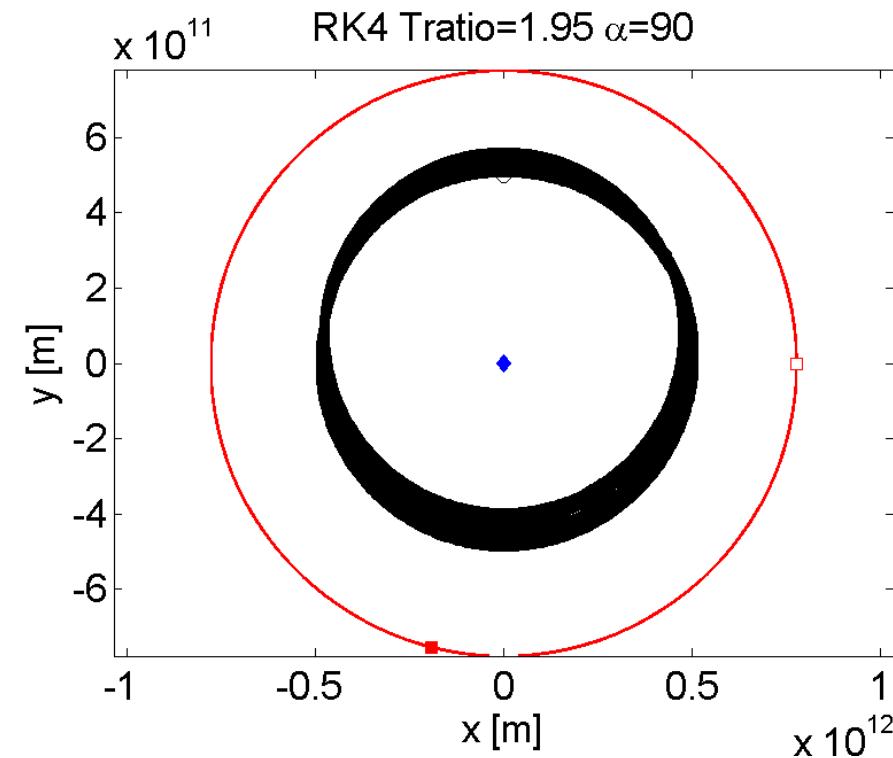
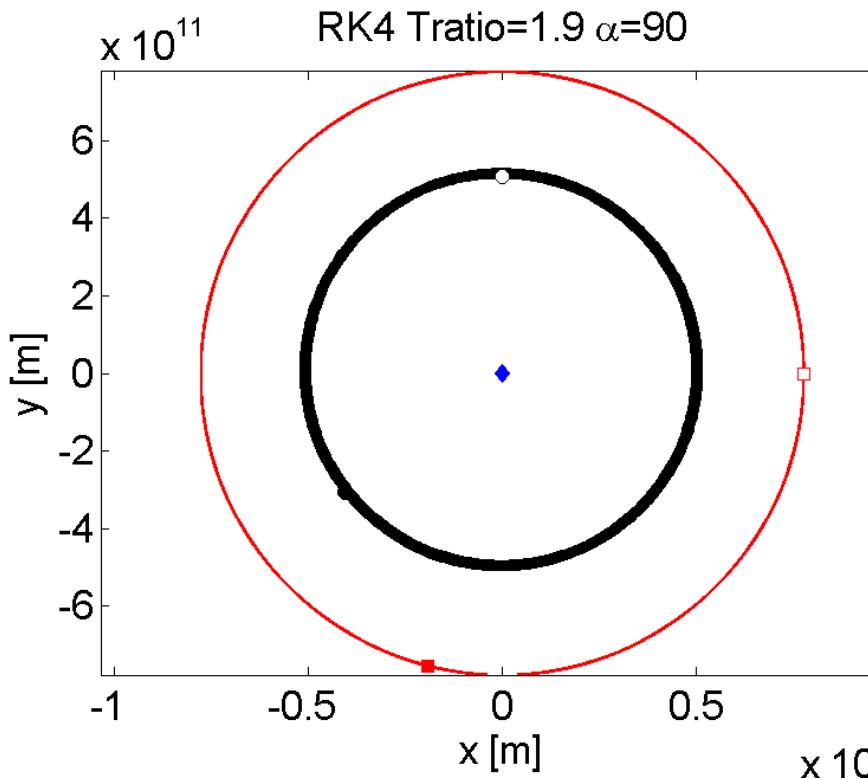


Physique Numérique I semaines 13-14

- Problème à 3 corps « réduit »
 - Astéroïdes: effet de Jupiter, Kirkwood gaps
 - Anneaux de Saturne, gaps
 - Points de Lagrange: planète X, tremplin spatial
- Rotation solide rigide + gravitation
- Problèmes spatiaux 1D à valeurs aux bords, traités comme problèmes à valeurs initiales.
 - Densité, température, pression atmosphère
 - Densité, température, pression dans le soleil
 - Singularités des équations: que faire? Quelles conséquences pour la numérique?

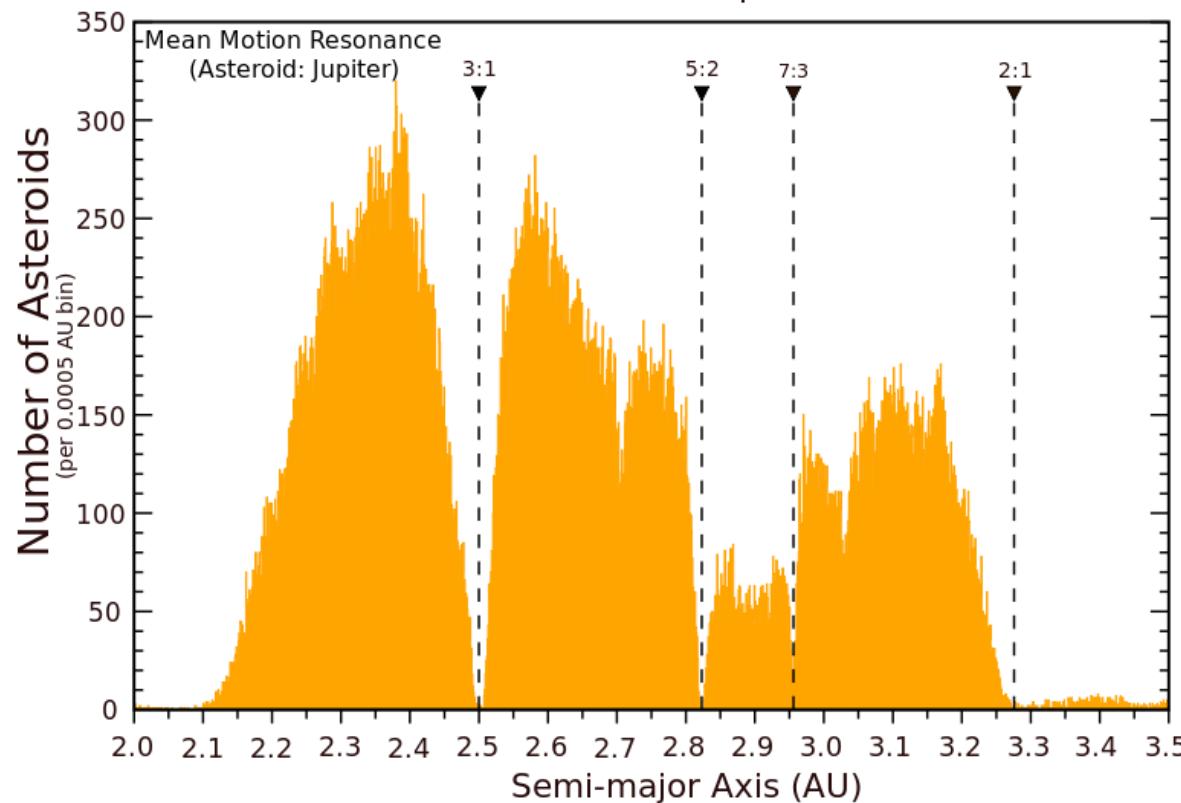
Orbites des astéroïdes autour du soleil. Effet de Jupiter



