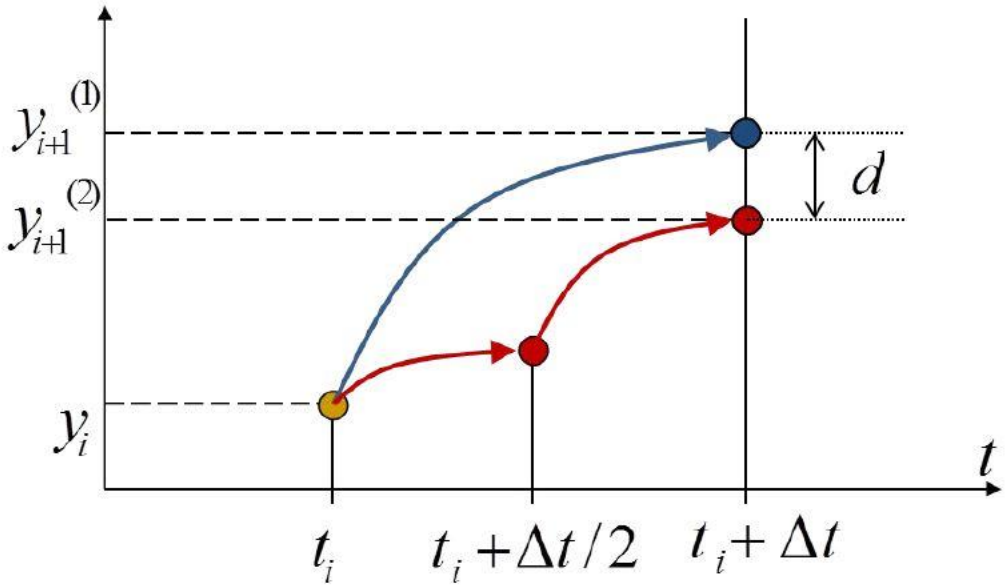
Physique Numérique I semaines 11-12

- Rappel
  - Algorithme avec pas de temps adaptatif
- Plan [Notes de Cours Sections 2.4, 2.5]
  - Démonstration de la formule de changement de Δt
  - Résultats, pas de temps fixe / adaptatif
  - Comment obtenir et représenter l'ordre de convergence? Fits de l'erreur.
  - Gravitation 1,2, "2 ½" , 3 corps
  - Points de Lagrange

Schéma à pas de temps adaptatif



Chacune des flèches symbolise un pas complet d'un algorithme de base: par exemple les 4 étapes d'un schema Runge-Kutta du 4e ordre.

On veut choisir Δt de telle sorte que d soit inférieur à une valeur donnée ε

$$d < \varepsilon$$

ε joue le rôle d'un paramètre de ***contrôle*** de l'algorithme, et n'est PAS la précision obtenue sur y à la fin de la simulation. Cette dernière doit être obtenue par une étude de convergence: lim $\varepsilon \rightarrow 0$

Algorithme adaptatif

Si d<ε, passer au pas suivant avec un pas proposé rallongé:

$$\Delta t_{\text{new}} = \Delta t \left(\frac{\epsilon}{d}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Si d>ε:

Tant que d>ε, raccourcir le pas et le refaire:

$$\Delta t_{\text{refaire}} = f \; \Delta t \left(\frac{\epsilon}{d}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad .$$

avec *f*<1 pour éviter une boucle infinie

Ordre de convergence, fits, etc

En supposant que la solution soit analytique, on peut écrire la solution numérique:

$$y_{num}(t+\Delta t) = y(t+\Delta t) + c_1(\Delta t) + c_2\,(\Delta t)^2 + c_3\,(\Delta t)^3 + c_4\,(\Delta t)^4 + c_5\,(\Delta t)^5 + \quad \ldots$$

Définition: le schéma est d'ordre *n* si et seulement si c_1 = 0, …, c_n = 0

$$\boldsymbol{y_{num}(t+\Delta t) = y(t+\Delta t) + c_{n+1}\,(\Delta t)^{n+1} + c_{n+2}\,(\Delta t)^{n+2} + \quad \ldots}$$

Ainsi, l'erreur à $t=t_{fin}$ sera, après N_{steps} pas de temps, avec $N_{steps}=t_{fin}/\Delta t$, les erreurs s'accumulant à chaque pas de temps:

$$y_{num}(\,t_{fin}\,) = y(t_{fin}) + c_{n+1}\,(t_{fin}/\Delta t)(\Delta t)^{n+1} + c_{n+2}\,(t_{fin}/\Delta t)(\Delta t)^{n+2} + \cdots$$

$$\boldsymbol{y_{num}(\,t_{fin}\,) = y(t_{fin}) + c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots}$$

