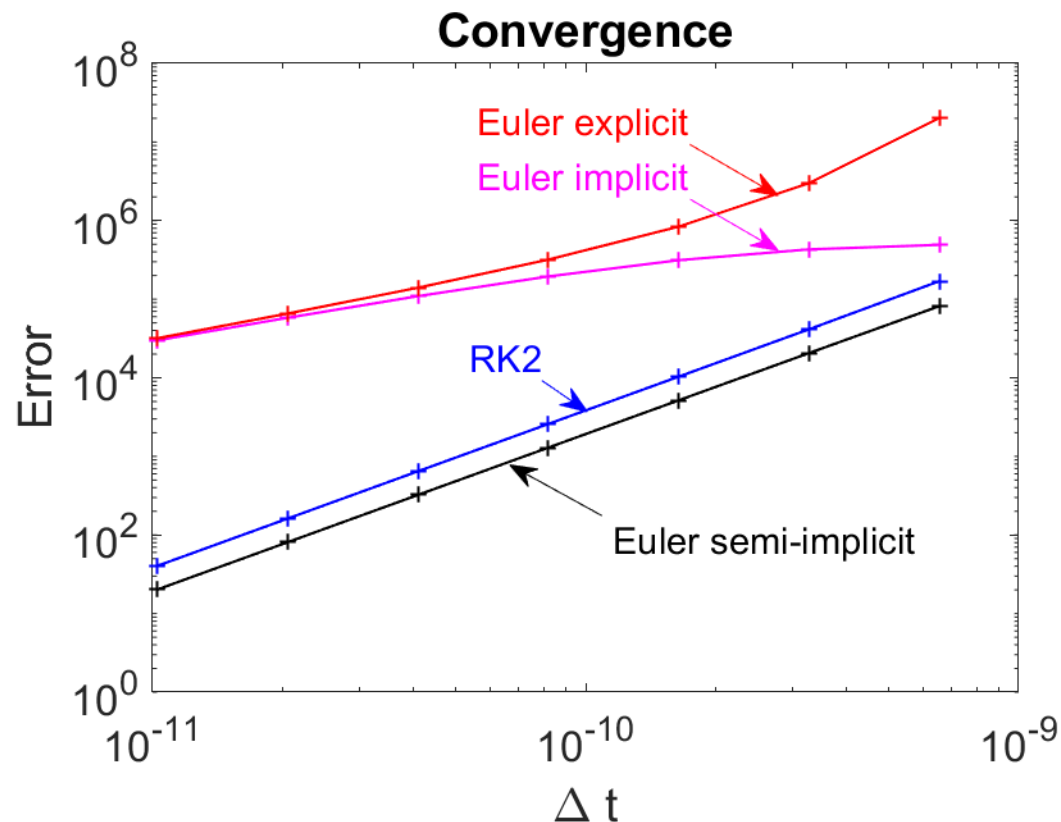


# Physique Numérique I semaine 8

- Retour sur l'Exercice 2: pourquoi le schéma d'Euler *semi-implicite* converge à l'ordre 2 en  $\Delta t$ , alors que les schémas d'Euler explicite et implicite convergent à l'ordre 1 en  $\Delta t$  ?