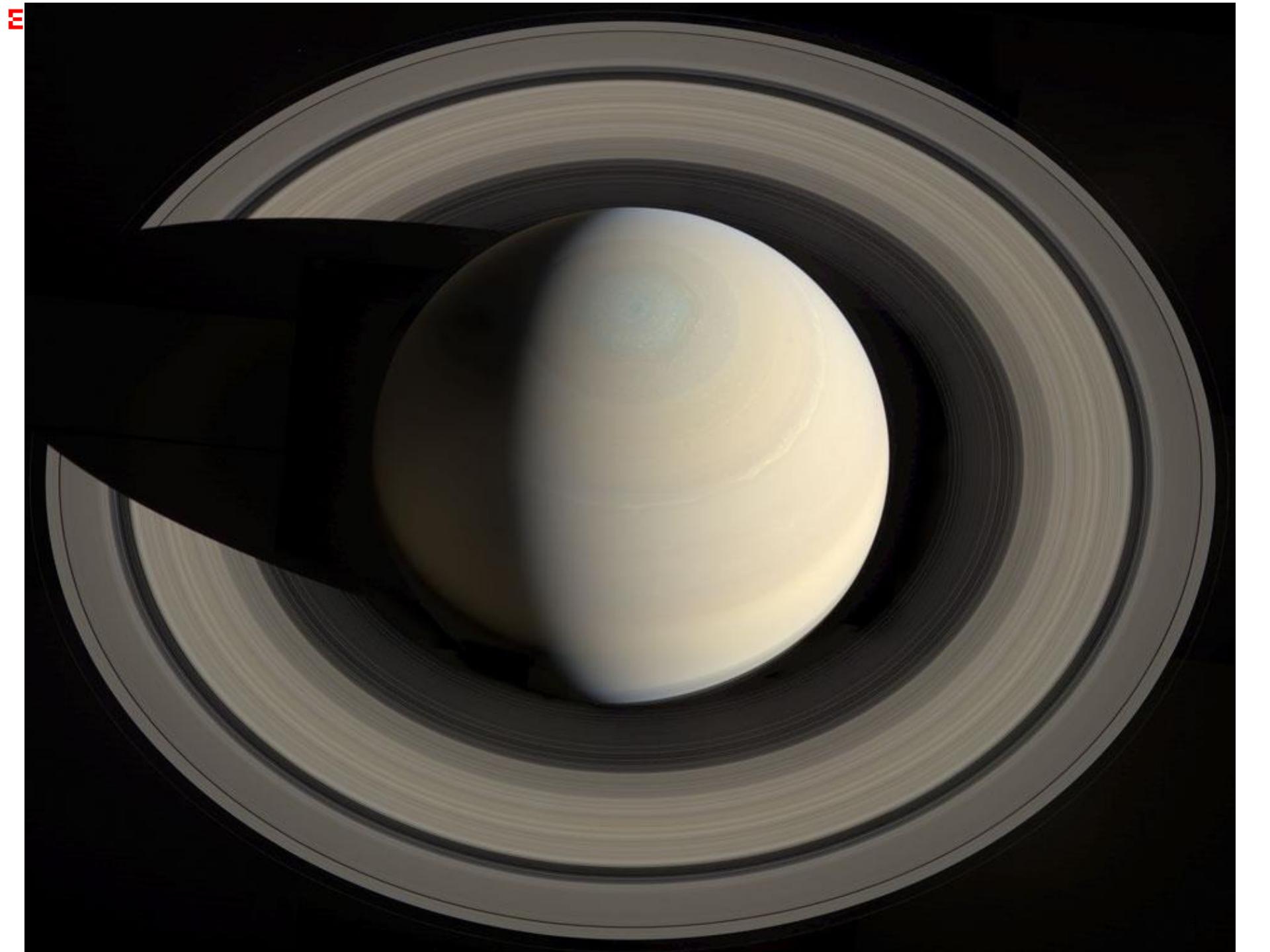
- Effet de résonance entre la période de l'astéroïde et celle de Jupiter

Kirkwood gaps

Asteroid Main-Belt Distribution
Kirkwood Gaps



- Il y a des « trous » dans la population des astéroïdes à certaines distances du soleil. Correspondent à des périodes en rapport rationnel avec la période de Jupiter



Anneaux de Saturne

- Image de la page précédente:
<http://apod.nasa.gov/apod/ap131021.html>
- Certains « gaps » sont dus à des résonances avec les orbites de certaines lunes de Saturne

Problème réduit, « planète X » ... et autres points de Lagrange

- Mvmt d'un 3e corps céleste dans le système (soleil, planète)
 - $m_3 \ll m_1, m_2$
 - approximation d'orbites circulaires pour le soleil et pour la planète.
- On se place dans le référentiel dans lequel le soleil et la planète sont fixes. Référentiel en **rotation**.
- On cherche s'il existe des points d'équilibre pour le 3e corps dans ce référentiel
 - Effet de la **force d'inertie** (« centrifuge »). Calculs analytiques présentés au cours (en résumé).
- On examine la stabilité des points d'équilibre
 - Effet de **Coriolis**. Simulations numériques présentées au cours

