

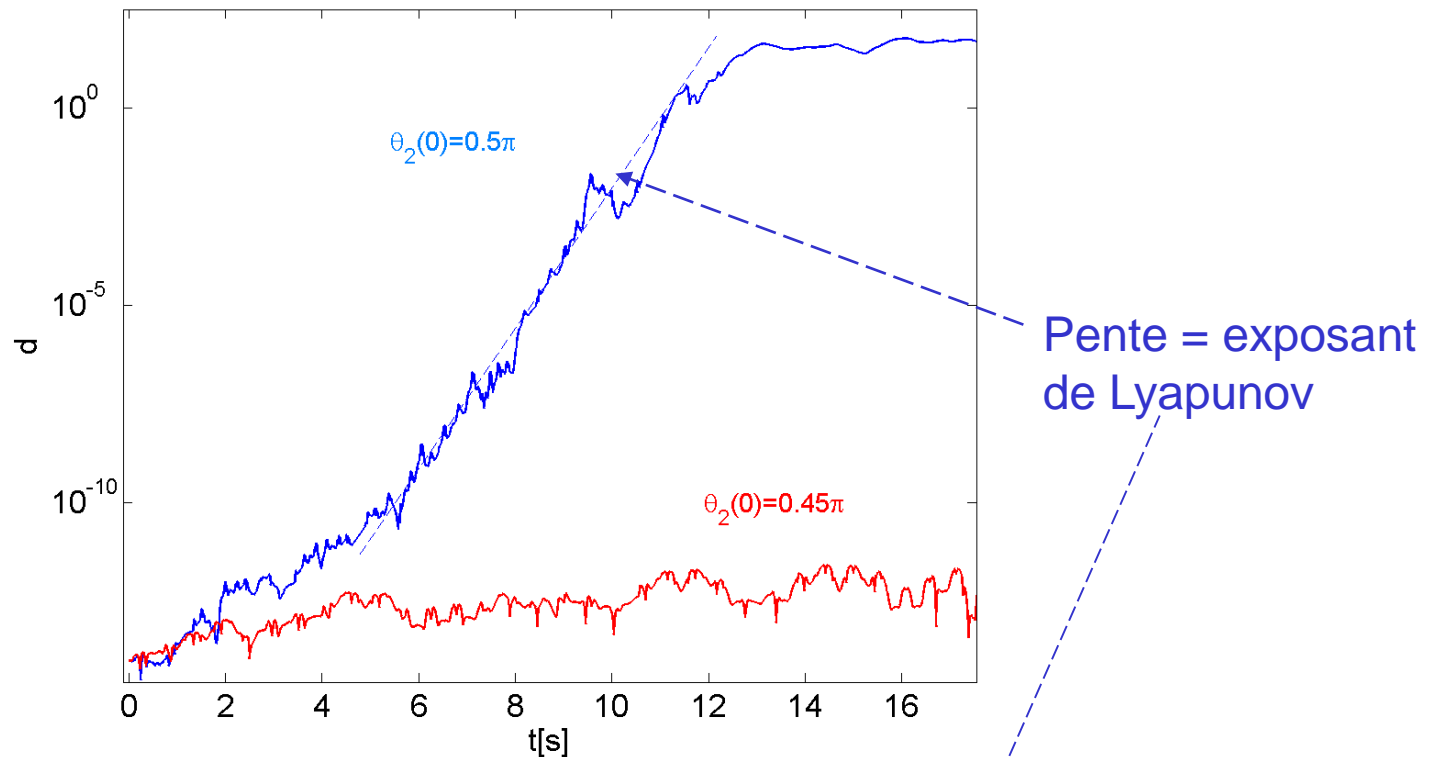
# Physique Numérique sem. 9-10

- Notes de Cours: nouvelle version (22.3) sur Moodle
- Pendule excité et amorti, chaos, imprédictabilité, attracteurs étranges et stabilisation non-linéaire (expériences et simulations)
- Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (section 2.3.5)
- Problèmes 1D à valeurs aux bords, traités comme problèmes à valeur initiale
  - Atmosphère planétaire à l'équilibre (Section 3.1.1)
- Gravitation. Problème à N corps (Sections 2.4 et 2.5)
  - 1 corps. Mvmt central en  $1/r^2$ . Lois de Kepler.
- Numérique: schémas à  $\Delta t$  variable (adaptatif)
- Exercice 4, dès la semaine 10 (25 novembre)

# « Signature » du chaos

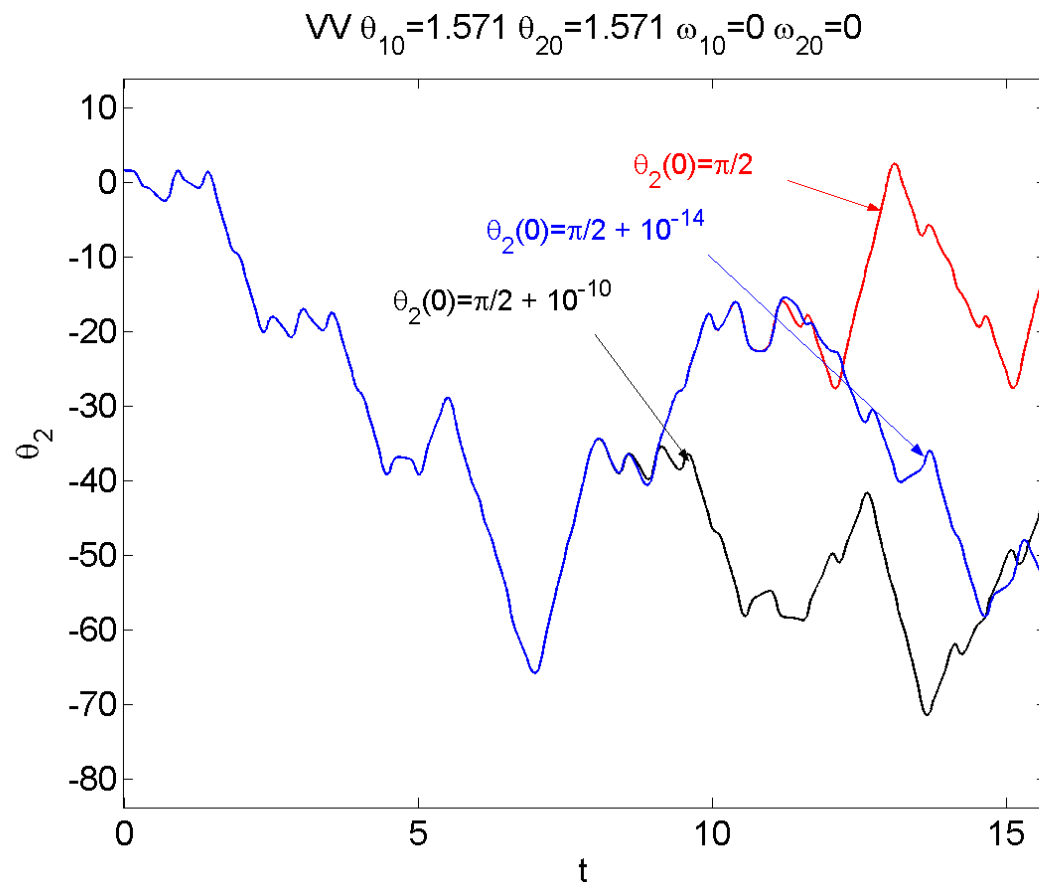
- Sensibilité extrême aux conditions initiales:
  - Soit deux conditions initiales différentes. Le mouvement est dit chaotique si, aussi ***petite*** que soit la différence entre les deux conditions initiales, il y a un ***temps  $t$  fini*** au-delà duquel les orbites respectives des deux mouvements ***s'écartent exponentiellement*** l'une de l'autre. L'exposant de l'exponentielle est appelé exposant de Lyapounov.