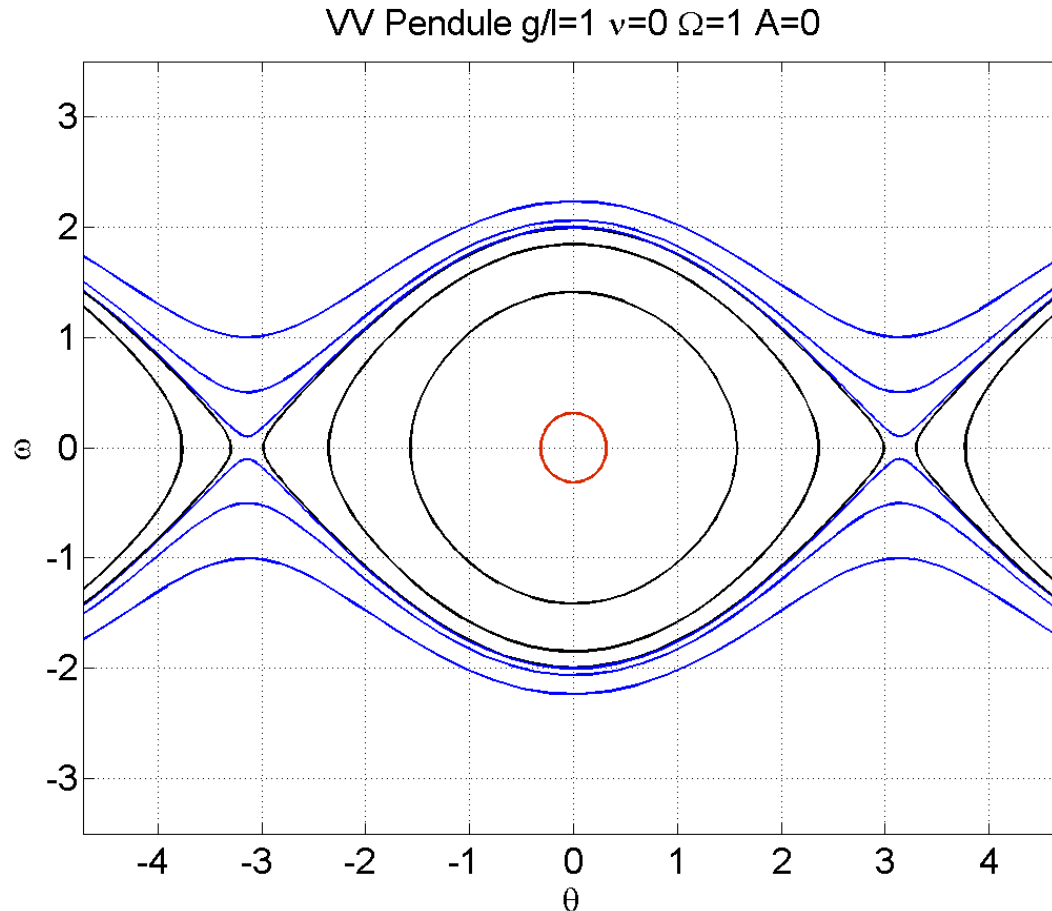


Preuve que RK2  
est du 2<sup>e</sup> ordre:  
Notes de Cours  
section 2.3.8

# Physique Numérique I semaine 8

- Orbites dans l'espace de phase
  - Schémas symplectiques, analogie avec écoulement incompressible
- Pendules couplés, excitation résonante ([expérience](#))
- Pendule articulé ([expériences](#) et simulations)
  - Petits mouvements, grands mouvements, fréquences
  - Chaos: sensibilité aux conditions initiales, instabilité des orbites, exposant de Lyapounov
  - Sections de Poincaré
- Pendule simple non amorti, avec excitation
- Pendule simple amorti, avec excitation ([exp](#) et simul)
  - Sections de Poincaré: attracteurs étranges.
  - Stabilisation non-linéaire de la position d'équilibre instable ([exp](#))

# Euler-Cromer et Verlet sont symplectiques



Analogie:

Ensemble d'orbites dans  
l'espace de phase



Ecoulement fluide

Symplectique

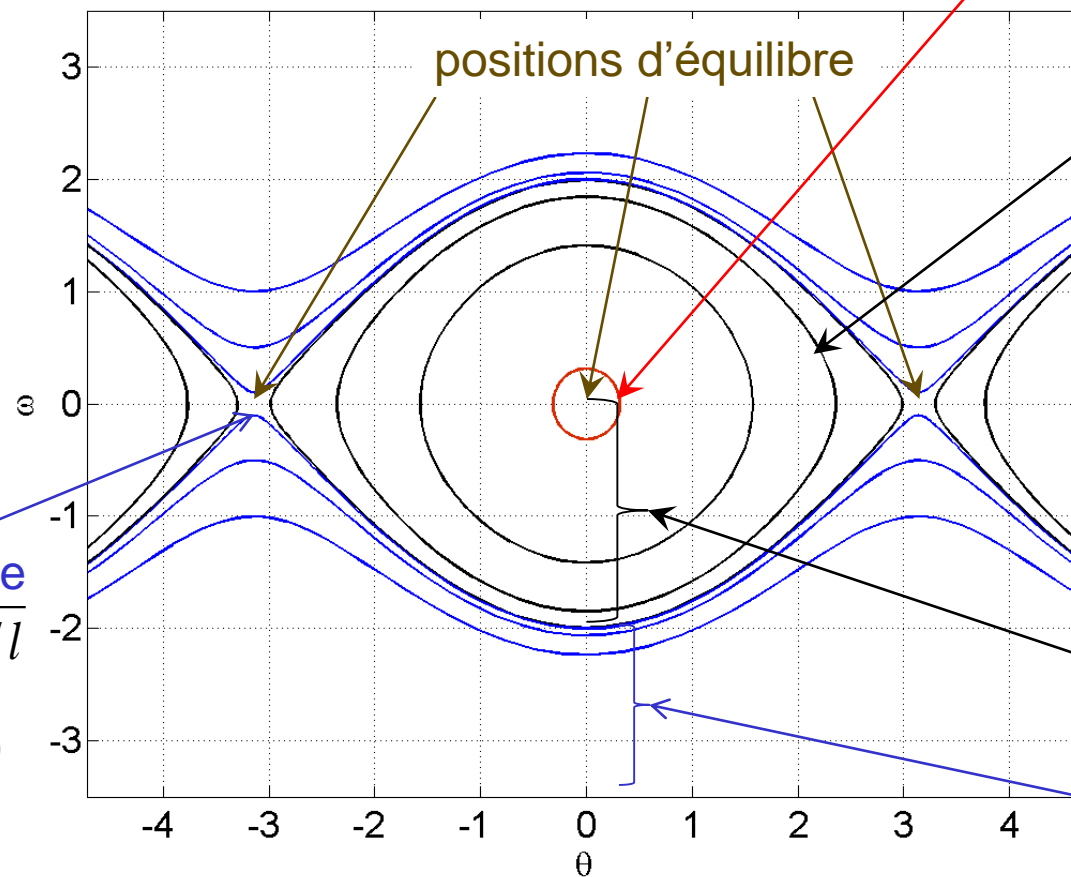


Incompressible

- Conservation du « volume » dans l'espace de phase  $(x,v)$

# Orbites dans l'espace de phase

VV Pendule  $g/l=1$   $v=0$   $\Omega=1$   $A=0$



Petits mvmts,  
fréquence propre  $\sqrt{g/l}$   
indépendante de  
l'amplitude

Grands mvmts,  
Période  
dépendant de  
l'amplitude

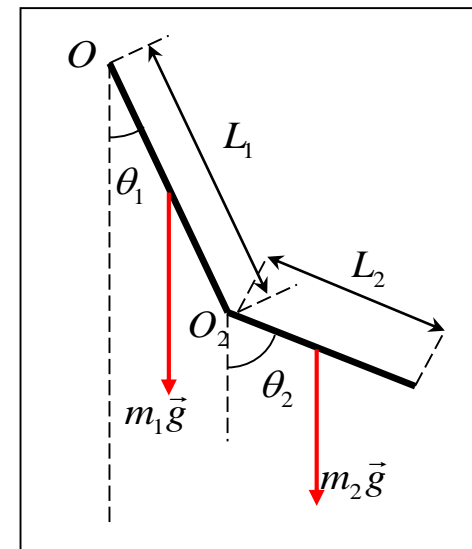
Petits mvmts,  
fréquence propre  
imaginaire  $i\sqrt{g/l}$   
→ instable  
(physiquement!)

Orbites piégées

Orbites  
passantes

# Pendule double articulé

Dans l'expérience montrée en classe, le pendule est constitué de deux tiges rectilignes rigides.