Eqs du mvmt 3e corps dans \mathcal{R}'

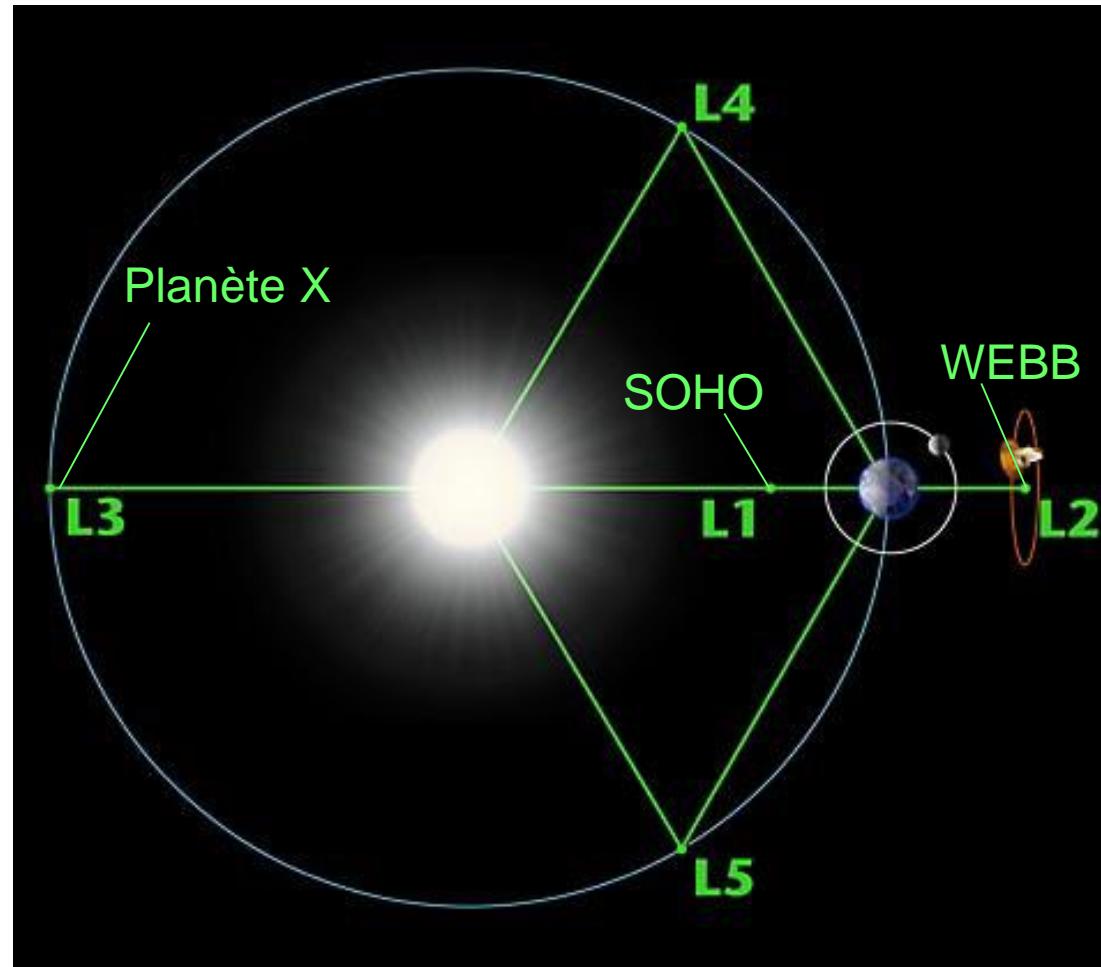
$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} \frac{d^3 \beta (x' + \alpha d)}{r_{13}^3} + \frac{d^3 \alpha (x' - \beta d)}{r_{23}^3} - x' \\ \frac{d^3 \beta}{r_{13}^3} y' + \frac{d^3 \alpha}{r_{23}^3} y' - y' \end{pmatrix} + 2\Omega \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = r'_{12} = \text{const}$$