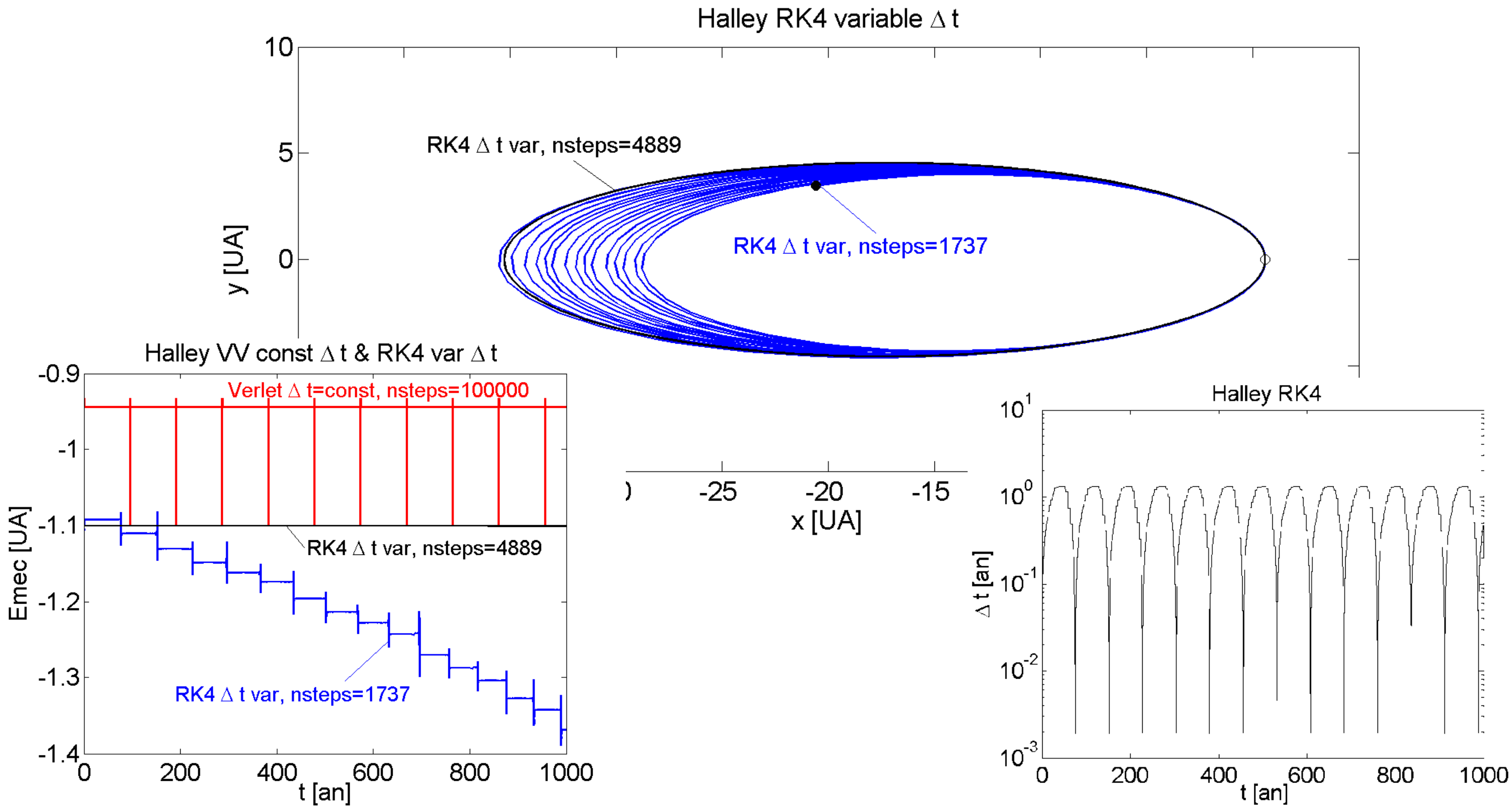
$$y_{num}(\,t_{fin}\,) - y(t_{fin}) = c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots$$

Sur une échelle log-log:

$$\log(y_{num}(\,t_{fin}\,) - y(t_{fin})) = \log(c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots)$$

- Fit de la solution pour obtenir l'ordre? – Voir présentation au tableau

Halley, Runge-Kutta 4e ordre, Δt variable

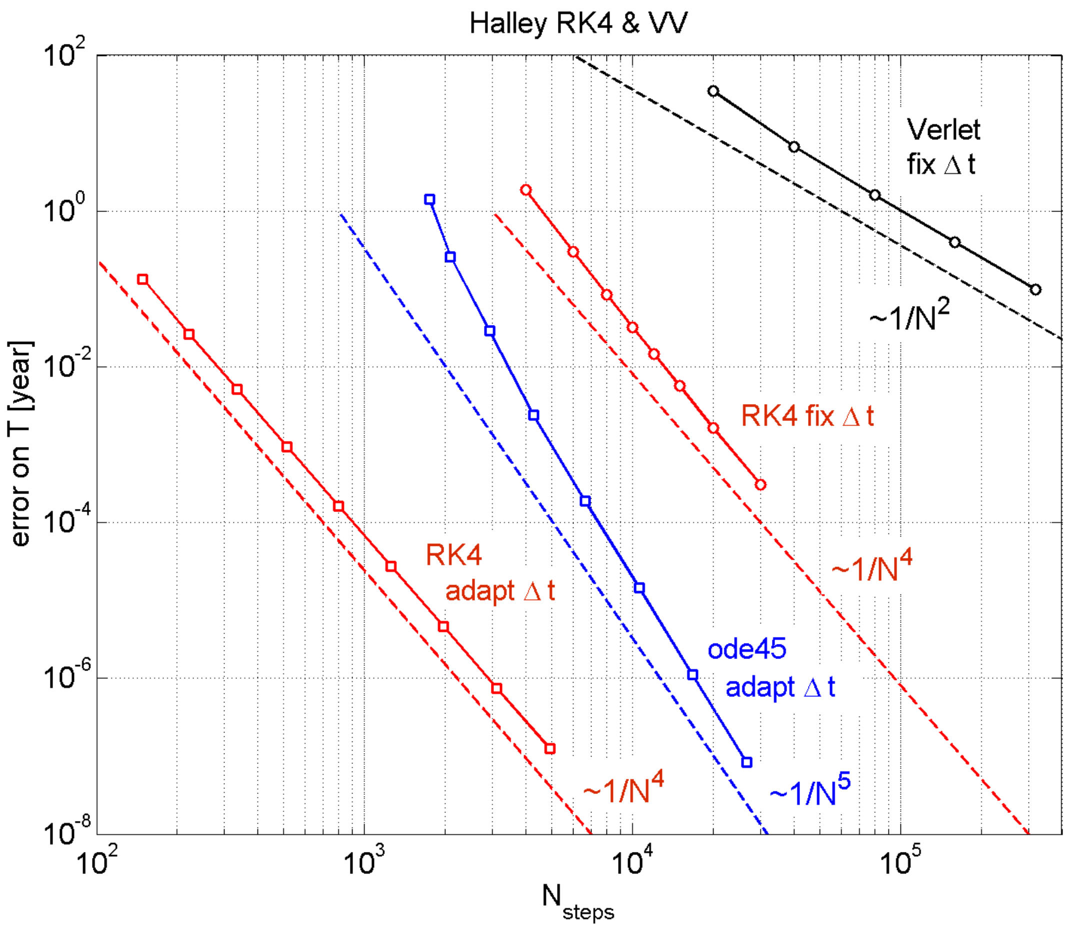


Runge-Kutta a une tendance à long terme de diminuer E_{mec}

Le pas Δt variable permet une très grande efficacité

Convergence très rapide

Halley, Verlet, Runge-Kutta 4, Δt fixe ou variable, convergence de la période



Pour 5000 pas de temps, on est 10 millions de fois plus précis avec le schéma adaptatif qu'avec Δt fixe!