- Chaos dans un système conservatif (« Hamiltonien »)
  - Simulation numérique et expérience
  - Régimes périodique (petits mouvements, linéarisation des équations), multi-périodique, chaotique
  - Chaos et imprédictabilité
  - Chaos et sensibilité aux conditions initiales

# Equations du pendule double articulé

- Cas de deux tiges rigides uniformes

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \left( BD\dot{\theta}_2^2 + CD\dot{\theta}_1^2 + CF - BE \right) / (AB - C^2) \\ \left( -AD\dot{\theta}_1^2 - CD\dot{\theta}_2^2 + CE - AF \right) / (AB - C^2) \end{pmatrix}$$

$$A = (m_1/2 + m_2)L_1^2$$

$$B = m_2 L_2^2 / 3$$

$$C = (m_2/2)L_1 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

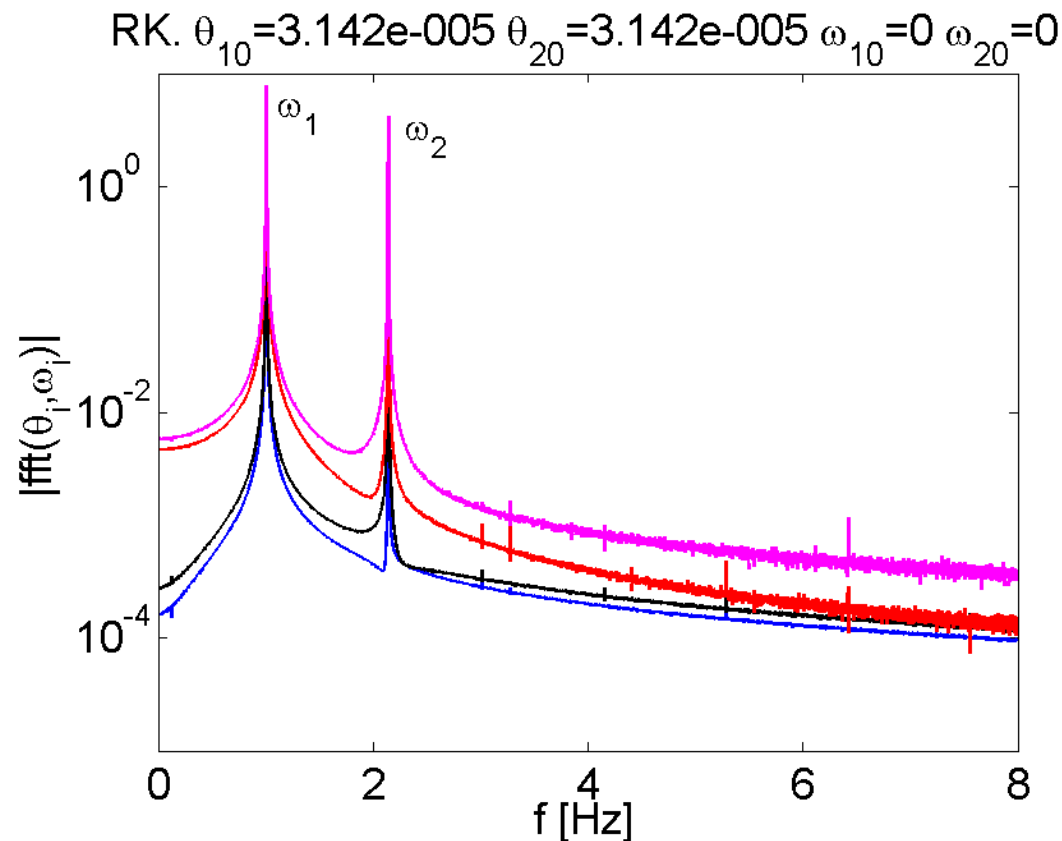
$$D = (m_2/2)L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$E = (m_1/2 + m_2)L_1 g \sin \theta_1$$

