

# Physique Numérique I-II semaine 19

- Forme variationnelle: petit quiz...
- 3.2 Equations aux Dérivées Partielles (EDP)
  - Exemple de l'équation de Poisson (cas du vide: Laplace) avec conditions aux limites
  - Différences finies. EDP  $\rightarrow$  système algébrique linéaire
  - Résolution par méthodes itératives: Jacobi, Gauss-Seidel, *surrelaxation (SOR)*, ...
  - Convergence **s**: itérations et taille du maillage
  - Coût de l'algorithme et taille du maillage
- **Notes de cours: 3.2.1 - 3.2.3, 3.3.1 - 3.3.2**

# Electrostatique dans le vide. Ex.6.2 (c)

## Forme variationnelle: un petit quiz...

- Eq. de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \Omega \mid_{\partial\Omega}$$

- Conditions aux limites:  $\phi(\vec{x}) = V(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \partial\Omega$

- Cas 1D, cartésien:  $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \forall x \in ]a, b[, \phi(a) = V_a, \phi(b) = V_b$
- Forme variationnelle après intégration par parties:

$$\int_a^b \frac{d\eta}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = 0, \forall \eta \quad \text{Soit } g = \frac{d\eta}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b g \frac{d\phi}{dx} dx = 0, \forall g \quad \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = 0, \forall x \quad ???????$$

# Indication pour l'Ex.6 (d) (ii)

Ex. 6 (d) (ii) vérifier  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \sigma_{\text{lib}}$

Avec  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ ,  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$  :  $-\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{\nabla} \phi) = \sigma_{\text{lib}} / \epsilon_0$

Coordonnées cylindriques :

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \epsilon_r(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \sigma_{\text{lib}}(r) / \epsilon_0$$

éléments finis :  $\frac{d\phi}{dr} = \sum_j \phi_j \frac{d\Lambda_j}{dr}$

Def  $\alpha(r) = r \epsilon_r \frac{d\phi}{dr}$ .

Évaluer  $\alpha$  aux points milieux des intervalles

$$r_{\text{mid},k} = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}$$

Pour évaluer  $\frac{d\alpha}{dr}$ , utiliser les différences finies centrées

aux milieux des points milieux,  $r_{\text{midmid},\kappa} = \frac{r_{\text{mid},\kappa} + r_{\text{mid},\kappa+1}}{2}$

$$\frac{d\alpha}{dr}(r_{\text{midmid},\kappa}) \approx \frac{\alpha(r_{\text{mid},\kappa+1}) - \alpha(r_{\text{mid},\kappa})}{r_{\text{mid},\kappa+1} - r_{\text{mid},\kappa}}$$

Comparer ensuite :  $\frac{1}{r_{\text{midmid},\kappa}} \frac{d\alpha}{dr}(r_{\text{midmid},\kappa}) \stackrel{?}{=} \sigma_{\text{lib}}(r_{\text{midmid},\kappa}) / \epsilon_0$

# Electrostatique dans le vide

## Différences finies

- Eq. de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \Omega \mid_{\partial\Omega}$$

- Conditions aux limites:  $\phi(\vec{x}) = V(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \partial\Omega$

- Différences finies, cf. Annexe (A.7)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} \approx \frac{1}{h_x^2} (\phi_{i-1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k})$$

- Cas 3D, cas  $h_x = h_y = h_z$ :

$$\phi_{i,j,k} = \frac{1}{6} (\phi_{i-1,j,k} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k-1} + \phi_{i,j,k+1})$$

- Le potentiel en chaque point de maillage est la moyenne des valeurs du potentiel aux plus proches voisins

# Méthodes itératives – 1: Jacobi

- Initialiser les valeurs aux points intérieurs de maillage  $\phi_{ijk}$  à des valeurs arbitraires et les valeurs aux points sur les bords selon les conditions aux limites.
- Calculer le résidu  $r$  (\*)
- Boucle itération numéro  $l$ , (while  $r > p$ )
  - Boucle sur les points de maillage intérieurs  $(i,j,k)$

$$\phi_{i,j,k}^{(l+1)} = \frac{1}{6} \left( \phi_{i+1,j,k}^{(l)} + \phi_{i-1,j,k}^{(l)} + \phi_{i,j+1,k}^{(l)} + \phi_{i,j-1,k}^{(l)} + \phi_{i,j,k+1}^{(l)} + \phi_{i,j,k-1}^{(l)} \right)$$