En résumé:

- Verlet conserve bien E_{mec} *en moyenne sur de longues périodes*, mais donne une précession non physique.
- Runge-Kutta 4e ordre: converge très rapidement la période, la distance maximale, etc, mais dimunution séculaire non physique de E_{mec}
- **Un algorithme à pas Δt adaptatif est de plusieurs ordres de grandeur plus efficace qu'à Δt fixe.**

Ordre de convergence, fits, etc

En supposant que la solution soit analytique, on peut écrire la solution numérique:

$$y_{num}(t+\Delta t) = y(t+\Delta t) + c_1(\Delta t) + c_2\,(\Delta t)^2 + c_3\,(\Delta t)^3 + c_4\,(\Delta t)^4 + c_5\,(\Delta t)^5 + \quad ...$$

Définition: le schéma est d'ordre *n* si et seulement si $c_1 = 0, \ldots,\ c_n = 0$

$$\boldsymbol{y_{num}(t+\Delta t) = y(t+\Delta t) + c_{n+1}\,(\Delta t)^{n+1} + c_{n+2}\,(\Delta t)^{n+2} + \quad ...}$$

Ainsi, l'erreur à $t=t_{fin}$ sera, après N_{steps} pas de temps, avec $N_{steps}=t_{fin}/\Delta t$, les erreurs s'accumulant à chaque pas de temps:

$$y_{num}(\,t_{fin}\,) = y(t_{fin}) + c_{n+1}\,(t_{fin}/\Delta t)(\Delta t)^{n+1} + c_{n+2}\,(t_{fin}/\Delta t)(\Delta t)^{n+2} + \cdots$$

$$\boldsymbol{y_{num}(\,t_{fin}\,) = y(t_{fin}) + c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots}$$

$$y_{num}(\,t_{fin}\,) - y(t_{fin}) = c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots$$

Sur une échelle log-log:

$$\log(y_{num}(\,t_{fin}\,) - y(t_{fin})) = \log(c_{n+1}\,t_{fin}(\Delta t)^{n} + c_{n+2}\,t_{fin}(\Delta t)^{n+1} + \cdots)$$

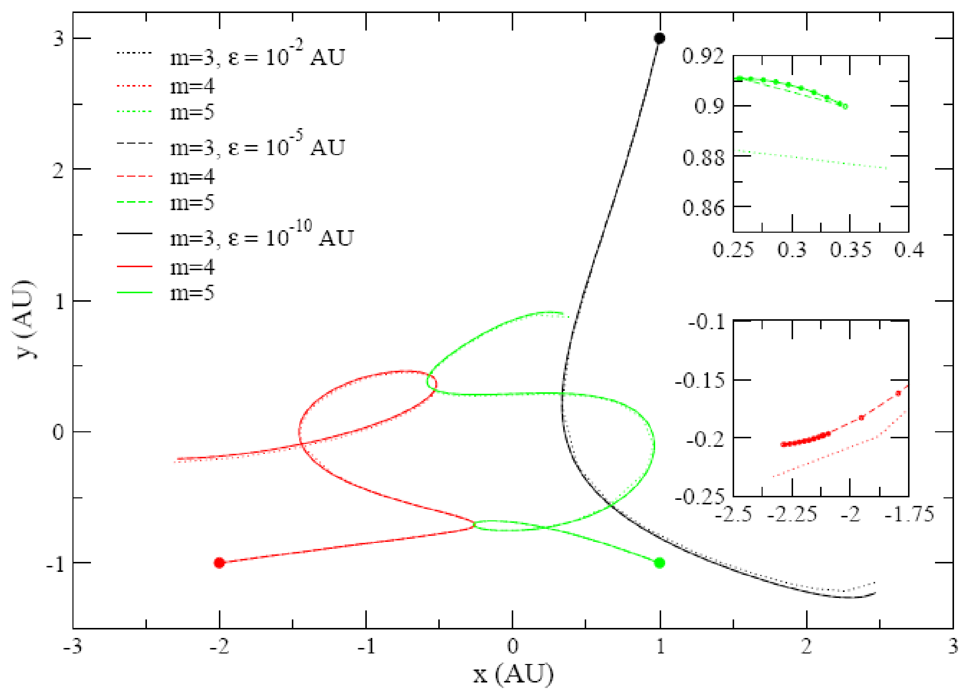
- Fit de la solution pour obtenir l'ordre? – Voir présentation au tableau

Problème à 2 corps

- On se place dans le référentiel du centre de masse
- Le mvmt de chacun des 2 corps dans le référentiel du centre de masse est «identique» au mvmt à 1 corps (à des rapports de masse près) (*)
- Les lois de Kepler s'appliquent *(avec une légère modif.)*
  - Orbites= côniques avec un des *foyers au centre de masse*
  - Loi des aires
  - Période ~ (demi-grand-axe) $^{3/2}$
- (*) Mouvement central en $1/r^2$ avec r=distance au C.M.
  - La force est $\sim 1/d^2$, avec $d=|r_2-r_1|$. Def. C.M. → relation fixe entre r_1 et d: $r_1=m_2 d/(m_1+m_2)$, donc la force est $\sim 1/r_1^2$.
  - "Central" : force toujours dirigée vers un pt fixe du référentiel, dans ce cas le C.M.

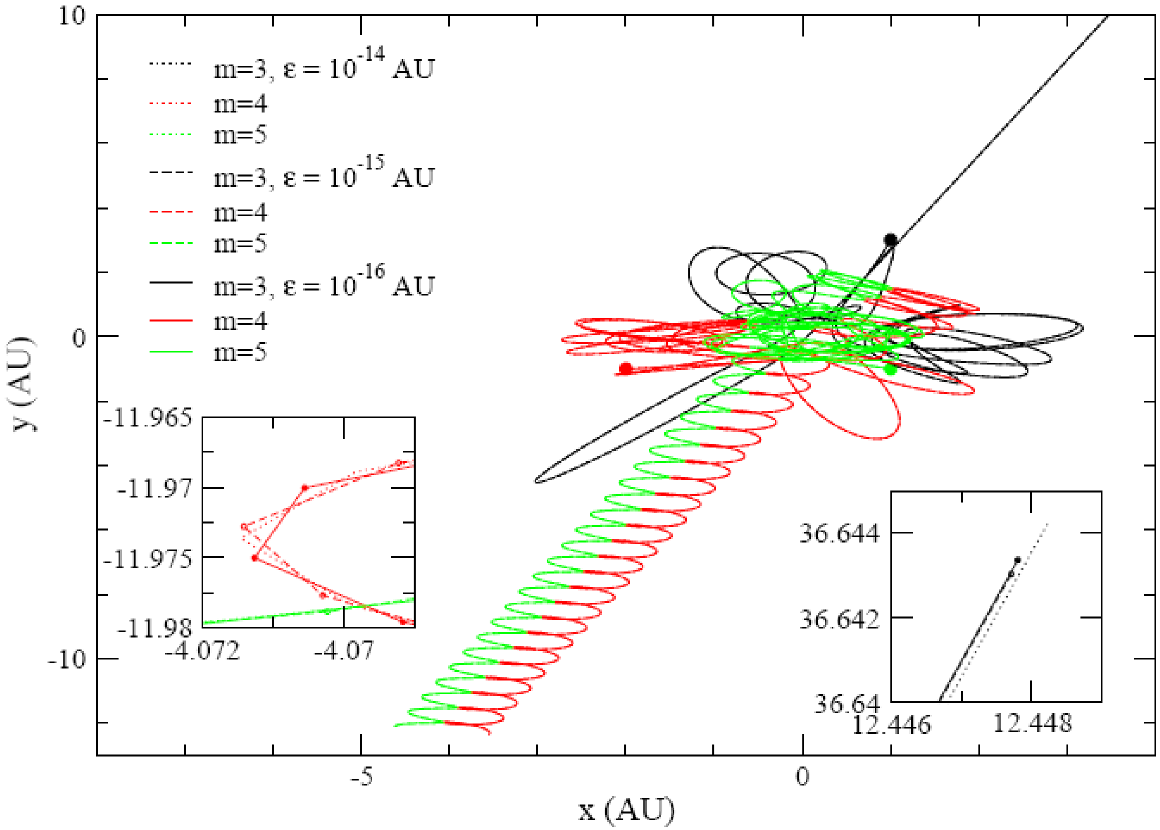
Problème à 3 corps: exemples
Pythagore joue au billard cosmique