# Sensibilité aux conditions initiales



- Distance entre 2 orbites
- Régime chaotique : divergence exponentielle
- Régime non chaotique: pas de divergence exponentielle

# Chaos et imprédictabilité



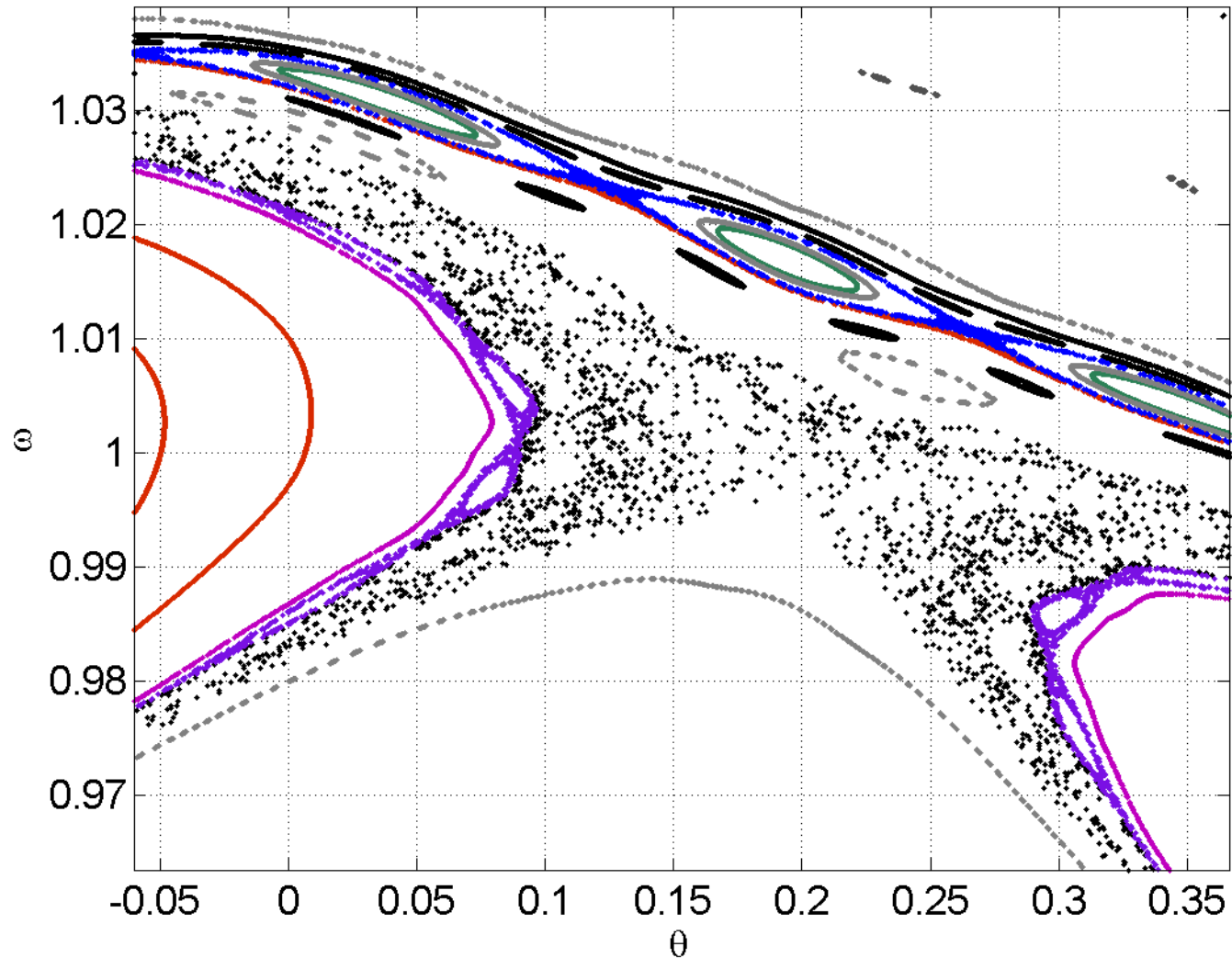
- $10^{-10}$ : taille atome,  $10^{-14}$ : taille 10 noyaux atomiques!

# Sections de Poincaré – pendule excité

- Excitation par une perturbation sinusoïdale
- Section de Poincaré: on représente un point de l'espace de phase, p.ex. (angle, vitesse angulaire) à chaque période de l'excitation.
  - Hint: prenez  $\Delta t = (2\pi/\Omega)/n_{\text{step}}$ ,  $n_{\text{step}}$ =nombre de pas de temps par période, et mettez **sampling égal à nstep** en input du code: l'output contiendra ainsi directement les coordonnées des sections de Poincaré.
  - Hint: représentez la section de Poincaré avec  $\theta$  **modulo  $2\pi$  (ou entre  $-\pi$  et  $+\pi$ )**
- Cas sans amortissement: chaque condition initiale produit une section de Poincaré différente. Topologie de surfaces imbriquées, de chaînes d'îlots, et de régions stochastiques signalant la présence de chaos.

# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale zoom

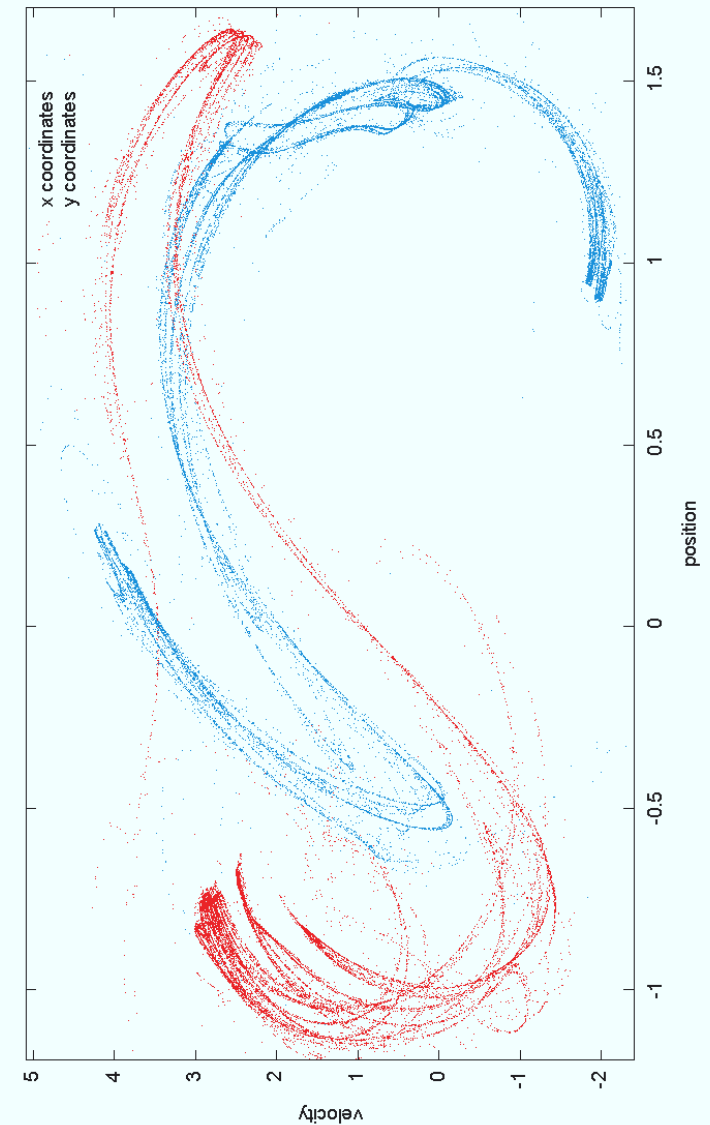
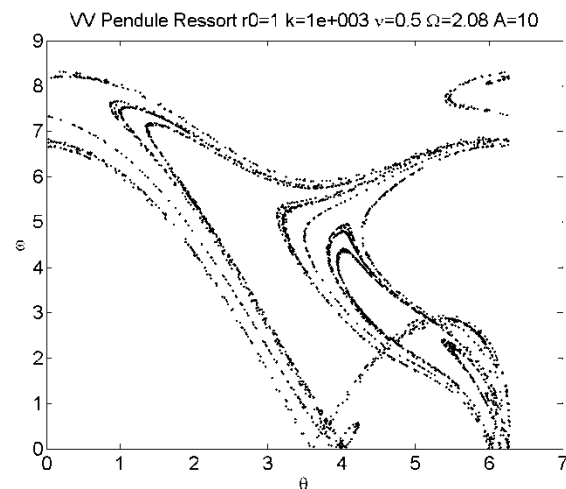
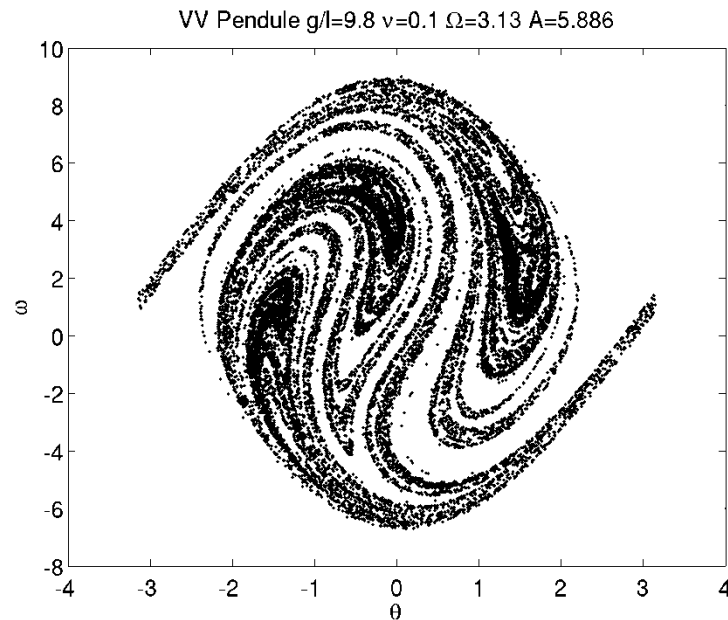
VV Pendule  $g/l=1$   $\nu=0$   $\Omega=1$   $A=0.5$



# Pendule excité *et* amorti - attracteurs

- Section de Poincaré: on représente une projection dans un plan de l'espace de phase des positions à chaque période de l'excitation.
- Attracteur: toute condition initiale (dans un domaine appelé « bassin d'attraction ») conduit à une section de Poincaré de structure similaire.
- **Attracteur** « étrange »: cas **chaotique**.
  - L'«étrangeté» vient du fait que (1) des conditions initiales même infinitésimalement voisines conduisent en un temps relativement *court* à des orbites qui divergent exponentiellement l'une de l'autre; (2) des conditions initiales même très éloignées l'une de l'autre conduisent au même attracteur pour des temps *longs*.

# Galerie d'attracteurs étranges





# Simulation numérique de systèmes en régime chaotique

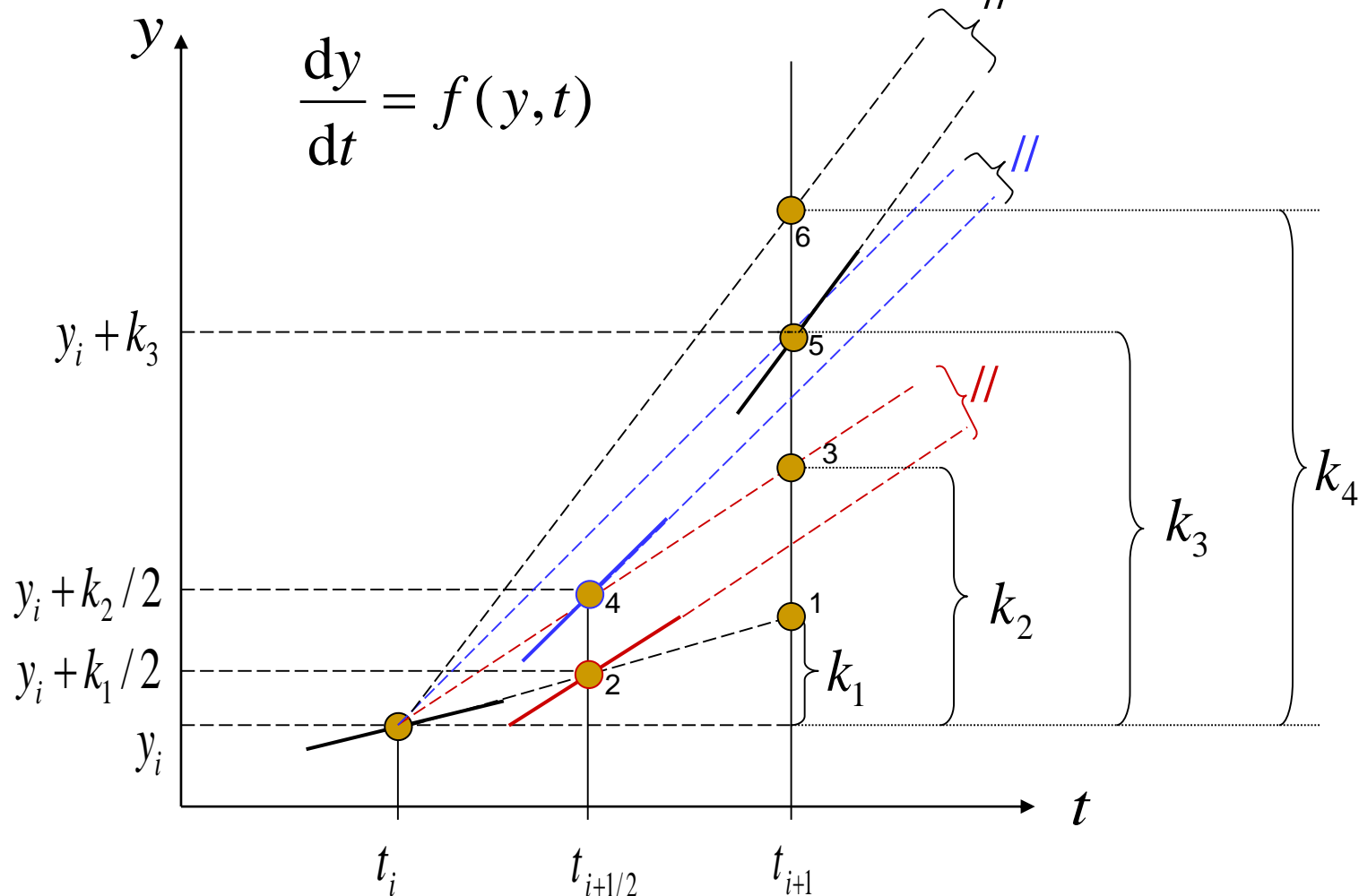
- La sensibilité extrême aux conditions initiales, avec divergence  $\sim \exp(\lambda t)$  conduit à ***l'impossibilité de converger numériquement la solution pour des temps  $t > \sim 1/\lambda$***
- Cependant:
  - La structure de l'espace de phase (p.ex. l'étendue de la zone stochastique et/ou la forme de l'attracteur étrange) converge numériquement

# Exercice 4: Rentrée d'un vaisseau spatial dans l'atmosphère.



Apollo 13 est à 310'000km de la terre. Ils doivent interrompre leur mission suite à une grave avarie. Ils demandent les paramètres de la trajectoire qui les ramènera sains et saufs sur terre. Sans qu'ils ne ratent la cible. Sans qu'ils s'écrasent. Sans qu'ils ne subissent d'accélération trop forte. Sans que leur vaisseau ne se consume sous l'effet de la puissance des forces de friction aérodynamiques.