$$\Omega = \Omega_{R')R} = \text{const} = \dots$$

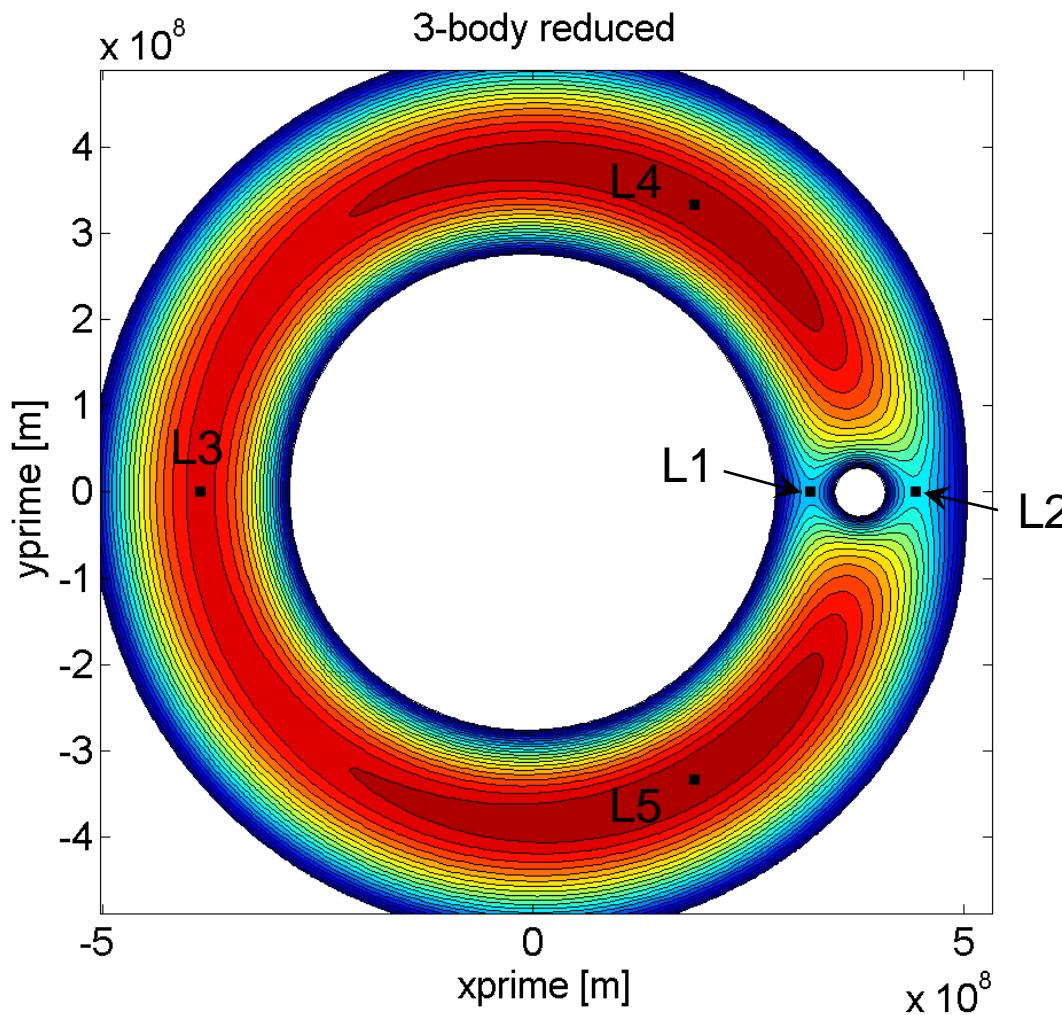
Points de Lagrange, Soleil-Terre



Source: www.nasa.gov

N.B.: Soleil-Jupiter: astéroïdes Troyens en L4 et L5

Stabilité des points de Lagrange

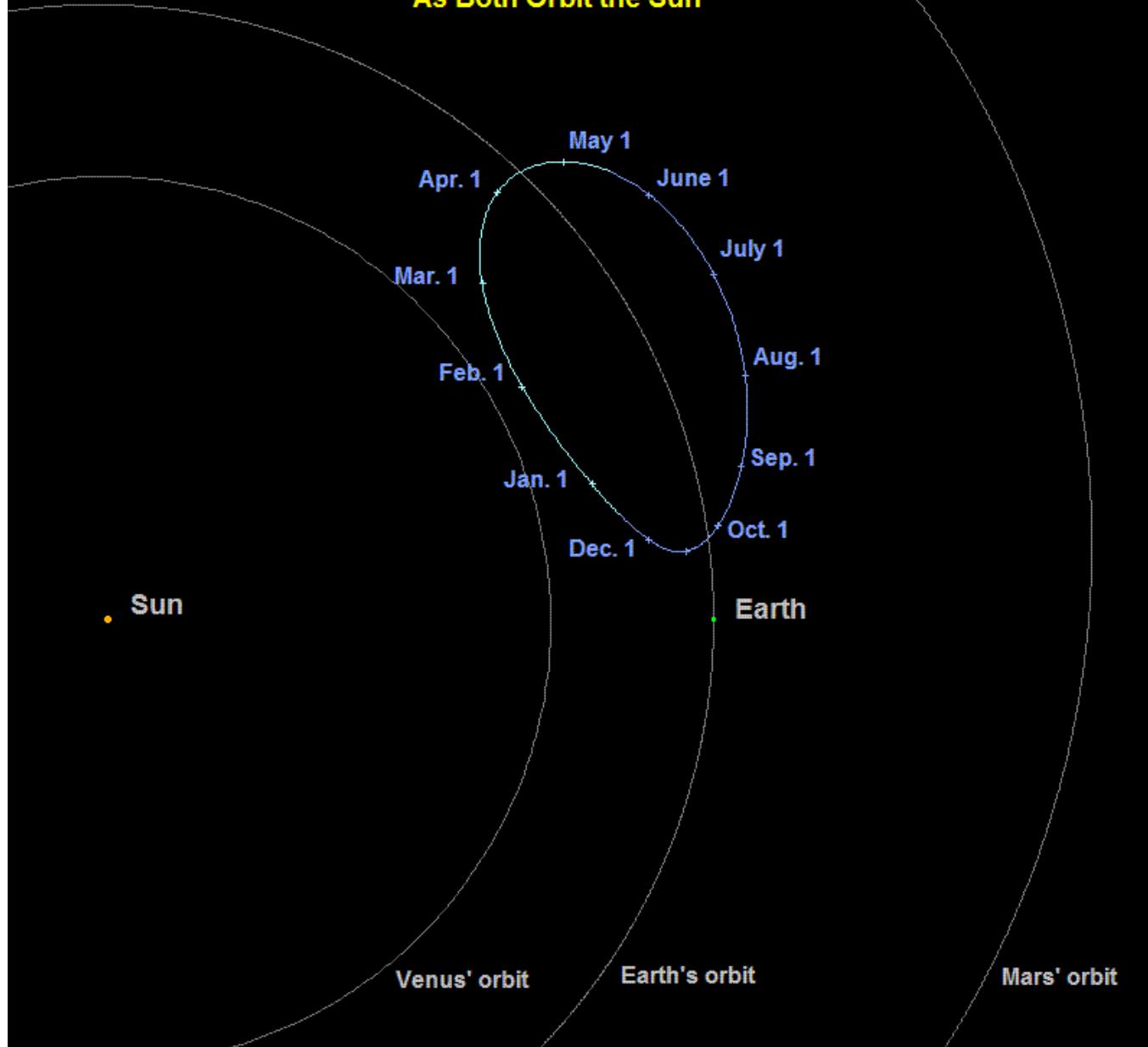


Equipotentielles dans le référentiel tournant dans lequel m_1, m_2 sont fixes

Stabilité des pts de Lagrange : Coriolis

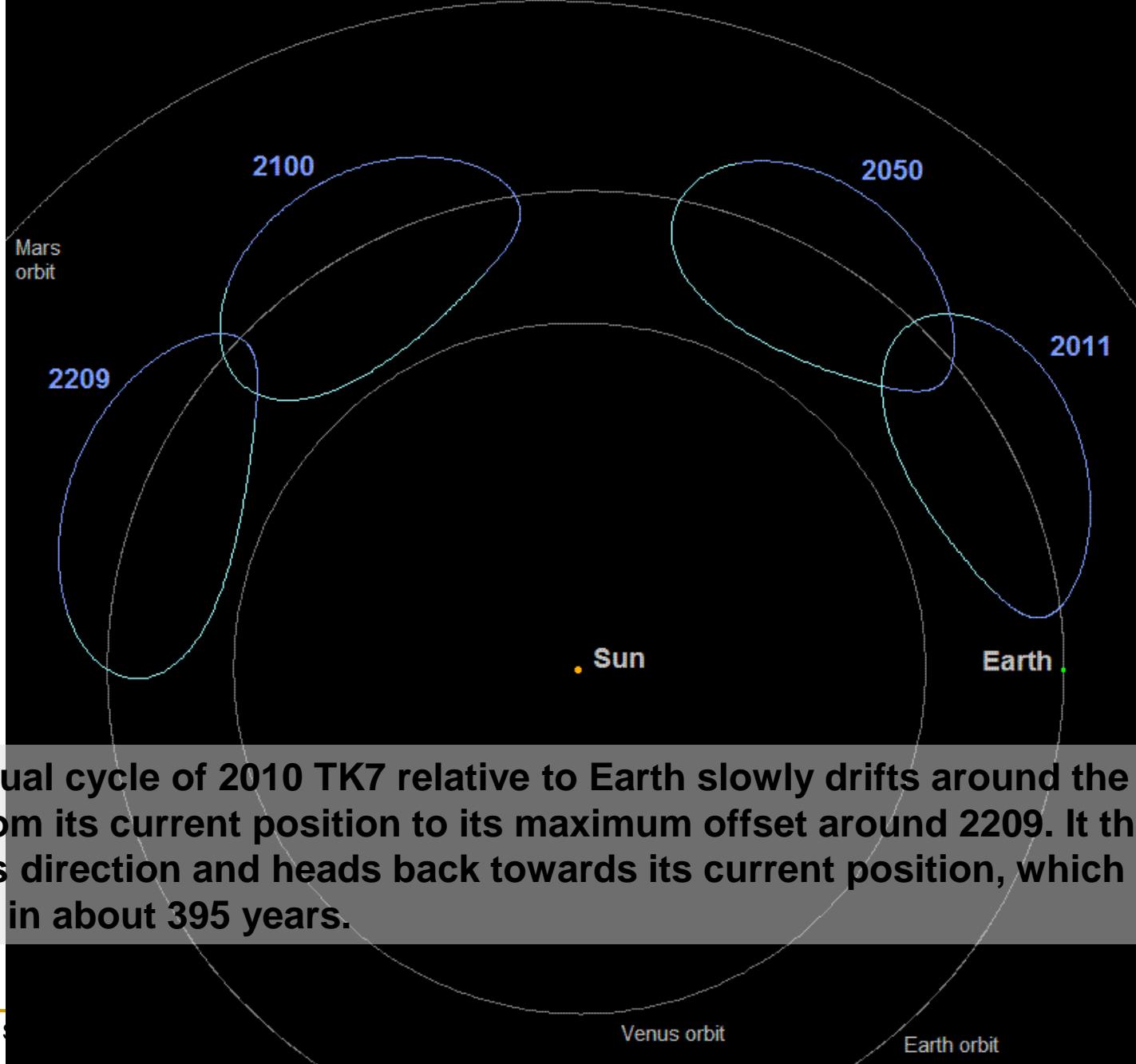
- Nous avons constaté que les orbites au voisinage des points de Lagrange L1, L2, L3 sont instables:
 - une condition initiale voisine du point d'équilibre conduit à des mouvements qui s'écartent fortement du point d'équilibre
- Qu'en est-il de L4 et L5 ? (EX.4)
 - Les orbites au voisinage de L4 et L5 sont **stables**, bien que ces points correspondent à des **maxima** du potentiel effectif