- Boucle sur les points de maillage intérieurs  $(i,j,k)$ 
  - Calculer le résidu  $r$  (\*)

$$(*) \text{ Par exemple, } r = \max_{i,j,k} \left| \phi_{ijk} - \frac{1}{6} \left( \phi_{i\pm 1,j,k} + \phi_{i,j\pm 1,k} + \phi_{i,j,k\pm 1} \right) \right|$$

# Methodes itératives – 2: Gauss-Seidel

- Initialiser les valeurs aux points intérieurs de maillage  $\phi_{ijk}$  à des valeurs arbitraires et les valeurs aux points sur les bords selon les conditions aux limites.
- Calculer le résidu  $r$  (\*)
- Boucle itération numéro  $l$ , (while  $r > p$ )
  - Boucle sur les points de maillage intérieurs  $(i,j,k)$

$$\phi_{i,j,k}^{(l+1)} = \frac{1}{6} \left( \phi_{i+1,j,k}^{(l)} + \phi_{i-1,j,k}^{(l+1)} + \phi_{i,j+1,k}^{(l)} + \phi_{i,j-1,k}^{(l+1)} + \phi_{i,j,k+1}^{(l)} + \phi_{i,j,k-1}^{(l+1)} \right)$$

- Boucle sur les points de maillage intérieurs  $(i,j,k)$ 
  - Calculer le résidu  $r$  (\*)

$$(*) \text{ Par exemple, } r = \max_{i,j,k} \left| \phi_{ijk} - \frac{1}{6} \left( \phi_{i\pm 1,j,k} + \phi_{i,j\pm 1,k} + \phi_{i,j,k\pm 1} \right) \right|$$

# Accélération des méthodes itératives - Gauss-Seidel avec Surrelaxation (SOR)

- Initialiser toutes les valeurs aux points de maillage,  $\phi_{ijk}$
- Calculer le résidu  $r$
- Boucle while  $r > p$ 
  - Boucle sur les points de maillage  $(i,j,k)$

$$\phi_{i,j,k}^{(*)} = \frac{1}{6} \left( \phi_{i+1,j,k}^{(l)} + \phi_{i-1,j,k}^{(l+1)} + \phi_{i,j+1,k}^{(l)} + \phi_{i,j-1,k}^{(l+1)} + \phi_{i,j,k+1}^{(l)} + \phi_{i,j,k-1}^{(l+1)} \right)$$

$$\phi_{i,j,k}^{(l+1)} = \phi_{i,j,k}^{(l)} + \alpha \left( \phi_{i,j,k}^{(*)} - \phi_{i,j,k}^{(l)} \right)$$

- Boucle sur les points de maillage  $(i,j,k)$ 
    - Calculer le résidu  $r$
- $\alpha=1$  : Gauss-Seidel;  $1 < \alpha < 2$  : surrelaxation
- Converge si  $0 < \alpha < 2$       **testons!**