- 3 corps de masses 3,4,5, placées initialement aux sommets d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3,4,5 (unités astronomiques). Les vitesses initiales sont nulles.
- Runge-Kutta ordre 4, pas variable adaptatif.



t_{fin}=5 ans

80 ans

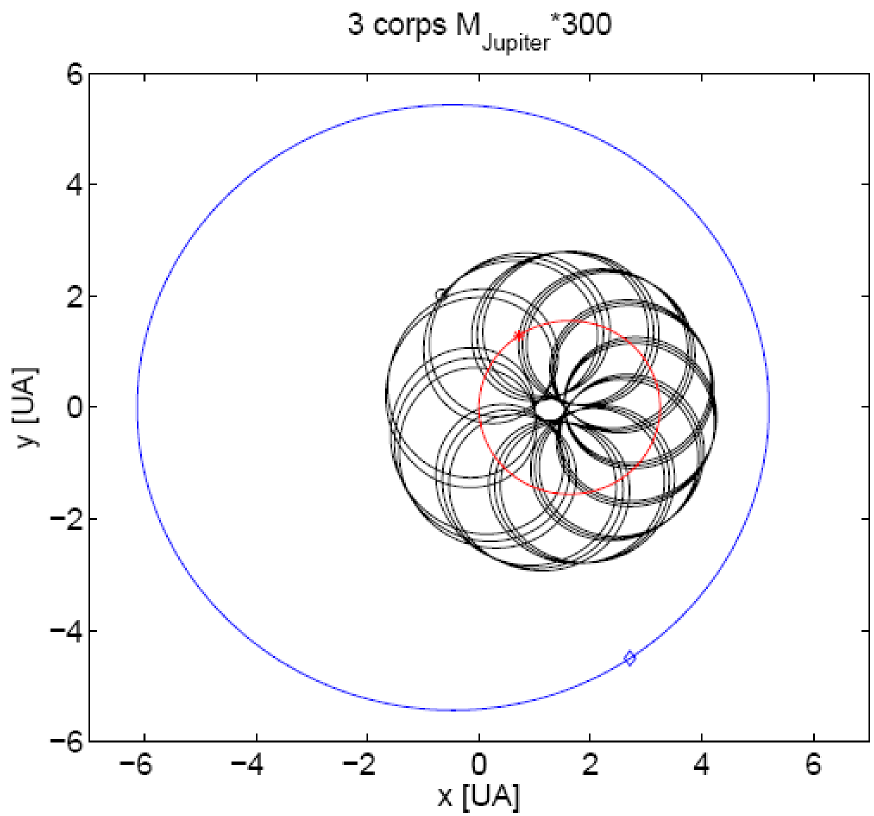


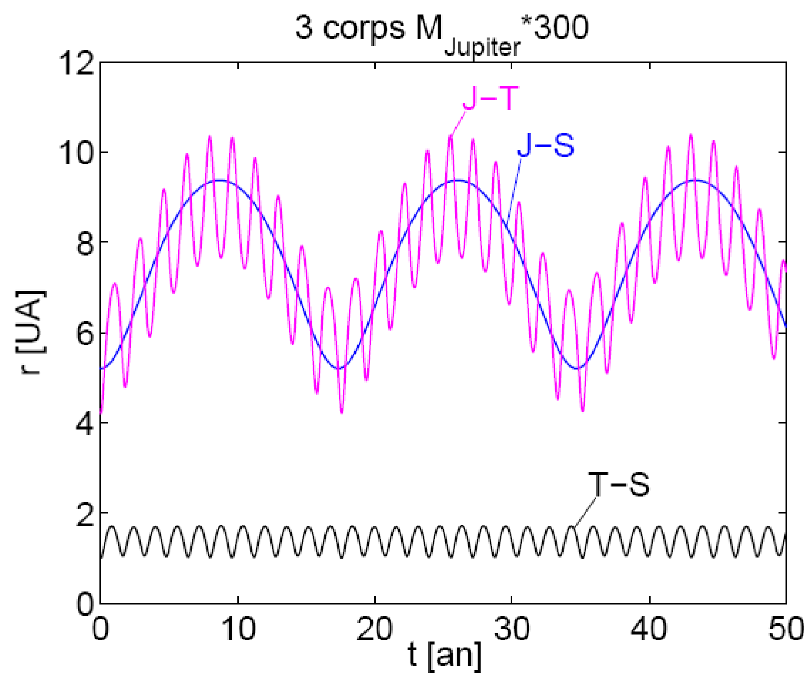
- Quasi-collisions: problème difficile, même avec Δt adaptatif
  - Format « long double »
- Formation d'une étoile double et éjection de la troisième

3 corps: soleil, « Jupiter », terre

- Mvmt de la terre dans le système (soleil, « jupiter »), où *on a multiplié la masse réelle de Jupiter par un facteur arbitraire f*.
- Cf Notes de Cours, sections 2.5.1 et 2.5.2
- Simulations avec les schémas de Verlet et de Runge-Kutta 4e ordre