 - Il doit donc s'agir d'un effet d'une force qui ne dérive pas d'un potentiel: c'est la force de Coriolis!
 - Testons avec la simulation!

Position of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth in 2011,
As Both Orbit the Sun



http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf3.gif

Annual Cycles of Asteroid 2010 TK7 Relative to Earth for Selected Years, As Both Orbit the Sun



http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf4.gif

Points de Lagrange: des tremplins pour l'exploration spatiale



**The Lunar L₁ Gateway:
Portal to the Stars and Beyond**

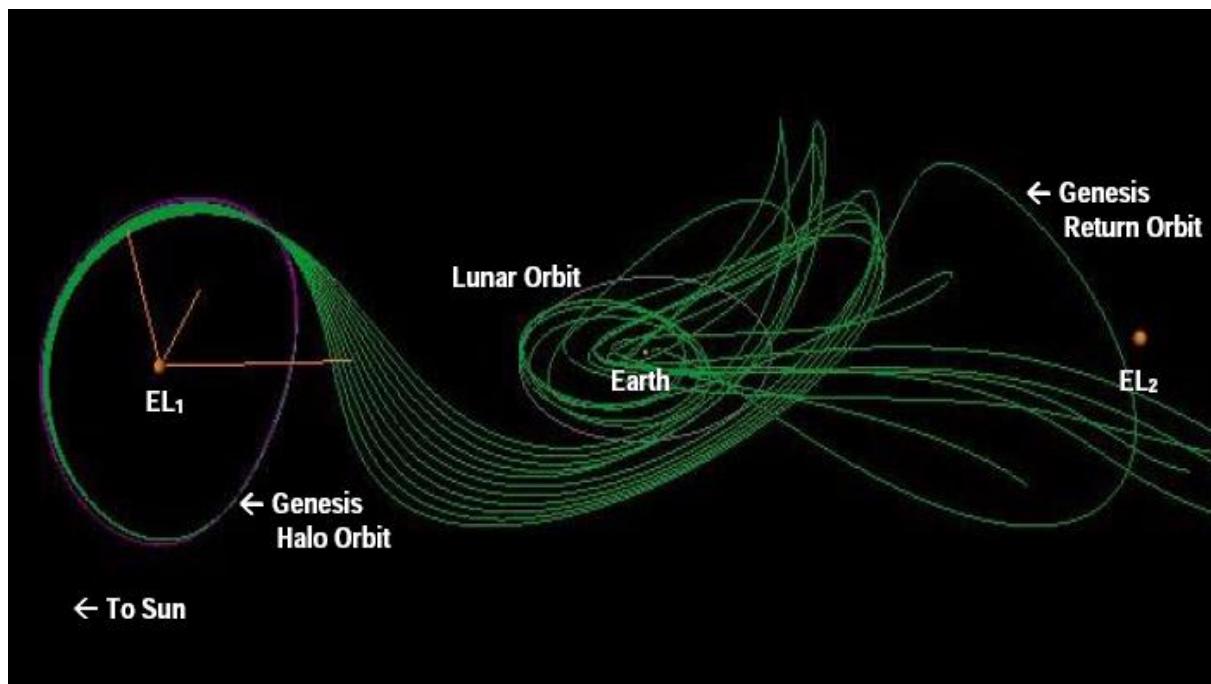
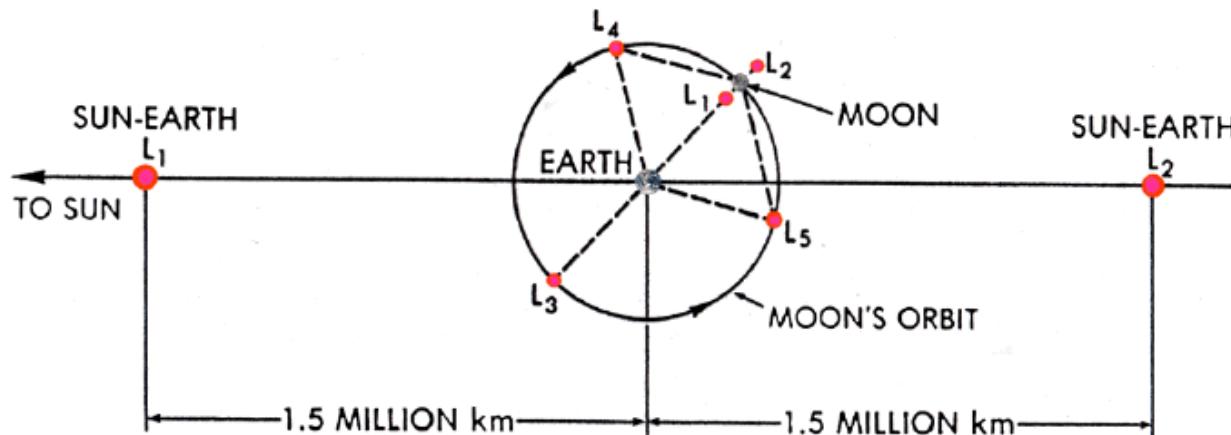
Martin W. Lo
Navigation and Mission Design Section
Jet Propulsion Laboratory
California Institute of Technology