# Accélération des méthodes itératives - Jacobi avec Surrelaxation (SOR)

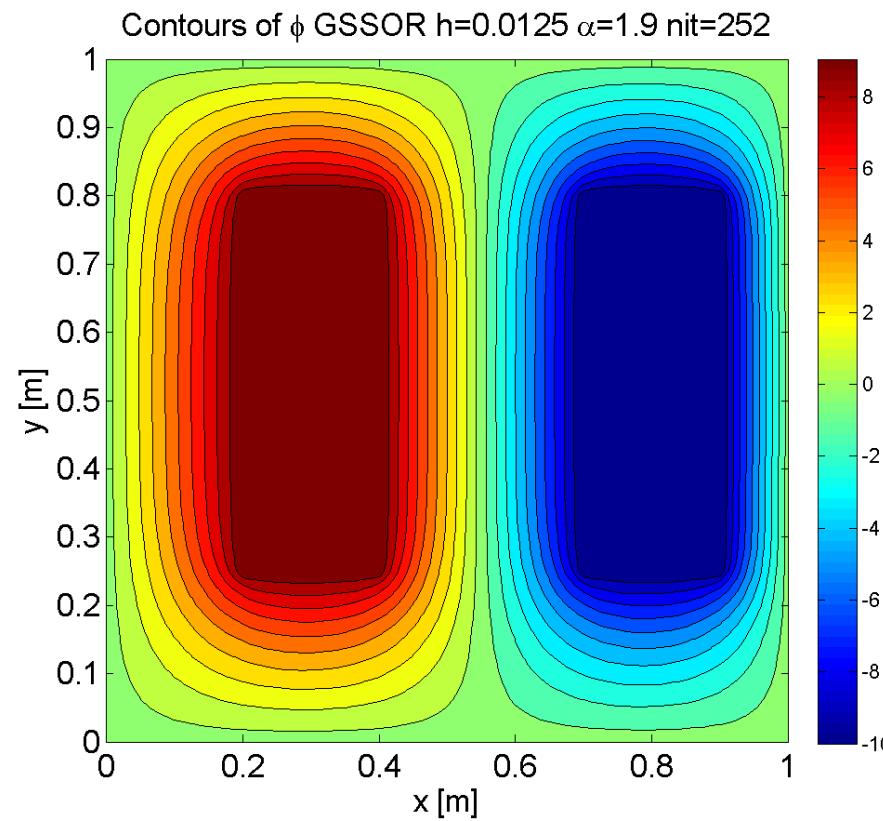
- Initialiser toutes les valeurs aux points de maillage,  $\phi_{ijk}$
- Calculer le résidu  $r$
- Boucle while  $r > p$ 
  - Boucle sur les points de maillage  $(i,j,k)$

$$\phi_{i,j,k}^{(*)} = \frac{1}{6} \left( \phi_{i+1,j,k}^{(l)} + \phi_{i-1,j,k}^{(l)} + \phi_{i,j+1,k}^{(l)} + \phi_{i,j-1,k}^{(l)} + \phi_{i,j,k+1}^{(l)} + \phi_{i,j,k-1}^{(l)} \right)$$

$$\phi_{i,j,k}^{(l+1)} = \phi_{i,j,k}^{(l)} + \alpha \left( \phi_{i,j,k}^{(*)} - \phi_{i,j,k}^{(l)} \right)$$