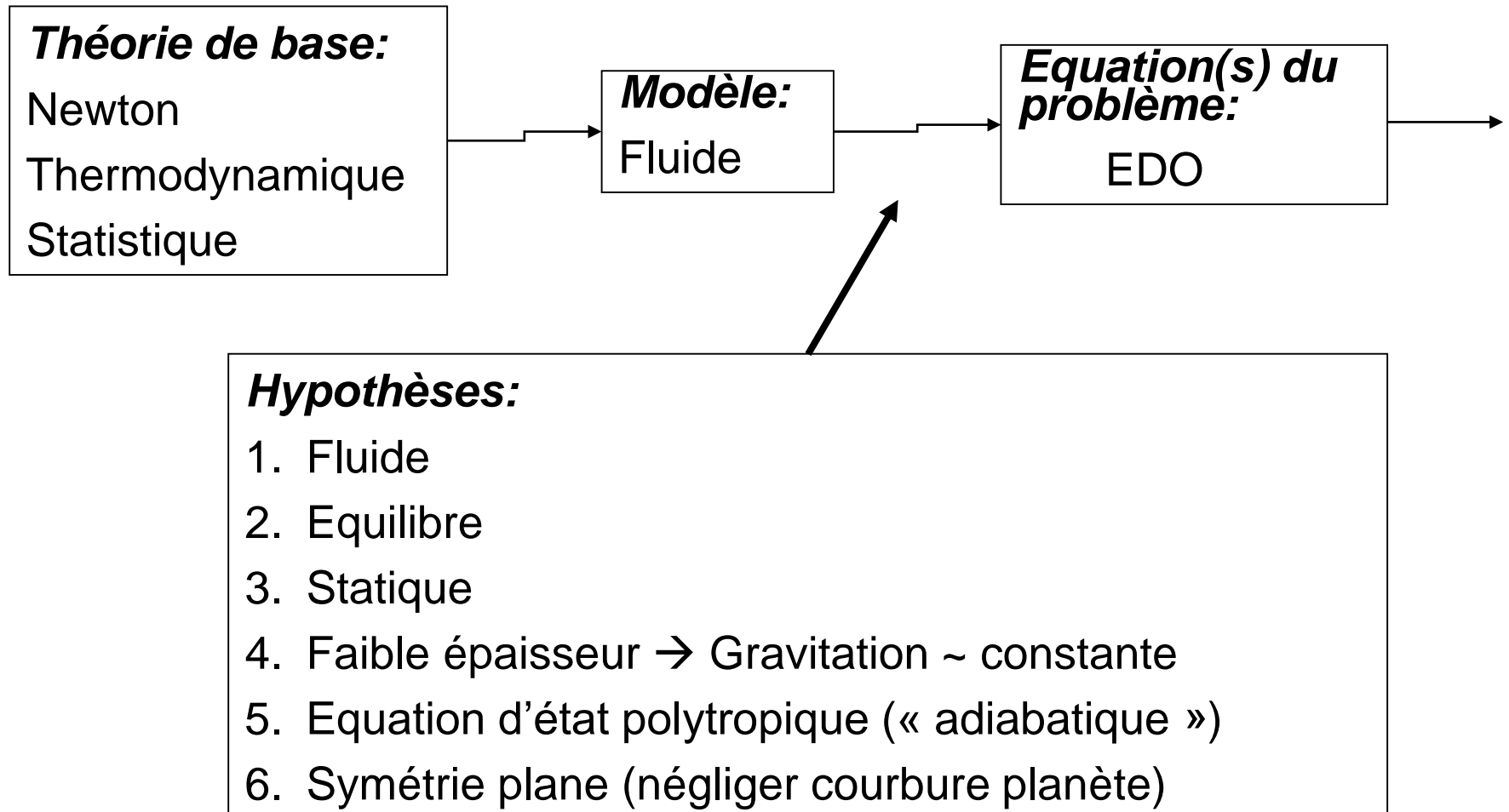
# Pour l'Exercice 4: Runge-Kutta ordre 4



$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.133)$$

# Atmosphère planétaire

## ■ 3.1.1 Cas 1D, traité comme problèmes à valeur initiale



# Atmosphère planétaire (suite)

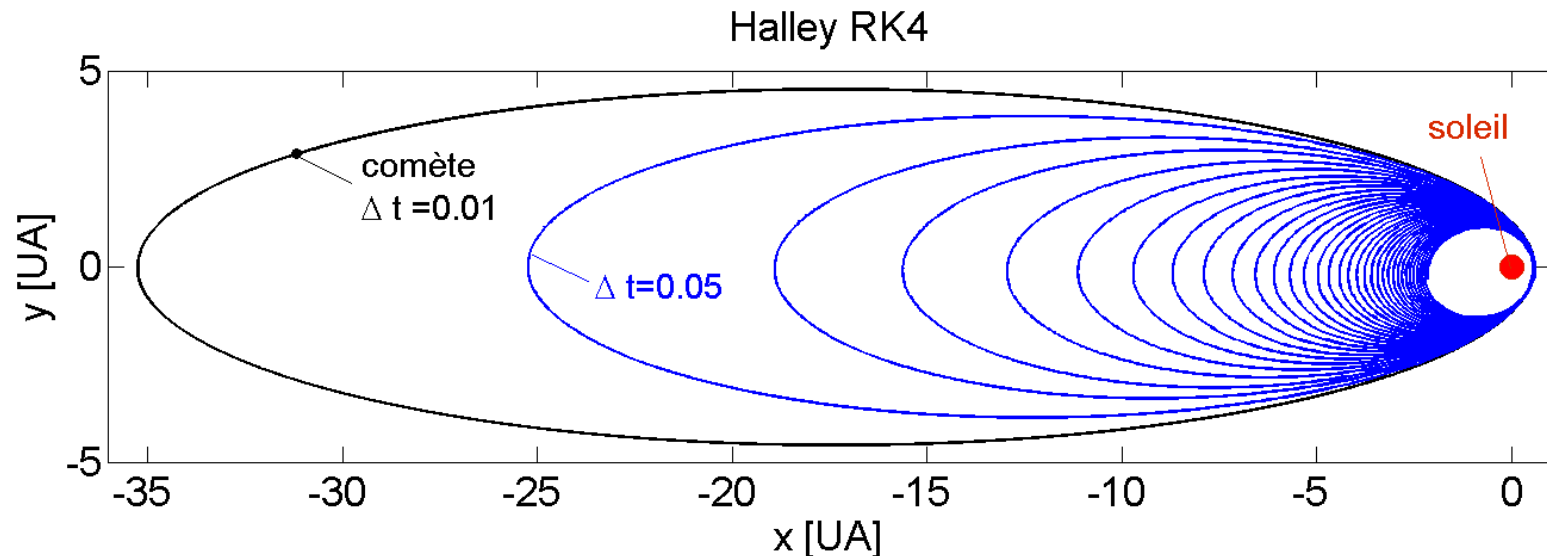
$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{g}{C\gamma}\rho^{2-\gamma}$$

$$\rho = \left( \rho_0^{\gamma-1} - \frac{g(\gamma-1)}{C\gamma} z \right)^{1/(\gamma-1)}$$