Shane D. Ross
Control and Dynamical Systems
California Institute of Technology

AIAA Space 2001 Conference

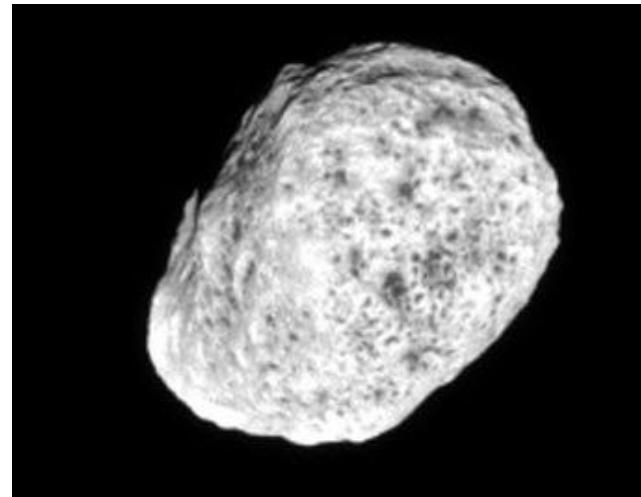
[www.ggg.caltech.edu/~mwl/publications/papers
/LunarGateway.pdf](http://www.ggg.caltech.edu/~mwl/publications/papers/LunarGateway.pdf)

“Our Solar System is interconnected by a vast system of tunnels winding around the Sun generated by the Lagrange Points of all the planets and their moons. These passageways are identified by portals around L1 and L2, the halo orbits. By passing through a halo orbit portal, one enters this ancient and colossal labyrinth of the Sun. This natural Interplanetary Superhighway System (IPS, see Figure 1) provides ultra-low energy transport throughout the Earth’s Neighborhood, the region between Earth’s L1 and L2....”



www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers/lunarGateway.pdf

Hyperion: une lune de Saturne



December 5, 2016

The moon Hyperion tumbles as it orbits Saturn. Hyperion's (168 miles or 270 kilometers across) spin axis has a chaotic orientation in time, meaning that it is essentially impossible to predict how the moon will be spinning in the future. So far, scientists only know of a few bodies with such chaotic spins.

The image was taken in green light with the Cassini spacecraft narrow-angle camera on Aug. 22, 2016.

Rotation solide rigide

- Satellite de forme allongée
 - Modélisé par 2 pts matériels m_1, m_2 reliés par une tige rigide de longueur L
- En orbite autour d'une planète de masse M
- Hyp.: $m_1, m_2 \ll M$
 - M peut être considéré immobile
- Hyp.: $L \ll r_G$, $G=CM$ de $\{m_1, m_2\}$
 - Mais L est fini (non nul!)

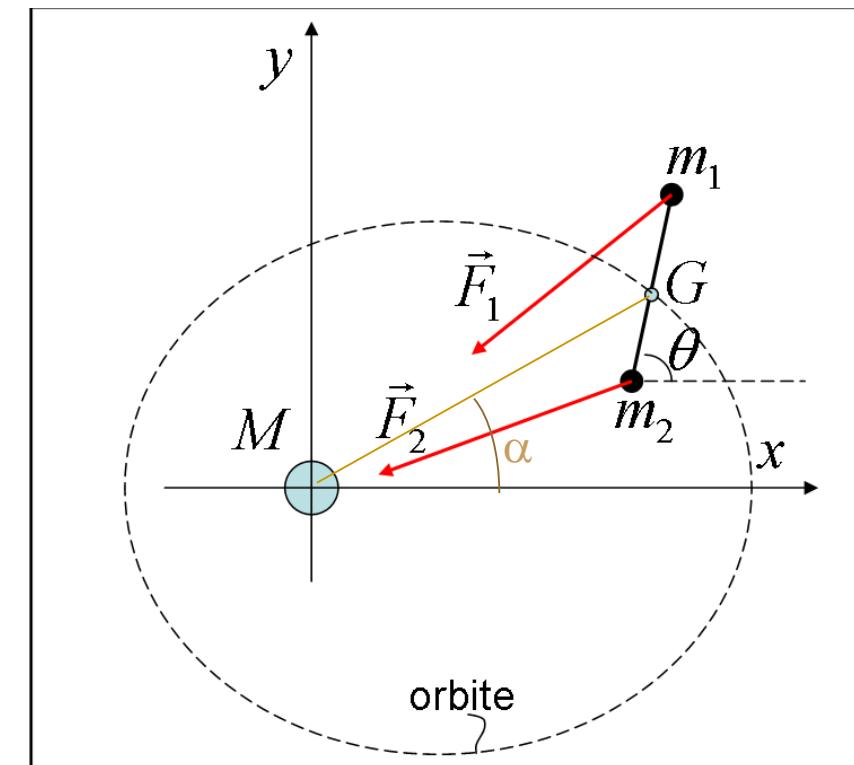


FIG. 2.26

- Sous ces hypothèses, le problème de la rotation est découplé de celui du mvmt de G, mvmt à 1 corps (Kepler) autour de M

Rotation solide rigide - suite

- Equations de base
- Hypothèses
- Dérivation des équations à l'ordre le plus bas en L/r_G (L/r_G est un petit paramètre)
- Des exemples de simulation seront présentés au cours:
 - Orbite circulaire ou peu excentrique: mouvement de rotation quasi-périodique
 - Au-delà d'une certaine excentricité, le mouvement de rotation devient chaotique!
 - Notes de Cours, 2.6, pp.63-65