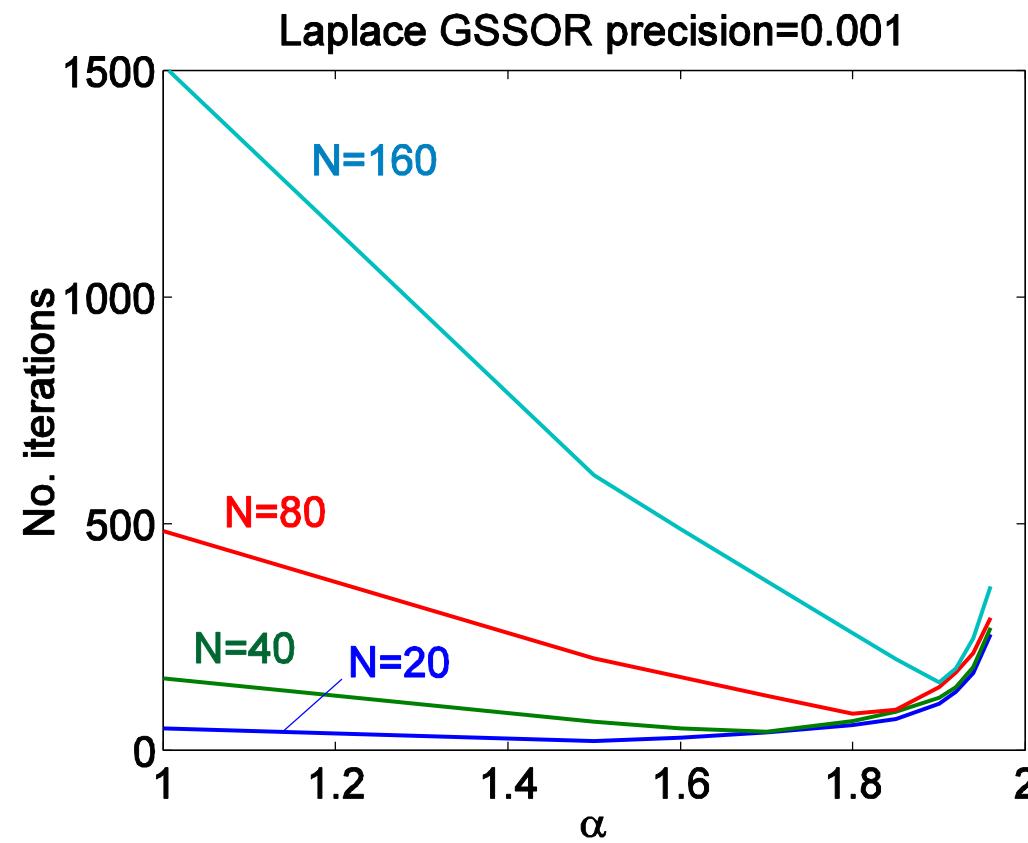
- Boucle sur les points de maillage  $(l,j,k)$ 
    - Calculer le résidu  $r$
- $\alpha=1$  : Jacobi;  $1 < \alpha$  : surrelaxation: DIVERGE!!!
- *testons! La preuve formelle cf. 4.1.3 pour le cas 1D spatial.*