$$F = (m_2/2)L_2 g \sin \theta_2$$

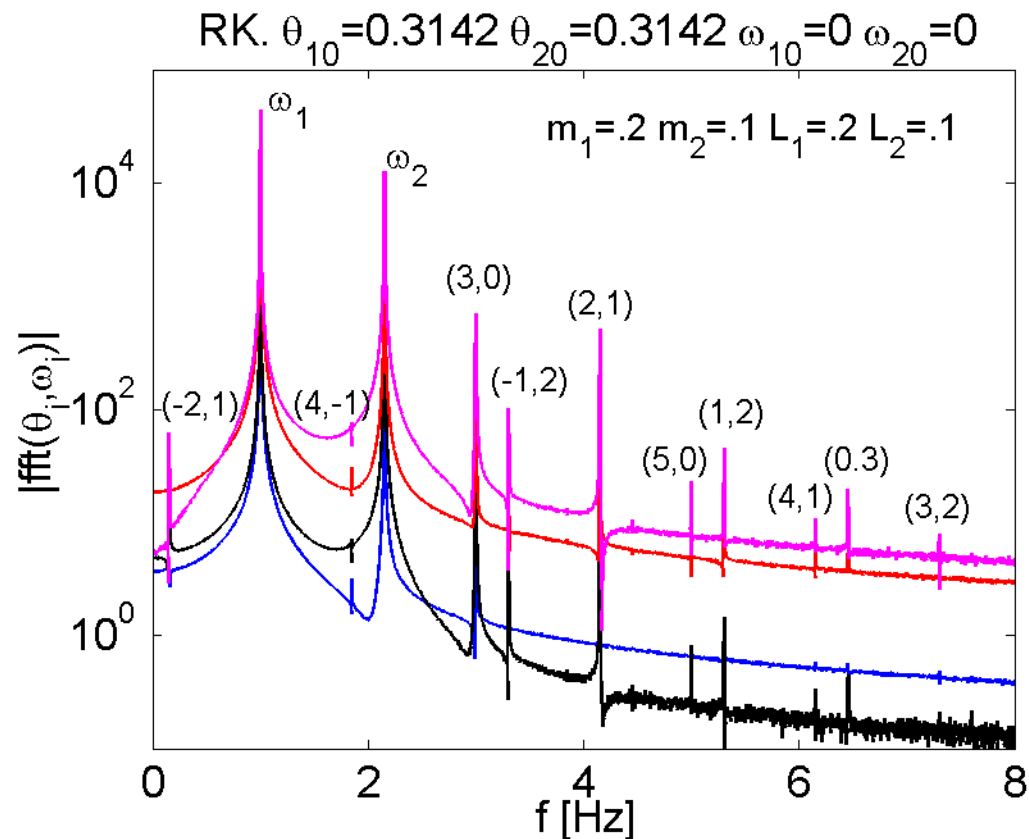
- Ne sont pas sous une forme symplectique!

# Pendule double - simulations $m_1=2$ $m_2=1$ , $L_1=.2$ $L_2=.1$



Faible amplitude (petits mouvements): le mouvement est une superposition des deux modes propres linéaires. L'analyse spectrale des signaux montre la présence des deux fréquences propres.