- Problème: **singularité** des équations lorsque  $\rho=0$ 
  - ❑ Singularité physique: on passe du fluide au vide
  - ❑ Singularité mathématique: dérivées d'ordre  $m > 1/(\gamma-1)$  singulières  $\rightarrow$  non analytique au voisinage de  $\rho=0$
  - ❑ Problème avec l'intégration numérique
  - ❑ Méthode: obtenir analytiquement le comportement de la solution au voisinage de la singularité
  - ❑ Initialiser l'intégration numérique à partir d'un point voisin de la position singulière, (distance  $\varepsilon$ ), en satisfaisant les conditions analytiques précédemment obtenues.
  - ❑ Faire une étude en variant  $\varepsilon$  ( $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ )

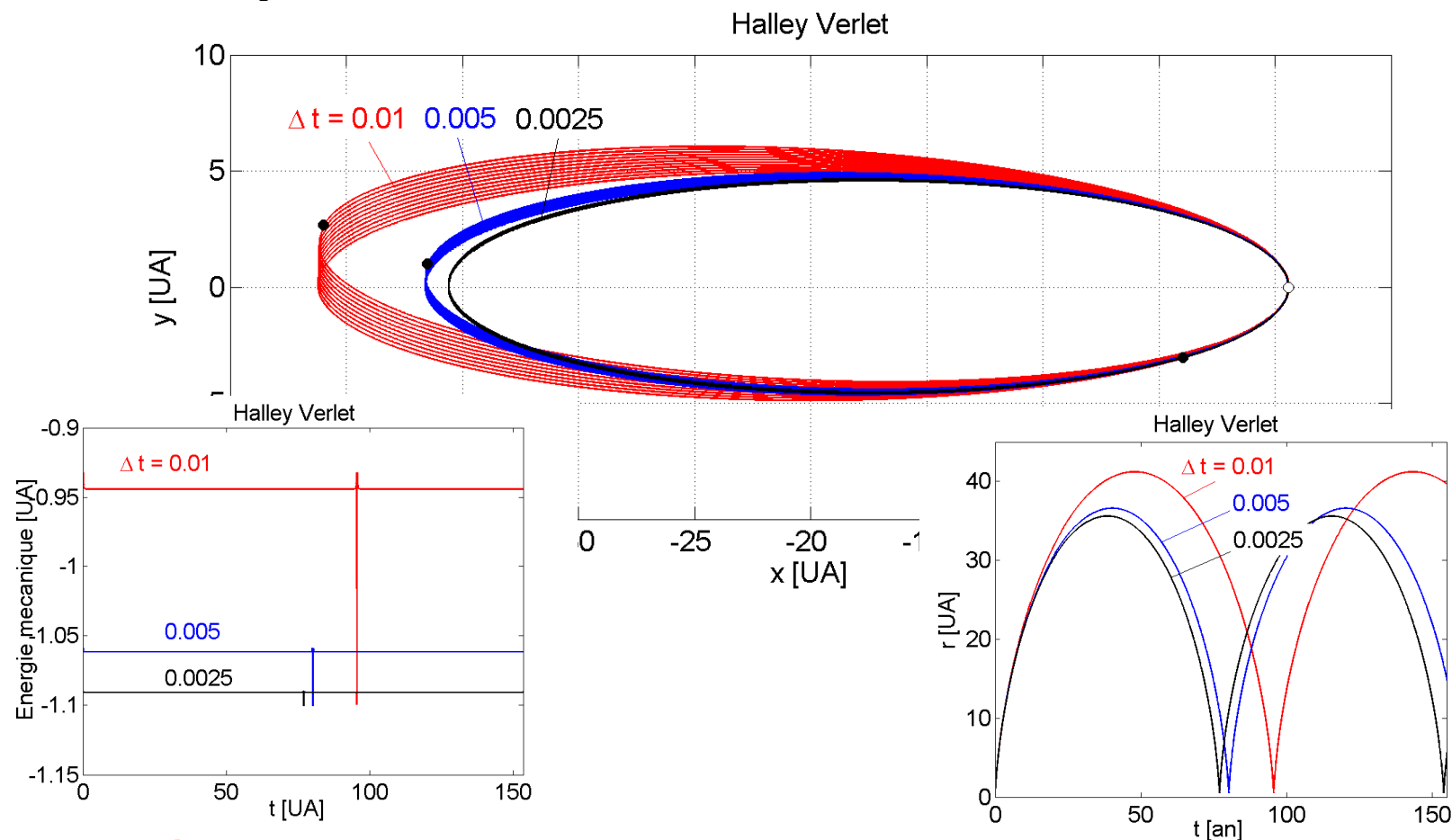
# Gravitation - 1 corps

- Comète de Halley
- Orbite elliptique fortement excentrique  
 $r_{\max}/r_{\min}=59.6$ .  $T=75.986$  ans
- Unités astronomiques (UA):
  - Demi grand axe orbite terre (150 mio km)



Intégration numérique avec Runge-Kutta d'ordre 4 et pas temporel  $\Delta t$  constant

# Halley, Verlet, 1000 ans



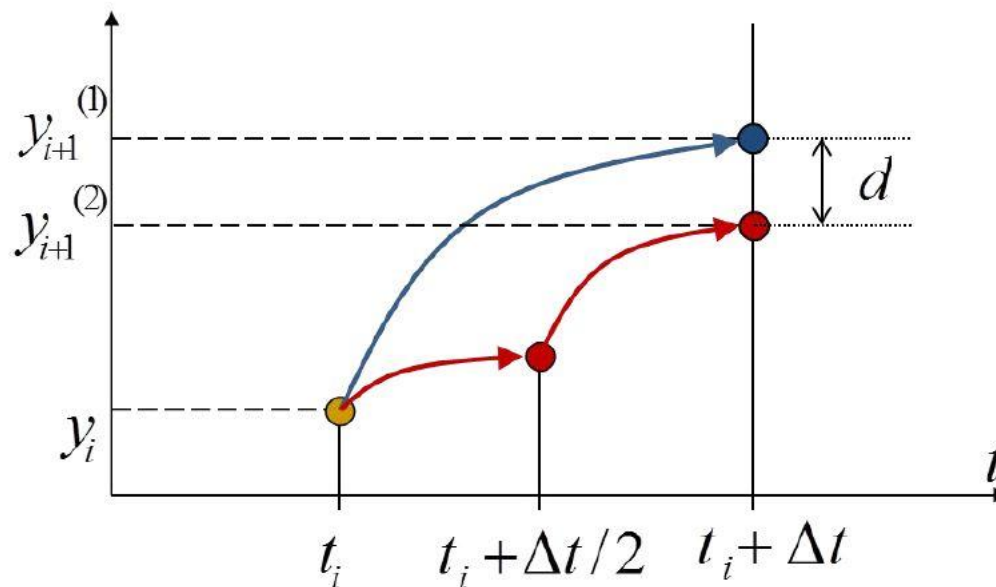
- **Précession non physique.**
- Bonne conservation de Emec en moyenne sur de longs temps.  
**Mauvaise lorsque  $r=r_{\min}$ , (accélération maximale).**
- La période obtenue converge en  $\Delta t^2$ , mais pas très grande précision.