## ■ Exemple: 2D, électrodes rectangulaires



# Optimisation de SOR - 1

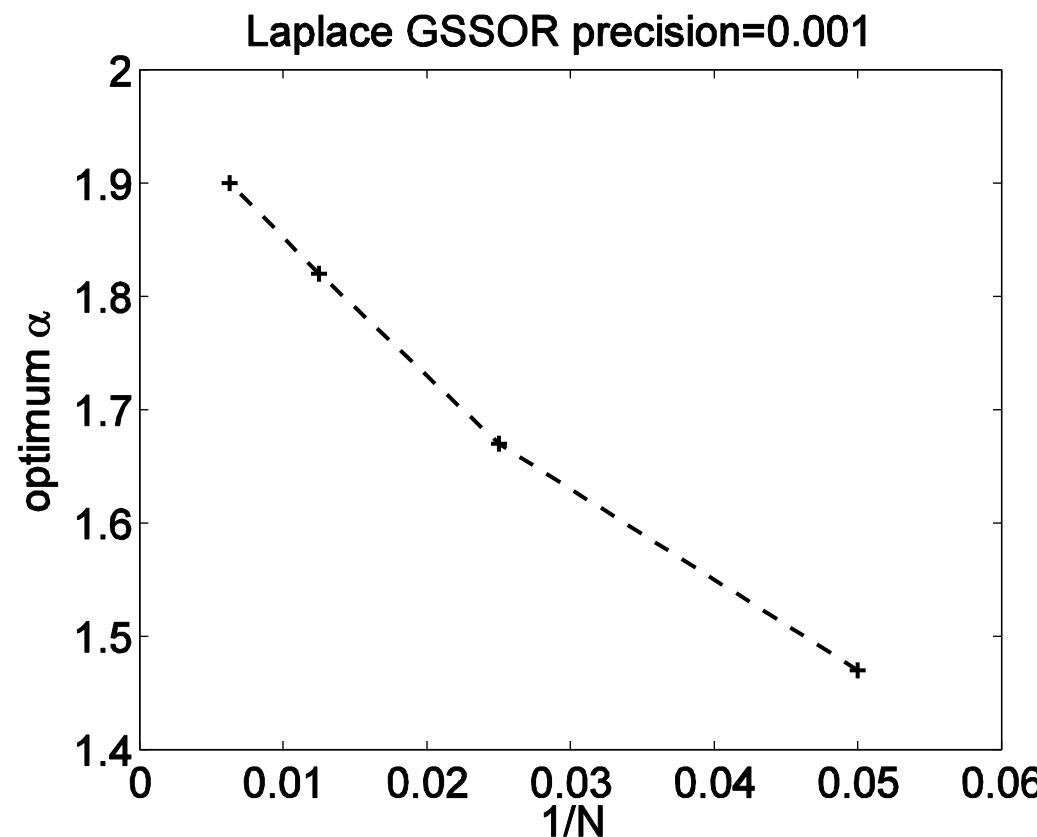
2D



- Niter dépend de la taille du maillage  $N$  et de  $\alpha$

# Optimisation de SOR - 2

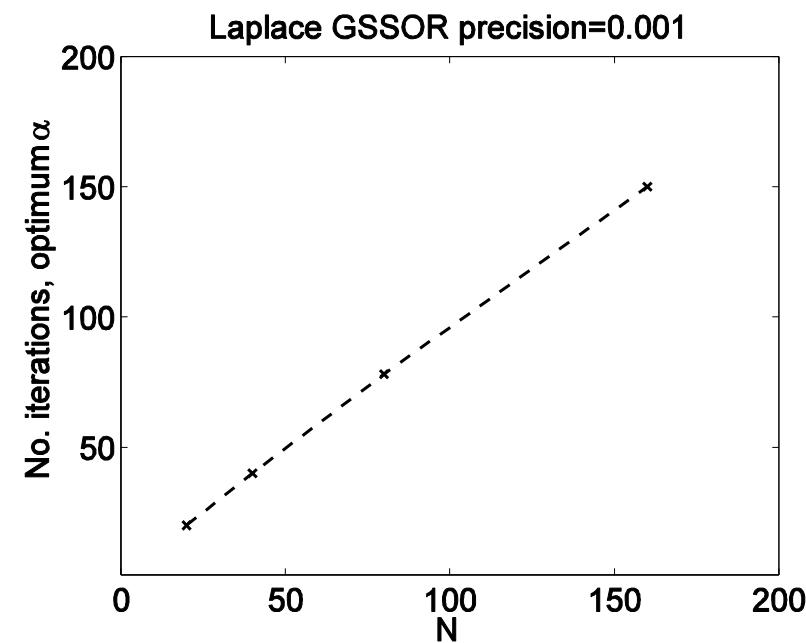
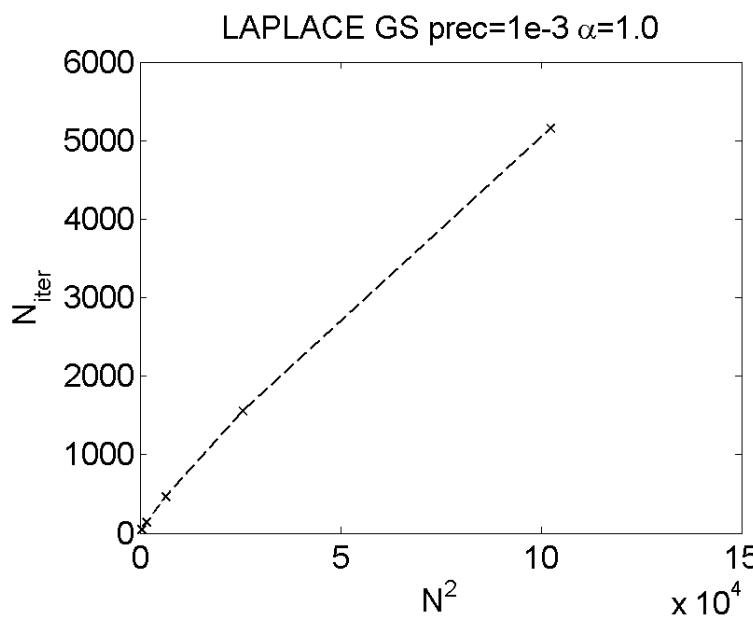
2D