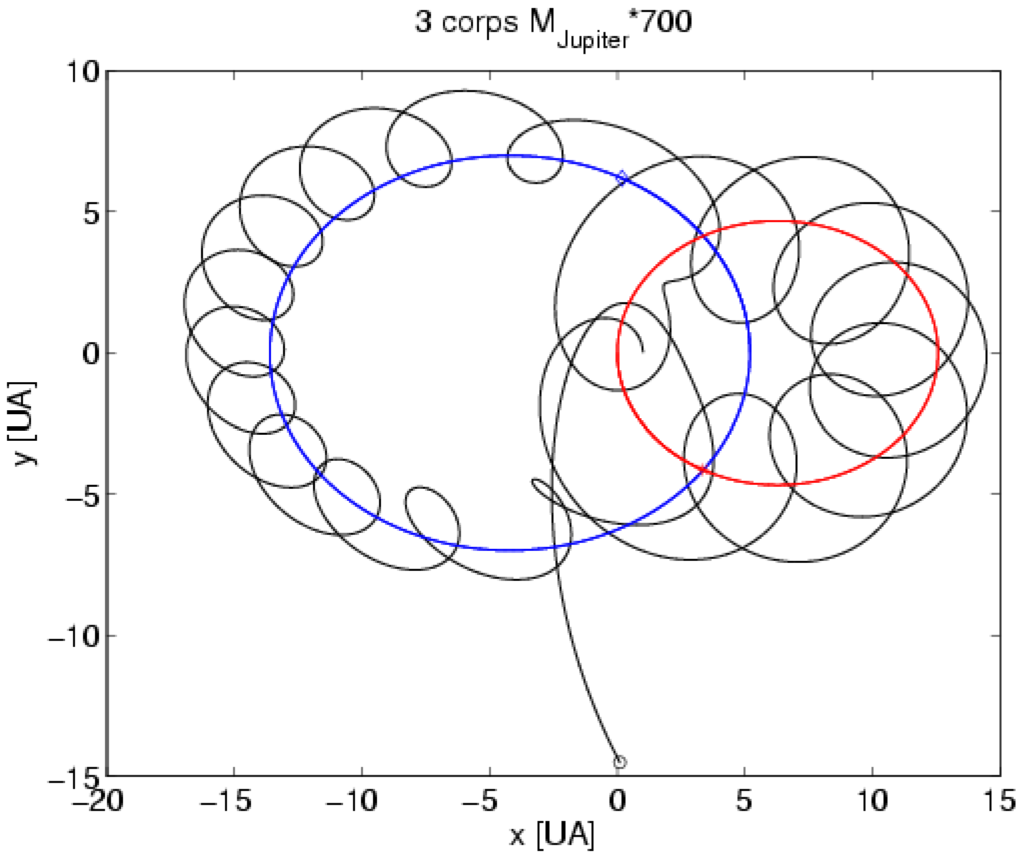
Jupiter*300





- Mouvement quasi-périodique

Jupiter*700



100 ans

Δt=0.001 an

Verlet

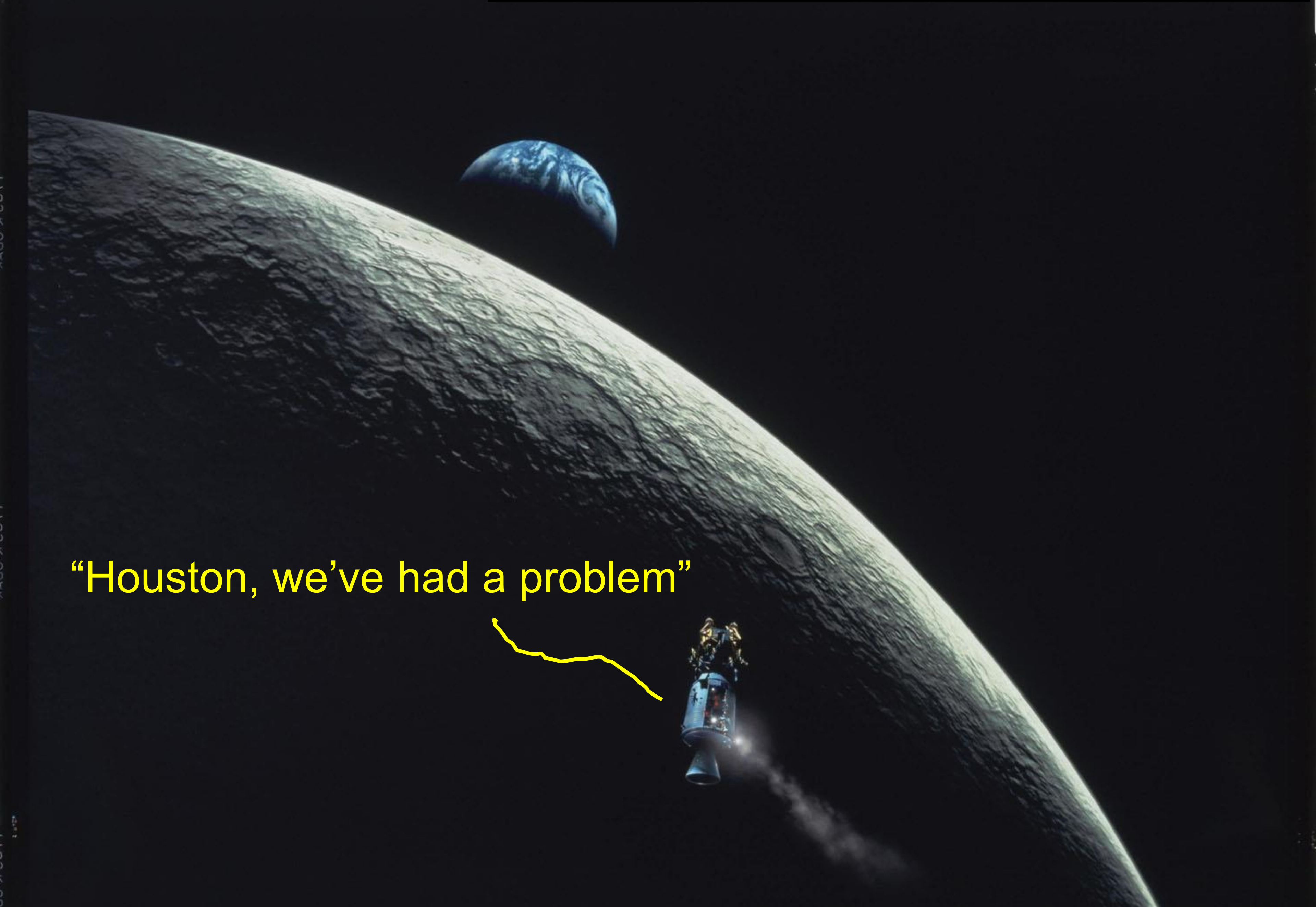
- La terre se fait capturer par « Jupiter », puis est « éjectée »…
- Chaos: sensitivité aux conditions initiales, difficulté de convergence

Problème à trois corps

- Il semble difficile de trouver des orbites stables pour 3 corps de masses comparables placées à des distances comparables.(*)
- Lorsque un des 3 corps est de masse négligeable par rapport aux 2 autres, on parle de « problème à 3 corps réduit ».
  - Exemples: {Cassini, Saturne, Titan}; {Astéroïde, Soleil, Jupiter}; {Apollo13, Terre, Lune}; etc
  - On résout d'abord le problème à 2 corps (→ initialiser les 2 corps lourds)
  - Ensuite, on rajoute le 3e corps (léger)

(*) Il existe une solution stable avec des trajectoires en forme de 8, voir par exemple https://www.youtube.com/watch?v=jKvnn1r-9Iw, découverte en … 1993 (!)

