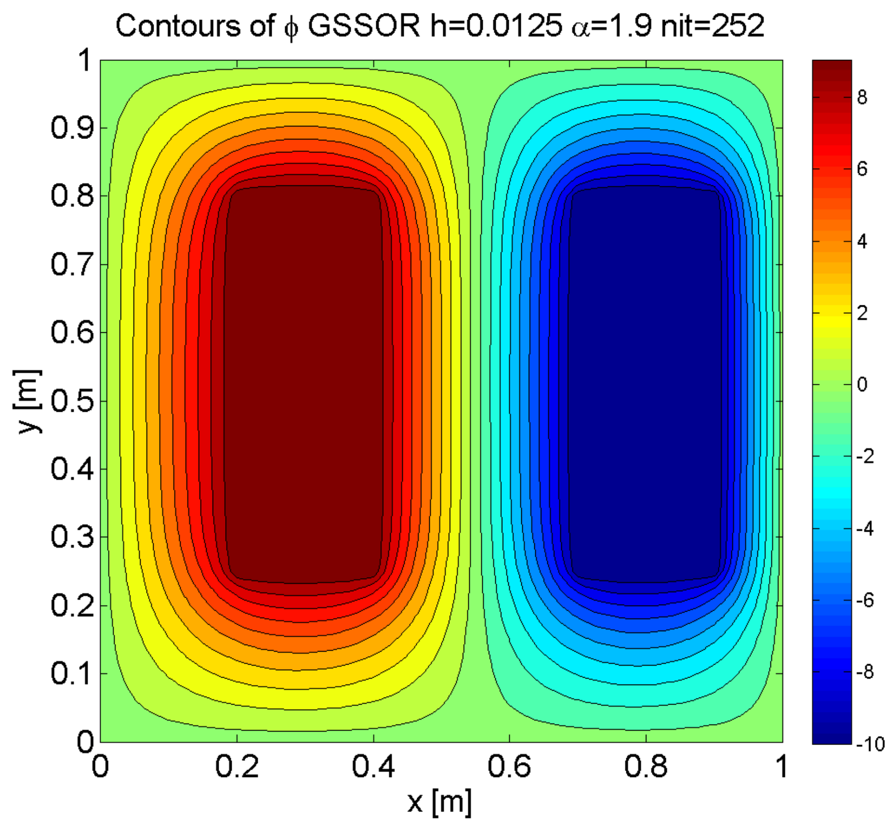
Physique Numérique I-II semaine 20

- Ex.6: 3e et dernière session
- Quiz Electrostatique
- Différences finies centrées ou non
- **4.2 Ondes**
  - **4.2.1 Milieu homogène**
    - Schéma différences finies explicite 3 niveaux
    - Conditions initiales, conditions aux limites
  - **4.2.2 Stabilité: analyse de Von Neuman**
  - **4.2.3 Milieu inhomogène**
    - **Ondes en eaux «peu profondes»**
  - **Exercice 7, dès la semaine prochaine**

Exemple: 2D, électrodes rectangulaires



Champ électrique – Loi de Gauss
Champ électrique – Loi de Faraday

- Simulations faites en cours et démos au tableau
- Quizz
  - Que vaut $\nabla^2\phi$ sur $\partial\Omega$?
  - Que vaut $\vec{E}$ sur $\partial\Omega$?
  - Où sont les charges $\rho(\vec{x})$?
  - Le champ $\vec{E}$ est nul en dehors de la boîte. Donc la somme des charges à l'intérieur est nulle. Vrai ou faux?
  - Si $V_a = -V_b$, alors $Q_a = -Q_b$. Vrai ou faux?
  - Si on déplace une électrode, par exemple (a), en gardant V_a et V_b constants, les charges sur les électrodes changent-elles? Et comment? (1): Seulement Q_a ? (2) Q_a et Q_b avec $Q_a + Q_b = \text{const}$
  - …

4.2 Ondes

- **4.2.1 Milieu homogène 1D** perturbation $f(x,t)$
  - **EDP d'Alembert**

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

  - **Solution générale**

$$f(x,t) = \underbrace{F(x - |u|t)}_{\textit{progressive}} + \underbrace{G(x + |u|t)}_{\textit{rétrograde}}$$

  - **Obtenir une solution unique dans le domaine $[x_l, x_r]$ requiert 2 conditions initiales et 2 conditions aux bords**

Ondes – schéma numérique

- **Schéma différences finies explicite 3 niveaux**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

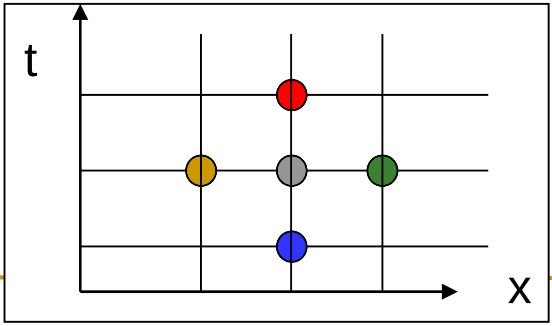
Discrétisation {(xi,tj)}

$$f_j'' = \frac{1}{h^2}\left(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}\right) + \mathcal{O}(h^2) \tag{A.21}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1}) - 2f(x_i,t_n) + f(x_i,t_{n-1})}{(\Delta t)^2} \approx u^2 \left(\frac{f(x_{i+1},t_n) - 2f(x_i,t_n) + f(x_{i-1},t_n)}{(\Delta x)^2}\right) \tag{4.40}$$

$$\boxed{\beta = u\frac{\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{f(x_i,t_{n+1}) \approx 2\left(1-\beta^2\right) f(x_i,t_n) - f(x_i,t_{n-1}) + \beta^2\left[f(x_{i+1},t_n) + f(x_{i-1},t_n)\right]} \tag{4.42}$$