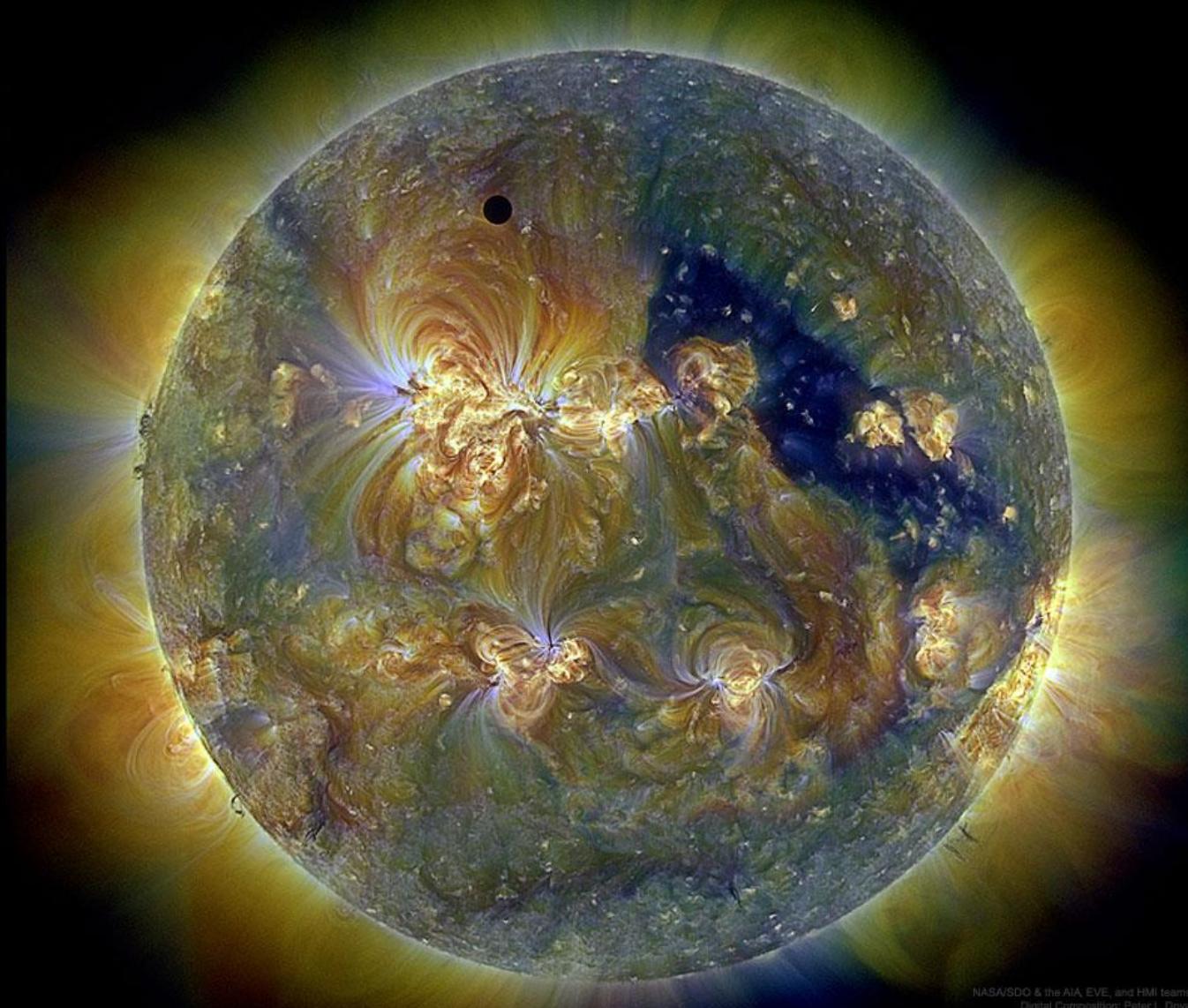
Ch.3 Intégration spatiale

- 3.1 Cas 1D, traités comme problèmes à valeur initiale
 - 3.1.1 Modèles fluides d'atmosphère planétaire
 - Singularité des équations : Exercice 4
 - 3.1.2 Planète gazeuse ou soleil
 - Singularité due au système de coordonnées sphériques
- 3.2 Problèmes à valeurs aux bords

Ch.4 Espace et temps

- 4.1 Advection-Diffusion.
 - Méthode de Langevin.
 - Différences finies, schéma explicite à 2 niveaux.

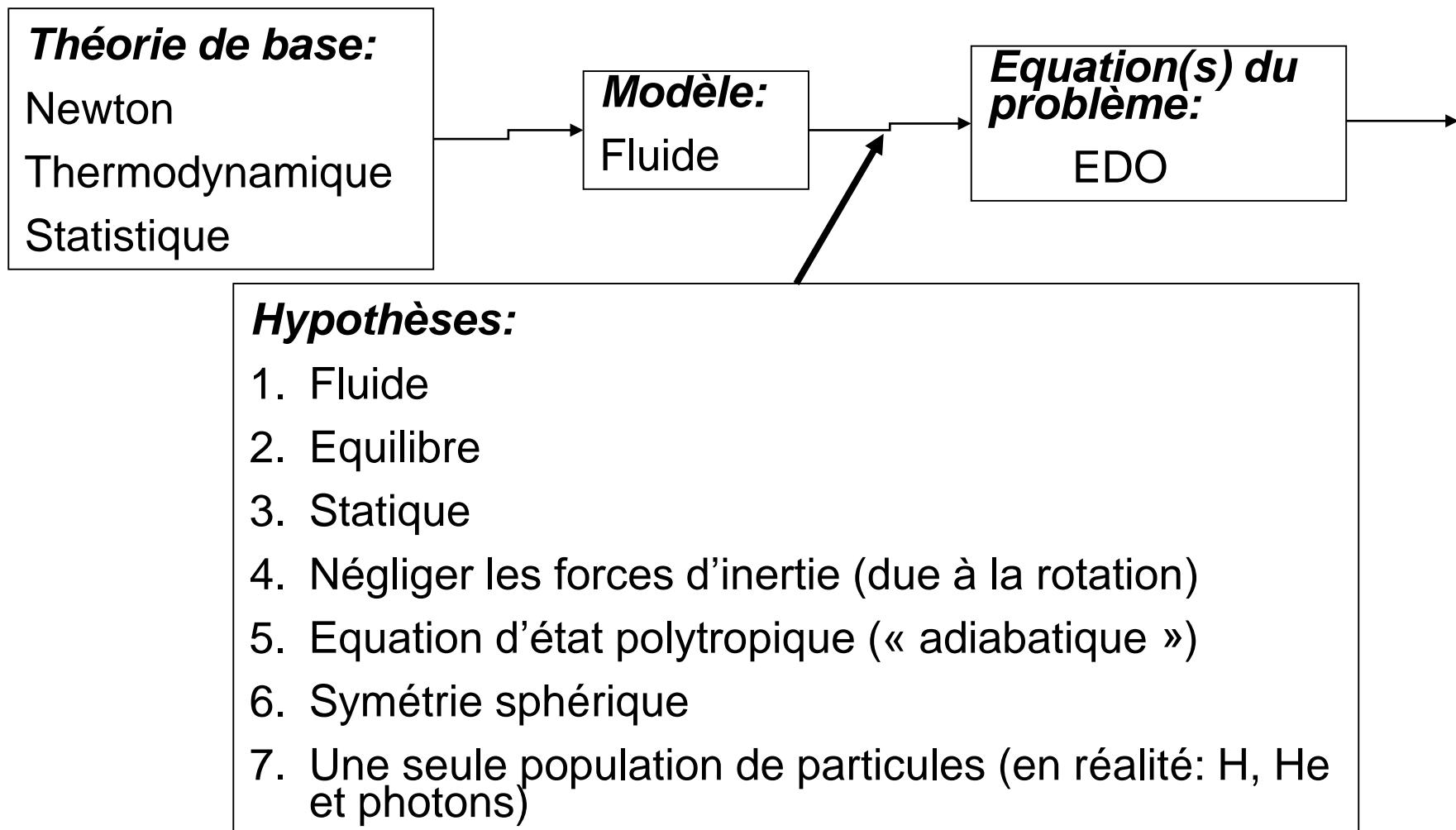
Densité, pression, température au cœur du soleil



