Physique Numérique I-II semaine 15

Advection:

- Transport (de matière, ou de chaleur, ou…)
- Illustration: particules de fumée emportées par le vent
- Décrite par un champ de vitesse v (vitesse d'advection)
- Flux (#particules par unité de surface et par unité de temps)

$$\vec{j} = n\,\vec{v}$$

Diffusion:

- Transport (de matière, ou de chaleur, ou…)
- Illustration: particules de fumée emportées même en l'absence de vent
- Description microscopique: mouvement Brownien
- Description macroscopique: coefficient de diffusion D
- Flux $\vec{j} = -D\nabla n$

Physique Numérique I-II semaine 15

Conservation de la quantité transportée:

- Décrite par une équation de continuité

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot \vec{\mathrm{j}} = 0$$

Equation d'Advection-Diffusion:

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot (n\vec{v} - D\nabla n)$$

Physique Numérique I-II semaine 15

Diffusion:

- Euler ou Lagrange? Radar ou mouchard?
- Approche « Monte Carlo »: marche aléatoire ou approche de Langevin

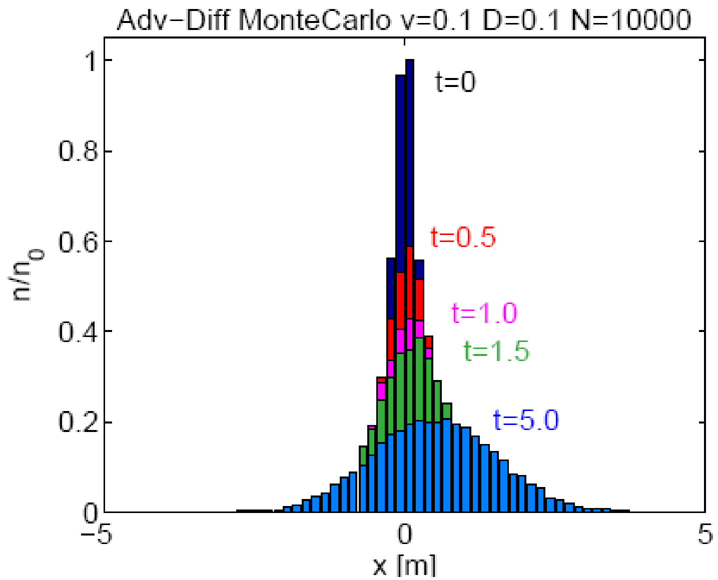
Soit R une variable aléatoire de moyenne 0 et de variance 1

$$\boxed{x_{i,j+1} = x_{i,j} + v\Delta t + R\sqrt{2D\Delta t}}$$

Tend vers une Gaussienne de moyenne $\boxed{< x > (t) = x_0 + vt}$

et d'écart-type $\boxed{\sigma(t) = \sqrt{2Dt}}$

Pas de limite de stabilité CFL, mais **convergence lente (en $1/N^{1/2}$)**



Physique Numérique I-II semaine 15

- La relation entre les descriptions macroscopique et microscopique, ainsi que l'algorithme Langevin – Monte Carlo seront présentés au tableau et illustrés par des exemples de simulation.
- Cela servira directement à l'Exercice 5 qui commence aujourd'hui.
- Notes de cours: **4.1.4** et **Annexe D**

Exercice 5

- On considère un système homogène dans l'espace x (1D)
- On regarde la distribution des vitesses des particules (→ histogramme en function de la vitesse)
- Collisions entre particules → changement de leur vitesse
- Ce changement est dû à deux facteurs:
  - 1) une «friction», qui tend à ramener les particules vers une même vitesse donnée vc → "advection en vitesse" (=accélération)

$$a(v) = -\gamma(v - v_c)$$

  - 2) une diffusion, décrite par un coefficient constant D
- L'équation d'advection-diffusion devient:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left(a(v)\, f(v,t) - D\frac{\partial f(v,t)}{\partial v}\right) = 0$$

- Et le schéma de Langevin:

$$v_{i,j+1} = v_{i,j} + a(v_i)\Delta t + R\sqrt{2D\Delta t}$$

Physique Numérique I-II semaine 16

4.1.2 Advection et Diffusion

Différences finies

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0}\,. \qquad (4.19)$$

Paramètre CFL : $\beta = v\frac{\Delta t}{\Delta x}$ $\qquad \alpha = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$