Apollo 13 - 03:08 UTC on April 14, 1970



Problème réduit, « planète X » … et autres points de Lagrange

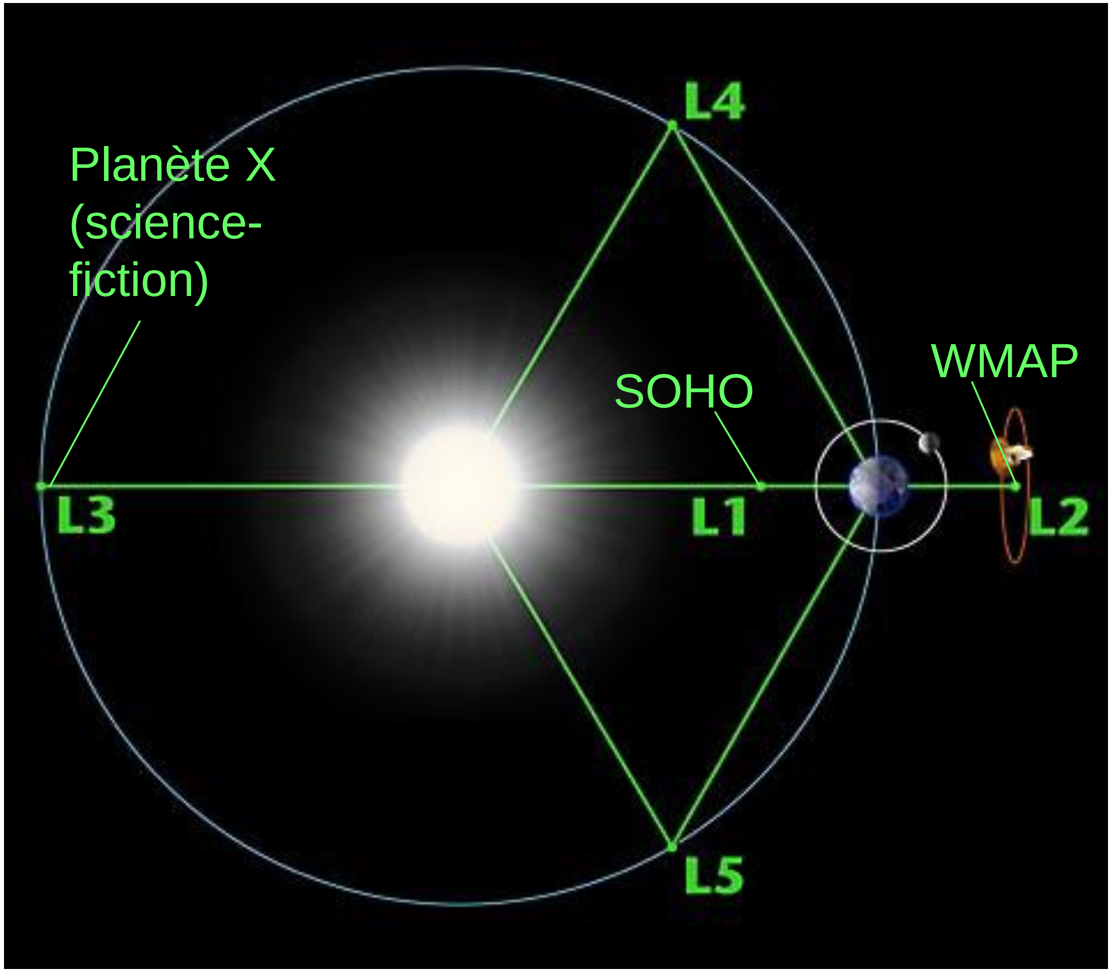
- Mvmt d'un 3e corps céleste (m_3) dans le système $\{m_1,m_2\}$
  - $m_3 << m_1,m_2$, mais m_1 et m_2 peuvent être de masses comparables
  - approximation d'orbites circulaires pour m_1 et m_2.

Analytiquement:

- On se place dans le référentiel dans lequel m_1 et m_2 sont sont fixes. Référentiel en rotation.
- On cherche s'il existe des points d'équilibre pour le 3e corps dans ce référentiel
  - Effet de la **force d'inertie** (« centrifuge »). Calculs analytiques présentés au cours (en résumé).
- On examine la stabilité des points d'équilibre
  - Effet de **Coriolis**. Simulations numériques présentées au cours