- La valeur optimale de  $\alpha$  dépend de  $N$

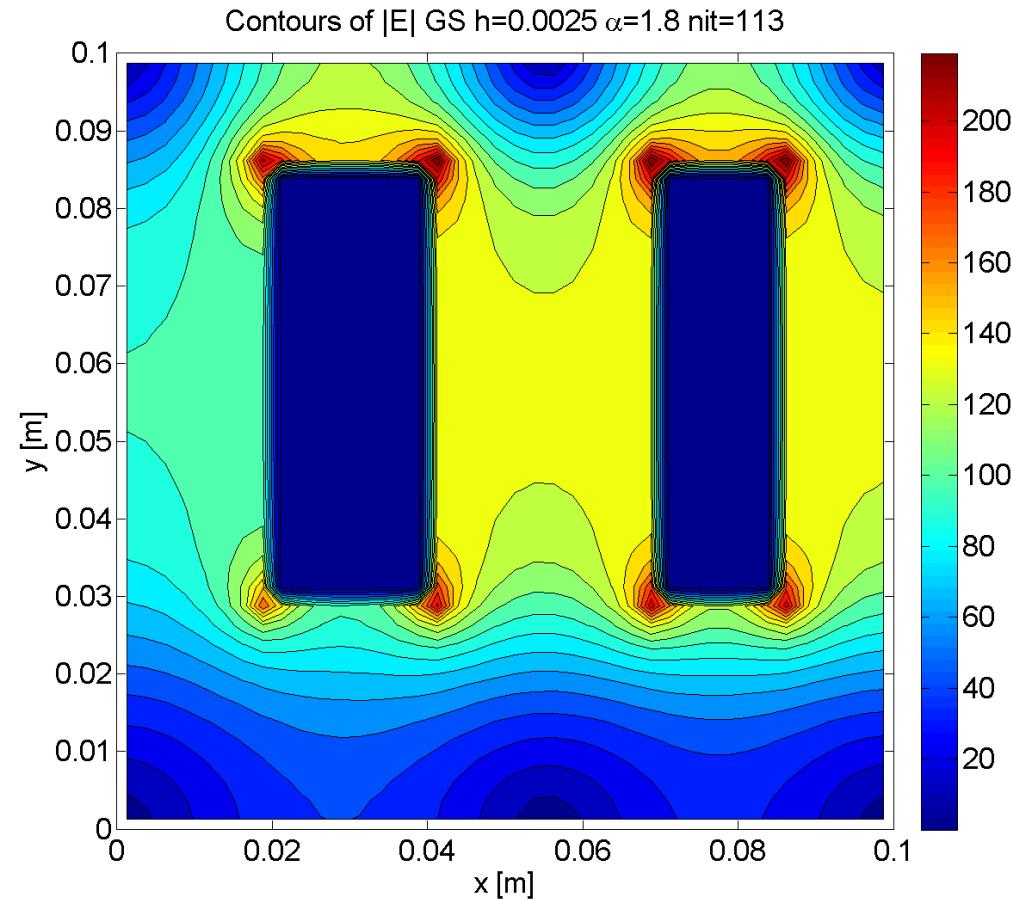
# Optimisation de SOR - 3

2D  $N \times N$



- Le nombre d'itérations requises pour une précision donnée augmente **linéairement** avec la taille du maillage ( $N$ ) *lorsqu'on choisit chaque fois le paramètre  $\alpha$  à l'optimum*
- Alors que sans SOR, Niterations augmente **quadratiquement** ( $N^2$ )
- SOR diminue le « coût » de l'algorithme d'un ordre de grandeur! Chaque itération coûte  $\sim N^2$  opérations, donc le coût total  $N^4$  (sans SOR)  $\rightarrow N^3$  (avec SOR  $\alpha$  optimal)