Courant-Friedrichs-Lewy

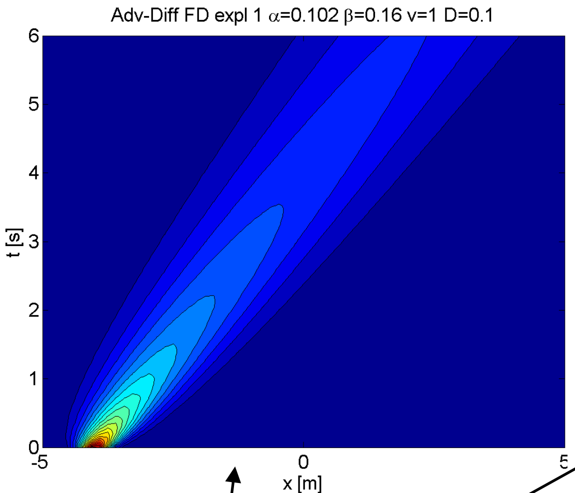
$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \beta\left(n_{i,j} - n_{i-1,j}\right) + \alpha\left(n_{i-1,j} - 2n_{i,j} + n_{i+1,j}\right)$$

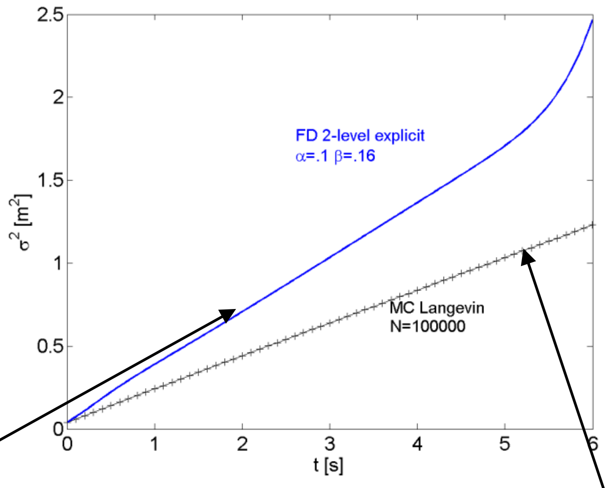
- **Il peut y avoir instabilité numérique!**
- **Le schéma explicite upwind pour l'advection stabilise, mais introduit de la diffusion numérique**
- **Conditions de stabilité**

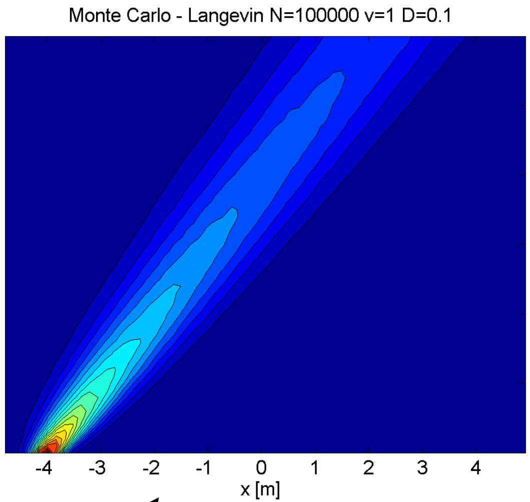
$$\boxed{0 \le \beta \le 1} \qquad \boxed{0 \le \alpha \le \frac{1}{2}}$$

Euler ou Lagrange? Radar ou mouchard?

Comparaison entre schéma numérique «Eulérien» et schéma numérique «Lagrangien» ou «particle»