Ondes - Conditions initiales

- Eq. du 2e ordre en temps → 2 conditions initiales requises
  - (1) $f(x,0) = f_{init}(x)$ donné
  - (2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x)$ donné
- Dans le schéma différences finies: on a besoin de connaître *f* au temps t=0 *et au temps t=-Δt* pour initialiser l'algorithme
  - (1) $f_{i,0} = f_{init}(x_i)$
  - (2) $\dfrac{f_{i,0} - f_{i,-1}}{\Delta t} = g_{init}(x_i) \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) - g_{init}(x_i)\Delta t$

Ondes – conditions initiales (suite)

- Cas (a): système au repos pour t<=0

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x) = 0 \Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i)$$

- Cas (b): onde progressive $f(x,t) = F(\xi) = F(x - |u|t)$

$$f(x,-\Delta t) = F(x + |u|\Delta t) = f_{init}(x + |u|\Delta t)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i + |u|\Delta t)$$

  - *Autre méthode:*

$$f(x,t) = F(\xi) = F(x - |u|t) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = g_{init}(x) = -|u|F'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = F' \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -|u|\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = f_{init}(x_i) + |u|\Delta t \frac{df_{init}}{dx}(x_i) \approx f_{init}(x_i + |u|\Delta t)$$

- Cas (c): onde rétrograde: similaire, mais G(x+|u|t) …

Ondes – conditions aux limites

- Eq. Diff. 2e ordre en x → 2 conditions aux limites: bord gauche et bord droite
- Cas 1. Bord g. fixe $f(x_L,t)=C\,,\forall t \Rightarrow f_{0,j}=C,\forall j$
- Cas 2. Bord g. «libre»
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_L,t)=0,\forall t \Rightarrow \frac{f_{1,j}-f_{0,j}}{\Delta x}=0 \Rightarrow f_{0,j}=f_{1,j},\forall j$$
- Cas 3: périodique; $f_{N+1,j}=f_{0,j},\forall j$
- Cas 4: excitation sinusoïdale : en exercice
- Cas 5. Sortie de l'onde
  - au bord gauche → onde rétrograde au bord gauche
  - au bord droite → onde progressive au bord droite

Conditions aux limites (sortie au bord gauche)

$$f(x,t) = G(x + |u| t), \forall x \text{ au voisinage de } x_L, \forall t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x_L, t) = |u| G' = |u| \frac{\partial f}{\partial x}(x_L, t), \forall t$$

$$\Rightarrow \frac{f_{0,j+1} - f_{0,j}}{\Delta t} = |u| \frac{f_{1,j} - f_{0,j}}{\Delta x}, \forall j$$

$$\Rightarrow f_{0,j+1} = f_{0,j} + \frac{|u| \Delta t}{\Delta x}(f_{1,j} - f_{0,j}), \forall j$$

- Sortie de l'onde au bord droite: similaire, imposer une onde purement progressive
- NB: $\forall j$ → les conditions aux limites doivent être appliquées à chaque pas de temps

Ondes en milieu homogène, 1D

- Quelques démonstrations en «live»
  - Initialisation: immobile, progressive, rétrograde
  - Conditions aux limites: fixes, «libres», sortie
  - Réflexions
  - Superpositions
  - Ondes stationnaires, modes propres, fréquences propres
  - Excitation résonante
  - …

Exercice 7: ondes, milieu inhomogène

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(x)$

Vagues en eau peu profondes – Annexe E

$$u^2(x) = g\, h_0(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - u^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2(x) \frac{\partial}{\partial x} f \right) = 0 \quad (B)$$

Laquelle de ces équations est-elle correcte?

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2(x)\, f \right) = 0 \quad (C)$$

Cela fait-il une différence sur la propagation du tsunami?

Ondes en milieu inhomogène: $u^2(x)$

- Les Eqs. (B) et (C) comportent des termes additionnels de 1e , respectivement 2e dérivée de $u^2(x)$. On utilisera les différences finies centrées pour ces termes:

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x} \approx \frac{(u^2{}_{i+1} - u^2{}_{i-1})}{2\Delta x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}x^2} \approx \frac{(u^2{}_{i+1} - 2u^2{}_i + u^2{}_{i-1})}{(\Delta x)^2}$$

Ondes en milieu inhomogène 2D: $u^2(x,y)$

(Ex.7, facultatif)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \nabla \cdot (u^2 \nabla f)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - g(x_{i-1}, y_j)}{2h_x},$$

Pour $g=u^2$ ou $g=f$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - g(x_i, y_{j-1})}{2h_y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_{i+1}, y_j) - 2g(x_i, y_j) + g(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{g(x_i, y_{j+1}) - 2g(x_i, y_j) + g(x_i, y_{j-1})}{h_y^2} \tag{3}$$