# Champ électrique – Effet de pointe

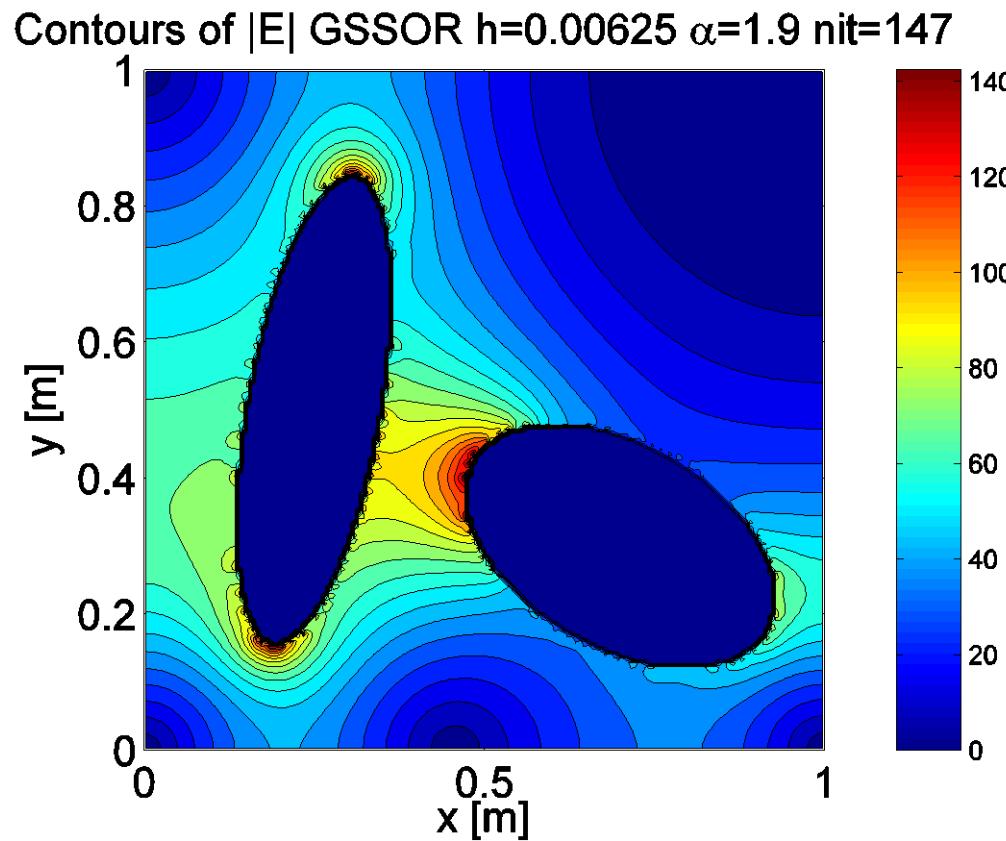


L'intensité du champ E est très grande aux angles de la surface...  
... en fait, le champ E est **singulier** aux angles de la surface

# Champ E – effet de pointe numérique

## Laplacien 2-D

Problème des différences finies sur un maillage cartésien pour des surfaces non alignées avec les lignes de coordonnées



# Champ électrique – Loi de Gauss

# Champ électrique – Loi de Faraday

- Simulations faites en cours et démos au tableau
- Quizz
  - Que vaut  $\nabla^2 \phi$  sur  $\partial\Omega$  ?
  - Que vaut  $\vec{E}$  sur  $\partial\Omega$  ?
  - Où sont les charges  $\rho(\vec{x})$  ?
  - Le champ  $\vec{E}$  est nul en dehors de la boîte. Donc la somme des charges à l'intérieur est nulle. Vrai ou faux?
  - Si  $V_a = -V_b$ , alors  $Q_a = -Q_b$ . Vrai ou faux?
  - Si on déplace une électrode, par exemple (a), en gardant  $V_a$  et  $V_b$  constants, les charges sur les électrodes changent-elles? Et comment? (1): Seulement  $Q_a$ ? (2)  $Q_a$  et  $Q_b$  avec  $Q_a + Q_b = \text{const}$
  - ...