Numériquement: on reste dans le référentiel (inertiel) du centre de masse

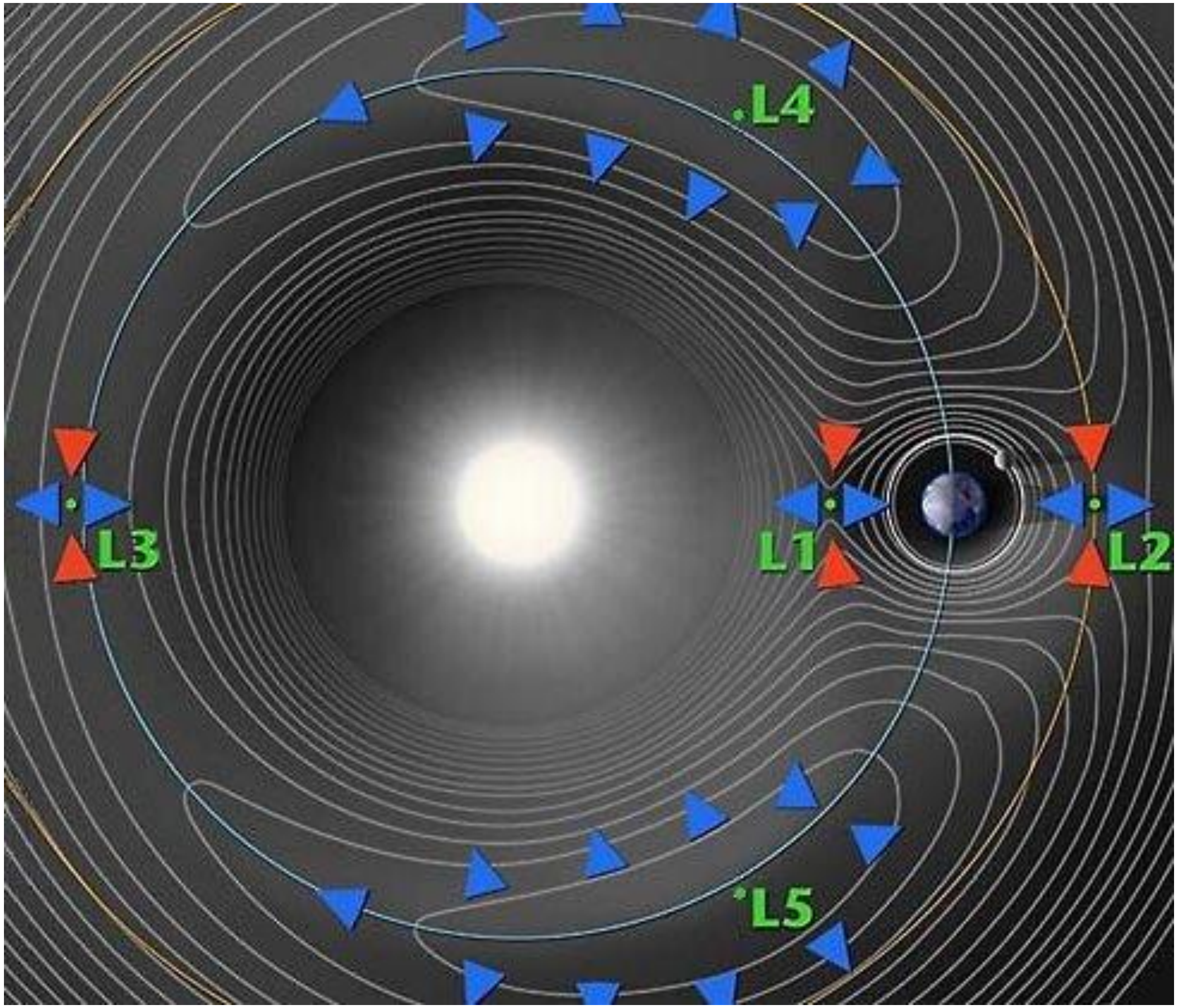
Points de Lagrange, Soleil-Terre



Source: www.nasa.gov

N.B.: Soleil-Jupiter: astéroides Troyens en L4 et L5 (Exercice 4)

Stabilité des points de Lagrange



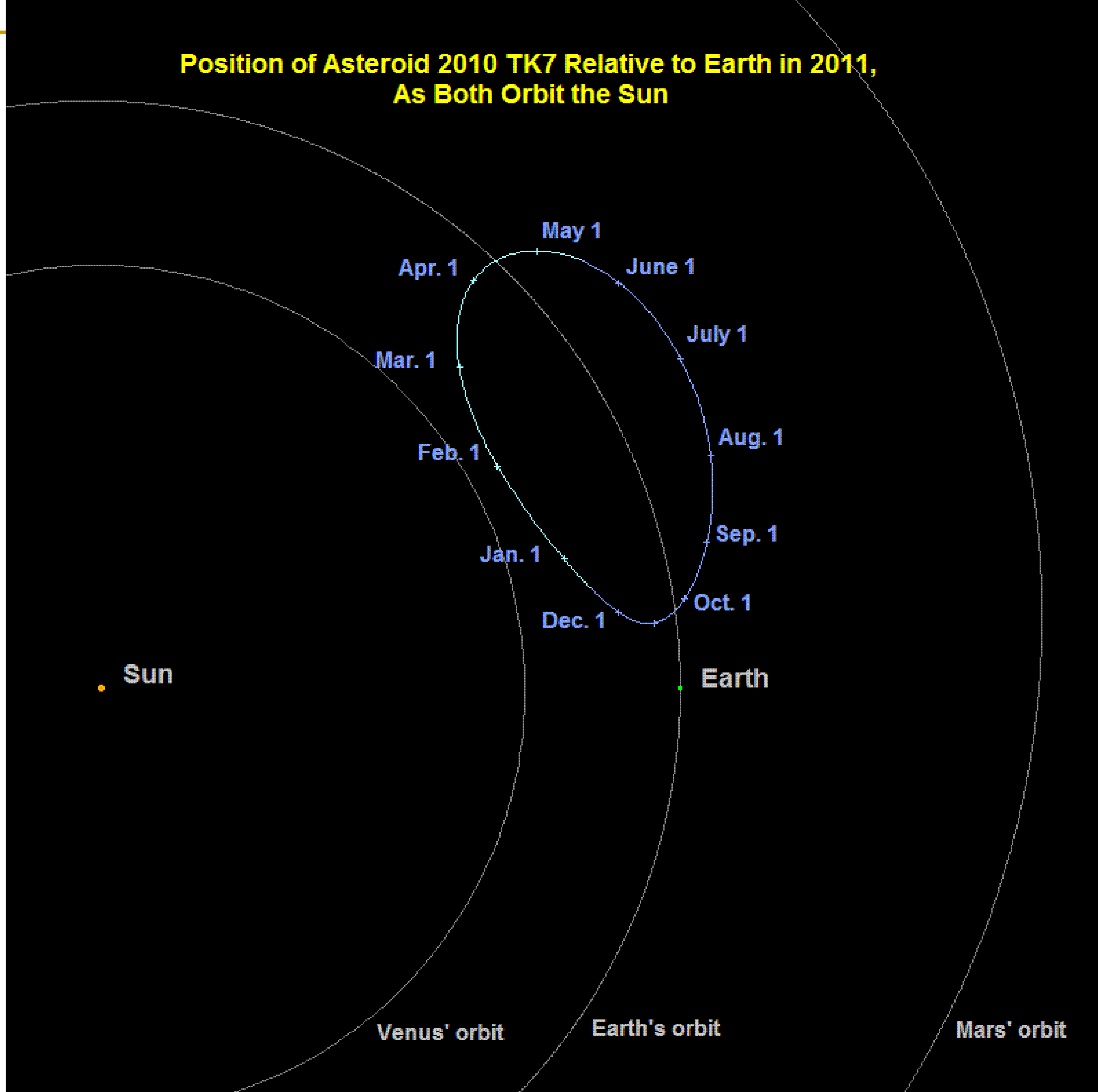
Source: wikipedia.org

Equipotentielles dans le référentiel tournant dans lequel m1, m2 sont fixes

Stabilité des points de Lagrange - Coriolis

- Nous avons constaté que les orbites au voisinage des points de Lagrange L1, L2, L3 sont instables:
  - une condition initiale voisine du point d'équilibre conduit à des mouvements qui s'écartent fortement du point d'équilibre
- Qu'en est-il de L4 et L5 ? (EX.4)
  - Les orbites au voisinage de L4 et L5 sont ***stables***, bien que ces points correspondent à des ***maxima*** du potentiel effectif
  - Il doit donc s'agir d'un effet d'une force qui ne dérive pas d'un potentiel: c'est la force de Coriolis!
  - Testons avec la simulation!