NASA/SDO & the AIA, EVE, and HMI teams
Digital Composition: Peter L. Dove

■ **Image Credit:** [NASA/SDO](#) & the AIA, EVE, and HMI teams; *Digital Composition: Peter L. Dove*

Fluide en équilibre statique sphérique



Fluide en équilibre statique sphérique - suite

■ Section 3.1.2. Equations pour $P(r)$, $\rho(r)$, $m(r)$

pression

densité

masse à l'intérieur d'une sphère de rayon r

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho G m}{r^2} \quad (3.16)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3.17) \quad P \rho^{-\gamma} = K \quad (3.18)$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi \rho G} \quad (3.19)$$

Singularités:

$\rho=0$: la physique change

$r=0$: géométrie sphérique singulière, mais régularité physique

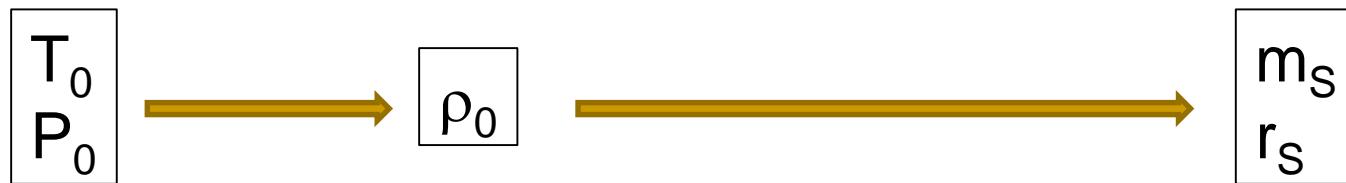
Fluide en équilibre statique sphérique - suite

- Runge-Kutta d'ordre 4
 - « remise en forme » des équations $\longrightarrow \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} P \\ \rho \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(P, \rho, m) \\ f_2(P, \rho, m) \\ f_3(P, \rho, m) \end{pmatrix}$
- Conditions aux limites ???
 - Pour ρ et P ... où les appliquer ??
- Singularités
 - $\rho=0$ (surface du soleil): la physique des fluides n'a pas de sens; « singularité physique »
 - $r=0$ (centre du soleil): physiquement, tout est régulier; « singularité mathématique », due à la singularité des coordonnées sphériques à l'origine.
- Méthode de tir: du (voisinage du) centre vers le bord
 - On choisit $T(0)$ et $P(0)$ ($\rightarrow K$), on intègre de $r=\varepsilon$ jusqu'à $\rho=0$.
 - On ajuste $T(0)$ et $P(0)$ jusqu'à obtenir les valeurs réelles du rayon et de la masse du soleil.
- Essayons avec Runge-Kutta 3

Densité, pression, température au cœur du soleil

■ Cible:

- Masse du soleil: $\sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Rayon du soleil: $\sim 7 \times 10^8 \text{ m}$

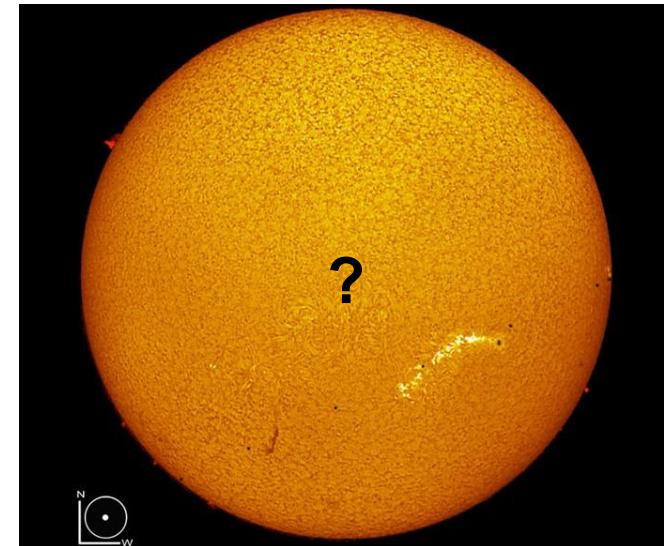


Quiz:

- Diminuer P_0 fait-il diminuer ou augmenter le rayon du soleil?
- Diminuer P_0 fait-il diminuer ou augmenter la masse du soleil?
- Augmenter T_0 fait-il diminuer ou augmenter le rayon du soleil?
- Augmenter T_0 fait-il diminuer ou augmenter la masse du soleil?

Au centre du soleil...

Moyennant nos hypothèses, les méthodes numériques nous donnent, pour $\gamma=4/3$:



Densité 80 fois celle de l'eau

Pression 130 milliards d'atmosphères

Température 20 millions de degrés

- La réalité est beaucoup plus complexe que le modèle présenté. Les valeurs obtenues sont néanmoins du bon ordre de grandeur. (densité 150 fois celle de l'eau, température 15 millions K)