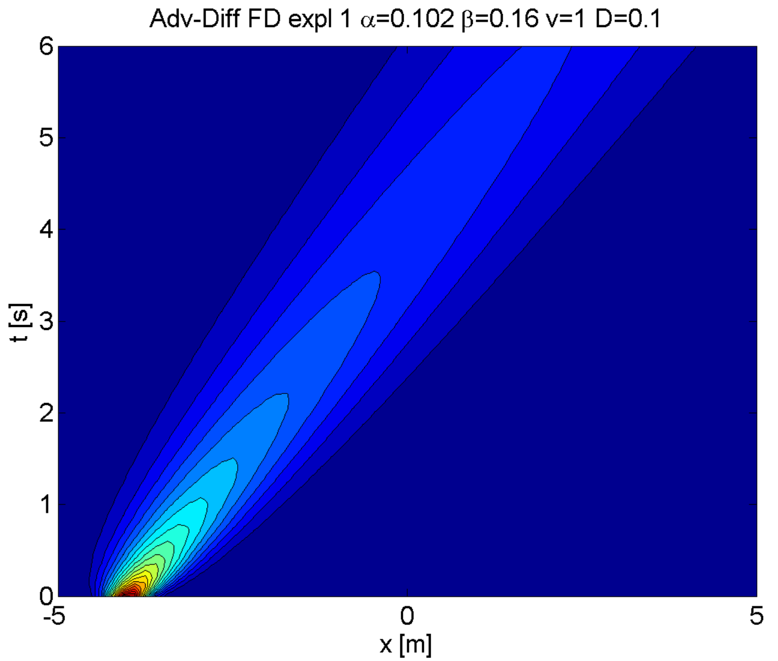


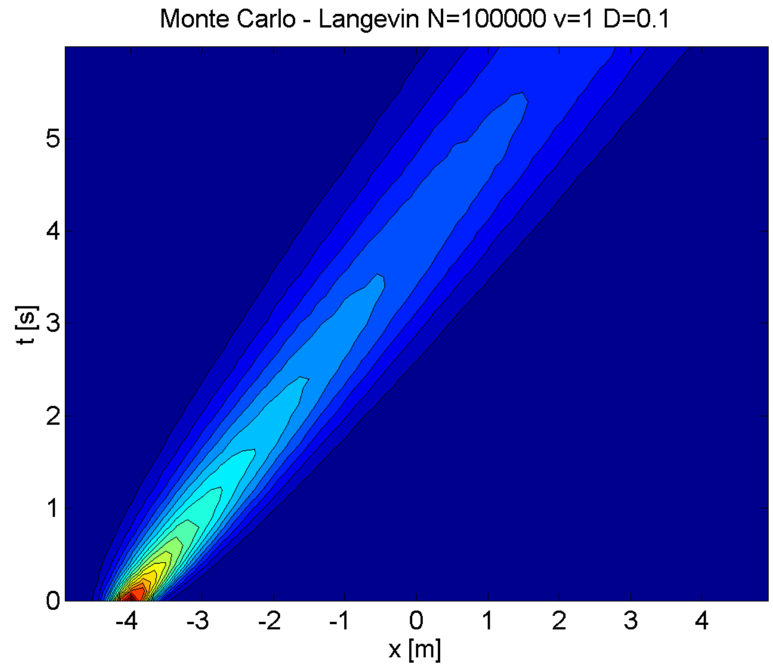


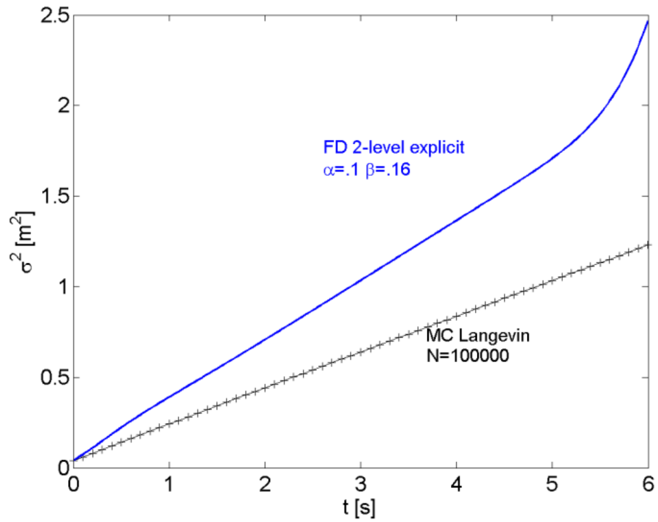


Eulerien, différences finies explicite 2 niveaux
Limite de stabilité
Diffusion numérique

Lagrangien, Langevin: Pas de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité CFL! (Δt arbitraire)







Langevin: pas de diffusion numérique
Pas de limite de stabilité CFL! (Δt arbitraire)