# Schémas à pas de temps adaptatif

- On a constaté que l'erreur était importante aux instants où le corps est fortement accéléré
- Raffiner le  $\Delta t$  à ces instants, augmenter  $\Delta t$  autrement... comment faire ceci avant de connaître la solution?
- Algorithme de  $\Delta t$  adaptatif: à chaque pas de temps, comparer les résultats obtenus après
  - a) 1 pas de  $\Delta t$
  - b) 2 pas de  $\Delta t/2$
- En supposant une loi de convergence pour l'algorithme de base utilisé, on peut en déduire quel  $\Delta t$  choisir, i.e. **contrôler** l'algorithme.  
**(développements au tableau)**



# Schéma à pas de temps adaptatif



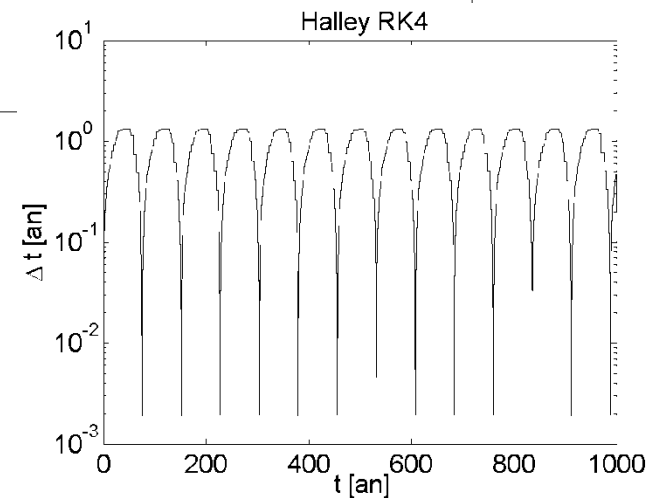
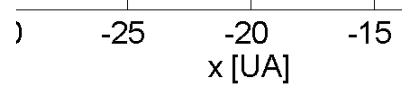
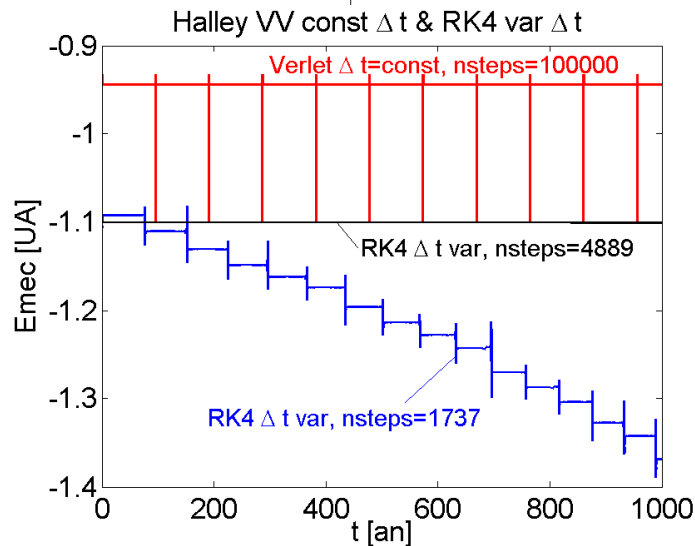
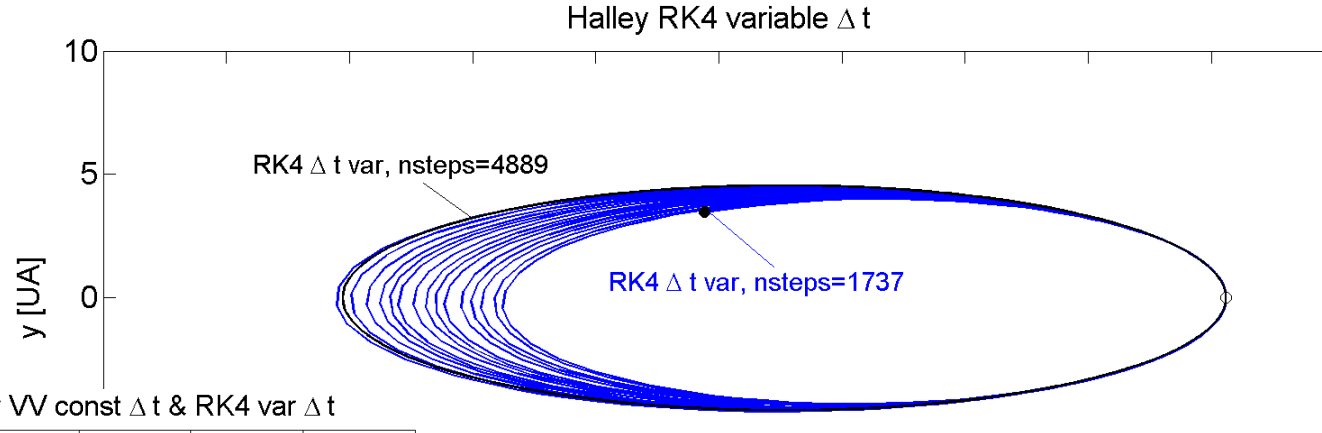
Chacune des flèches symbolise un pas complet d'un algorithme de base: par exemple les 4 étapes d'un schema Runge-Kutta du 4e ordre.

On veut choisir  $\Delta t$  de telle sorte que  $d$  soit inférieur à une valeur donnée  $\varepsilon$

$$d < \varepsilon$$

$\varepsilon$  joue le rôle d'un paramètre de **contrôle** de l'algorithme, et n'est PAS la précision obtenue sur  $y$  à la fin de la simulation. Cette dernière doit être obtenue par une étude de convergence:  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

# Halley, Runge-Kutta 4e ordre, $\Delta t$ variable

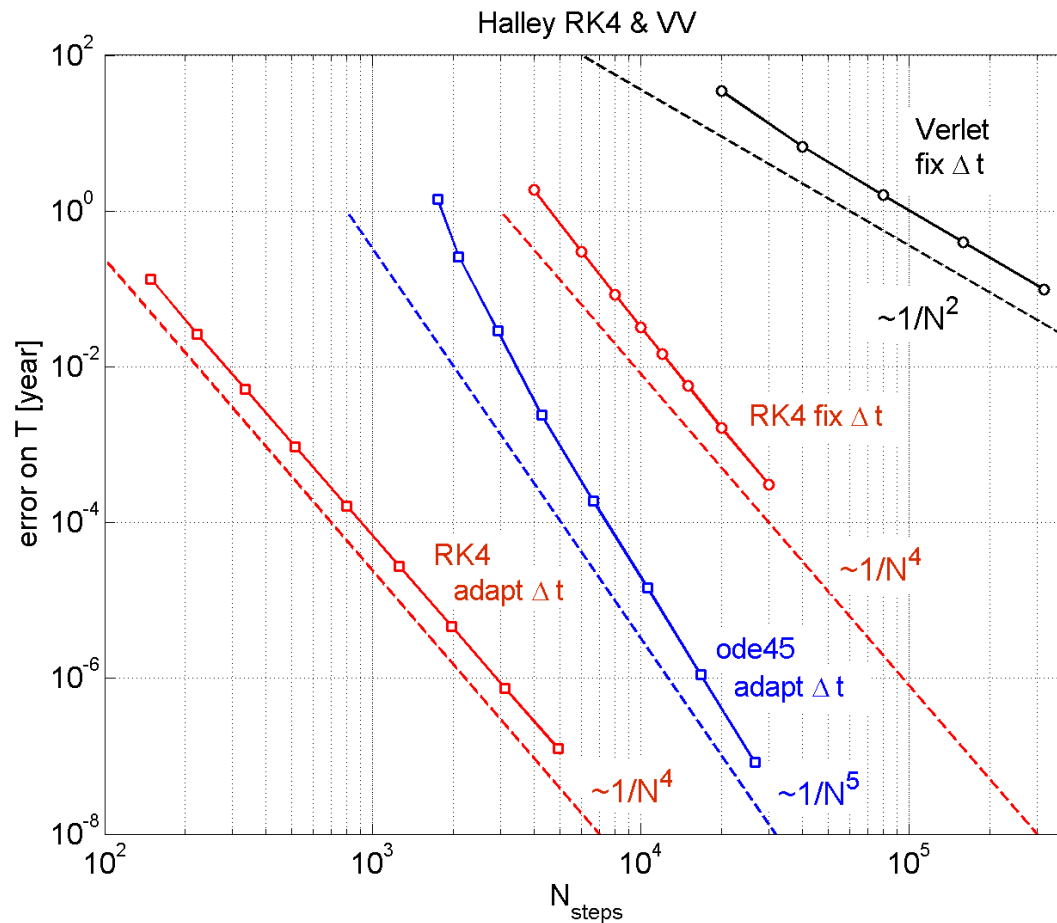


Runge-Kutta a une tendance à long terme de diminuer  $E_{\text{mec}}$

Le pas  $\Delta t$  variable permet une très grande efficacité

Convergence très rapide

# Halley, Verlet, Runge-Kutta 4, $\Delta t$ fixe ou variable, convergence de la période



Pour 5000 pas de temps, on est 10 millions de fois plus précis avec le schéma adaptatif qu'avec  $\Delta t$  fixe!