Phys. Num. Semaines 11-12



http://neo.jpl.nasa.gov/images/2010tk7_rf3.gif

Phys. Num. Semaines 11-12

Points de Lagrange: des tremplins pour l'exploration spatiale

AIAA

The Lunar L_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond

Martin W. Lo
Navigation and Mission Design Section
Jet Propulsion Laboratory
California Institute of Technology

Shane D. Ross
Control and Dynamical Systems
California Institute of Technology

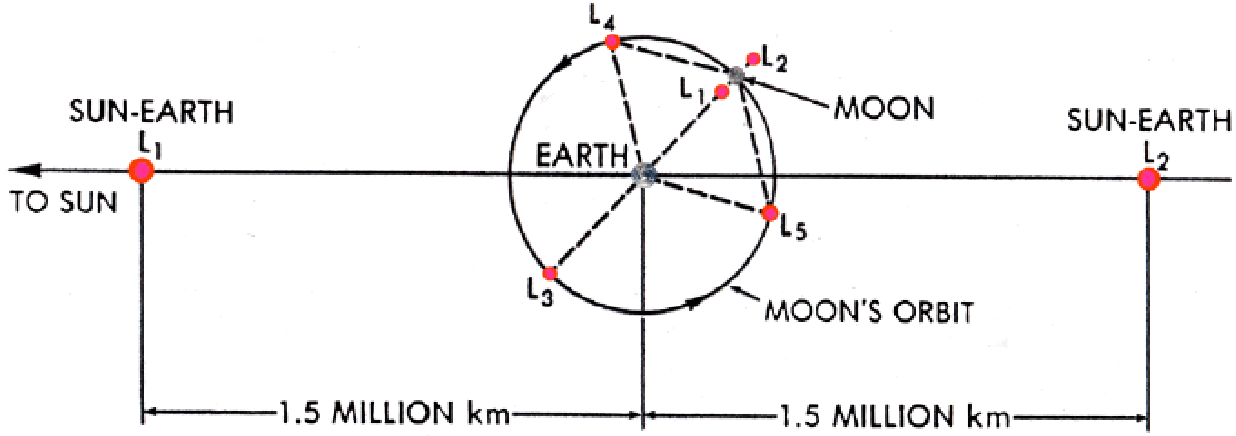
AIAA Space 2001 Conference

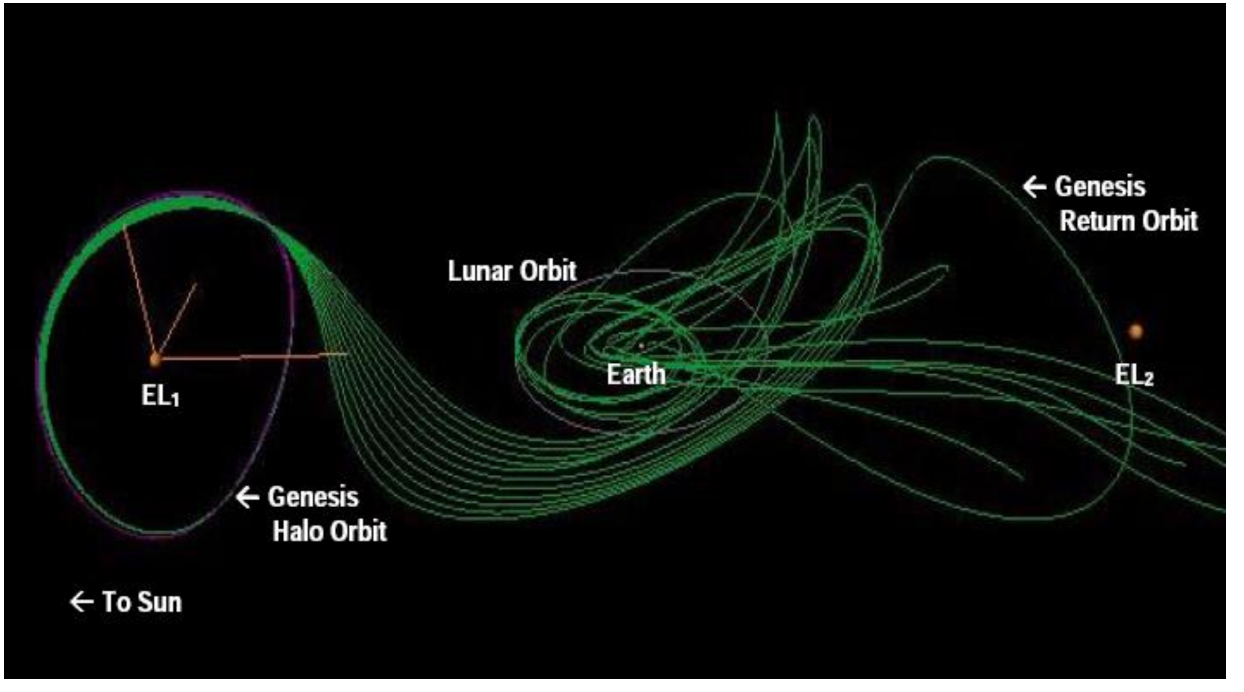
www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers
/**lunarGateway**.pdf

Albuquerque, New Mexico August 28-30, 2001

"Our Solar System is interconnected by a vast system of tunnels winding around the Sun generated by the Lagrange Points of all the planets and their moons. These passageways are identified by portals around L1 and L2, the halo orbits. By passing through a halo orbit portal, one enters this ancient and colossal labyrinth of the Sun. This natural Interplanetary Superhighway System (IPS, see Figure 1) provides ultra-low energy transport throughout the Earth's Neighborhood, the region between Earth's L1 and L2…."

Phys. Num. Semaines 11-12





www.gg.caltech.edu/~mwl/publications/papers/**lunarGateway**.pdf