# En résumé:

- Verlet conserve bien  $E_{\text{mec}}$  *en moyenne sur de longues périodes*, mais donne une **précession non physique**.
- Runge-Kutta 4e ordre: converge très rapidement la période, la distance maximale, etc, mais **diminution séculaire non physique de  $E_{\text{mec}}$**
- **Un algorithme à pas  $\Delta t$  adaptatif est de plusieurs ordres de grandeur plus efficace qu'à  $\Delta t$  fixe.**

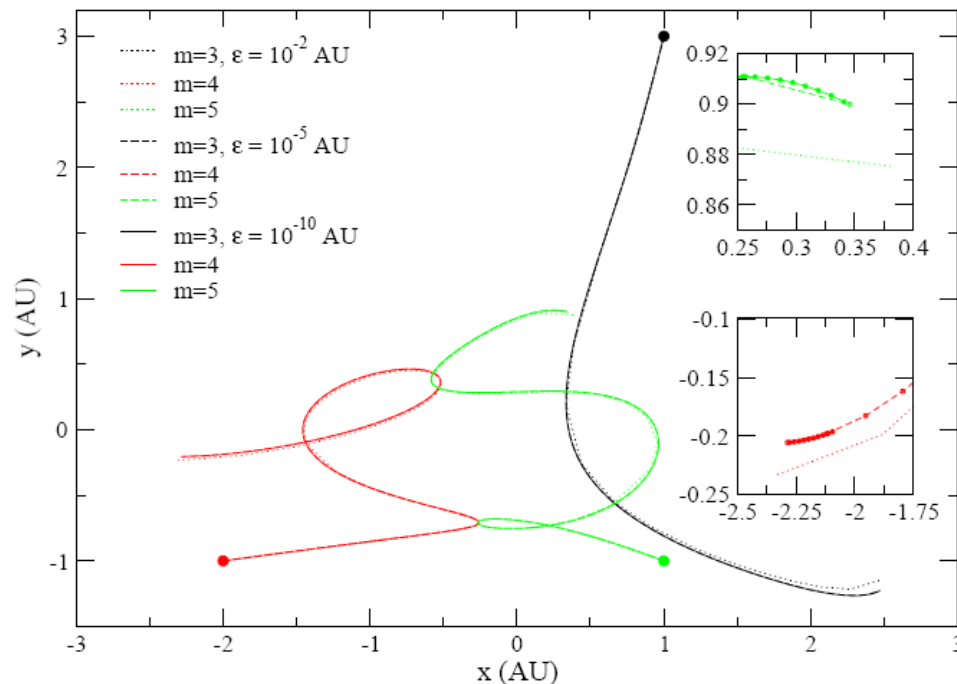
# Problème à 2 corps

- On se place dans le référentiel du centre de masse
- Le mouvement relatif (i.e. pour  $r_2 - r_1$ ) est identique au mvmt à 1 corps, mais avec une « masse réduite »
- Le mvmt de chacun des 2 corps dans le référentiel du centre de masse est donc identique au mvmt à 1 corps (à des rapports de masse près)
  - Les lois de Kepler s'appliquent!
    - Orbites= côniqes avec un des foyers au centre de masse
    - Loi des aires

# Problème à 3 corps: exemples

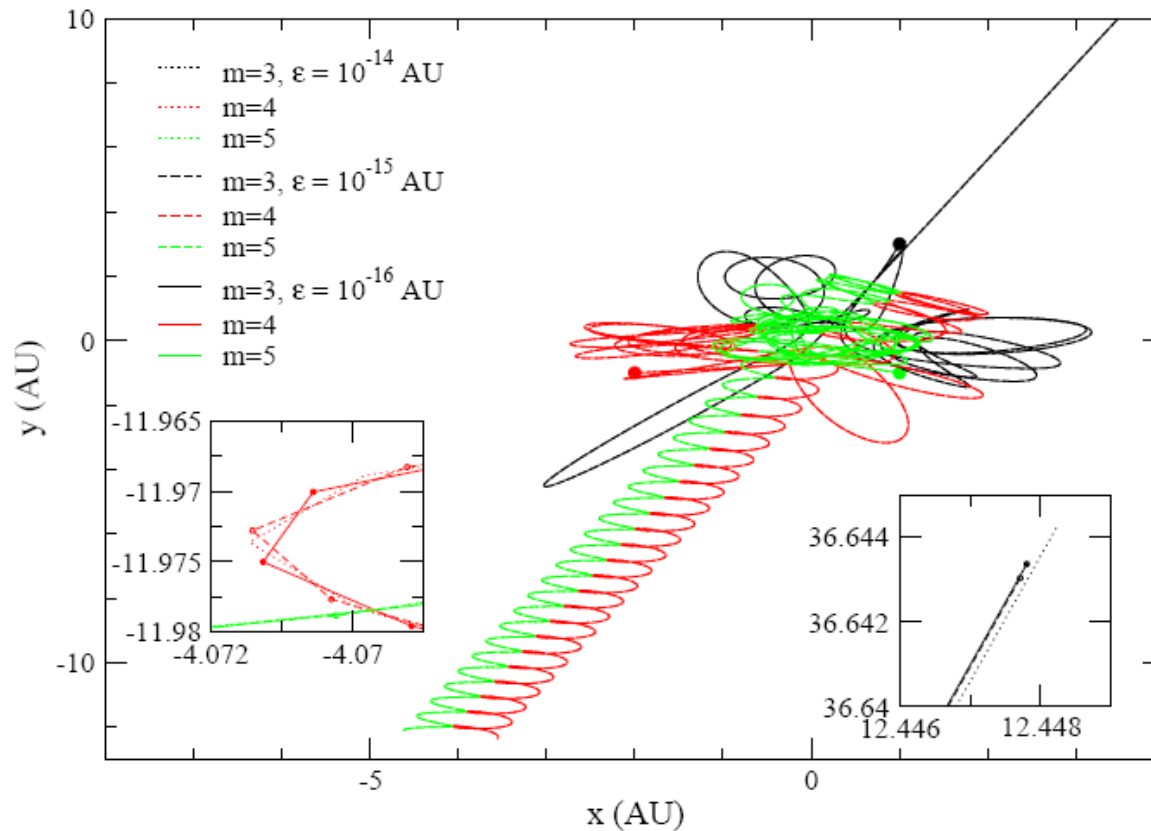
## Pythagore joue au billard cosmique

- 3 corps de masses 3,4,5, placées initialement aux sommets d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3,4,5 (unités astronomiques). Les vitesses initiales sont nulles.
- Runge-Kutta ordre 4, pas variable adaptatif.



$t_{\text{fin}} = 5 \text{ ans}$

# 80 ans



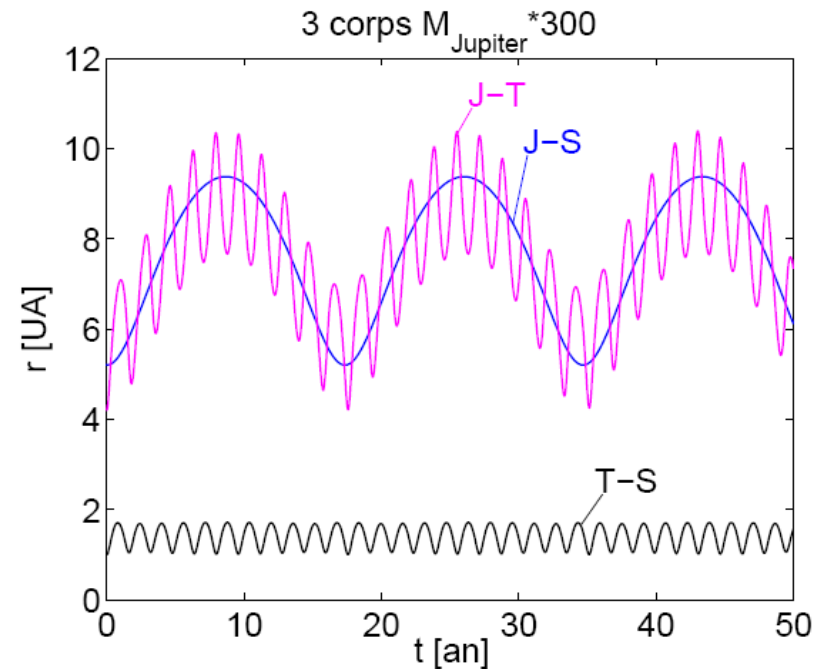
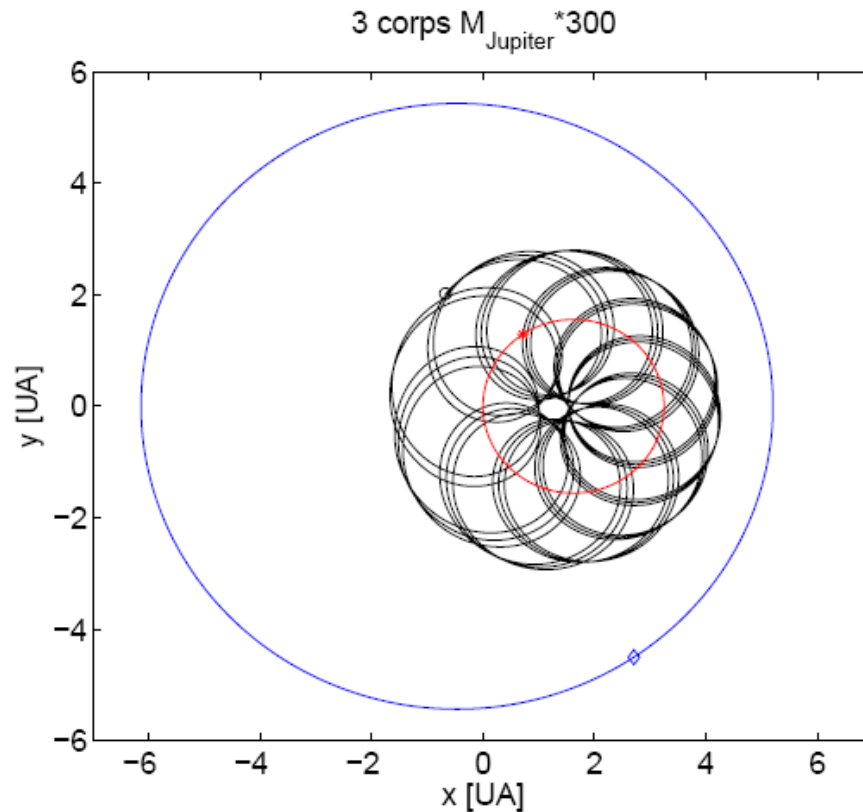
- Quasi-collisions: problème difficile, même avec  $\Delta t$  adaptatif
  - Format « long double »
- Formation d'une étoile double et éjection de la troisième

### 3 corps: soleil, « Jupiter », terre

- Mvmt de la terre dans le système (soleil, « jupiter »), où on a multiplié la masse réelle de Jupiter par un facteur arbitraire  $f$ .
- Cf Notes de Cours, sections 2.5.1 et 2.5.2
- Simulations avec les schémas de Verlet et de Runge-Kutta 4e ordre

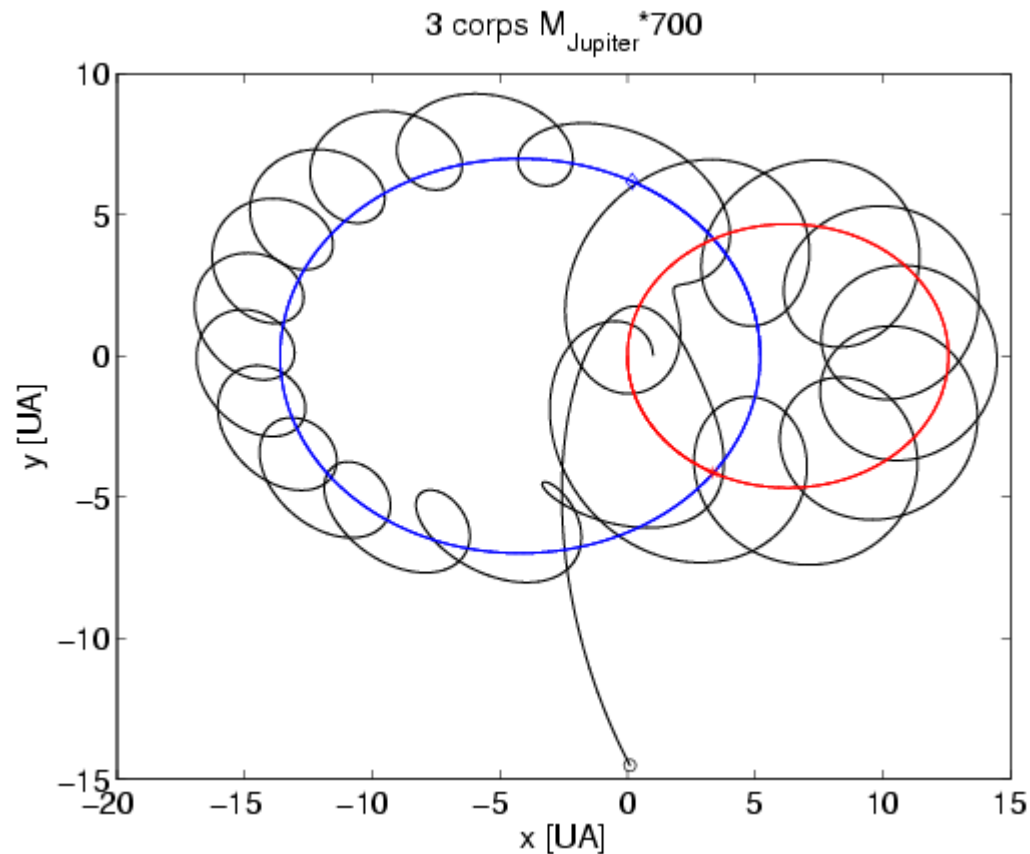


# Jupiter\*300



## ■ Mouvement quasi-périodique

# Jupiter\*700



100 ans

$\Delta t = 0.001$  an

Verlet

- La terre se fait capturer par « Jupiter », puis est « éjectée »...
- Chaos: sensibilité aux conditions initiales, difficulté de convergence