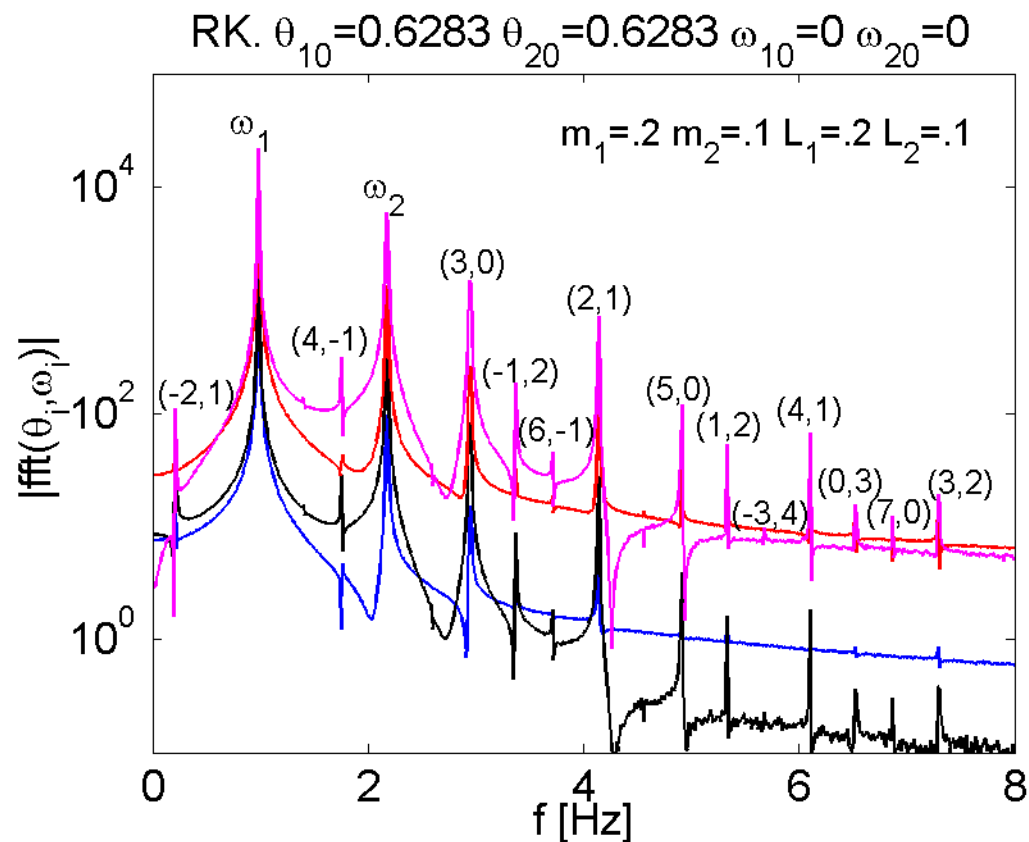
# Pendule double - simulations



Pour une amplitude plus grande ( $\pi/10$ ), le spectre montre de multiples fréquences. Les fréquences présentes sont  $m\omega_1 + n\omega_2$ , avec  $|m| + |n| = 1, 3, 5, \dots$

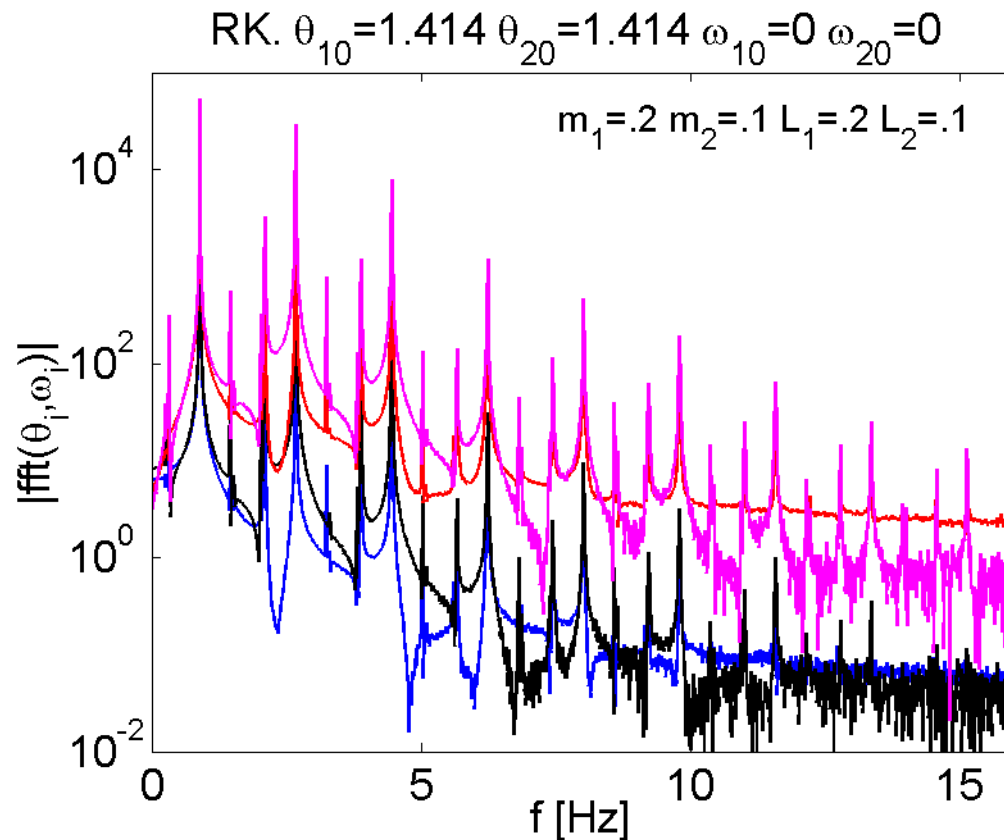


# Pendule double - simulations



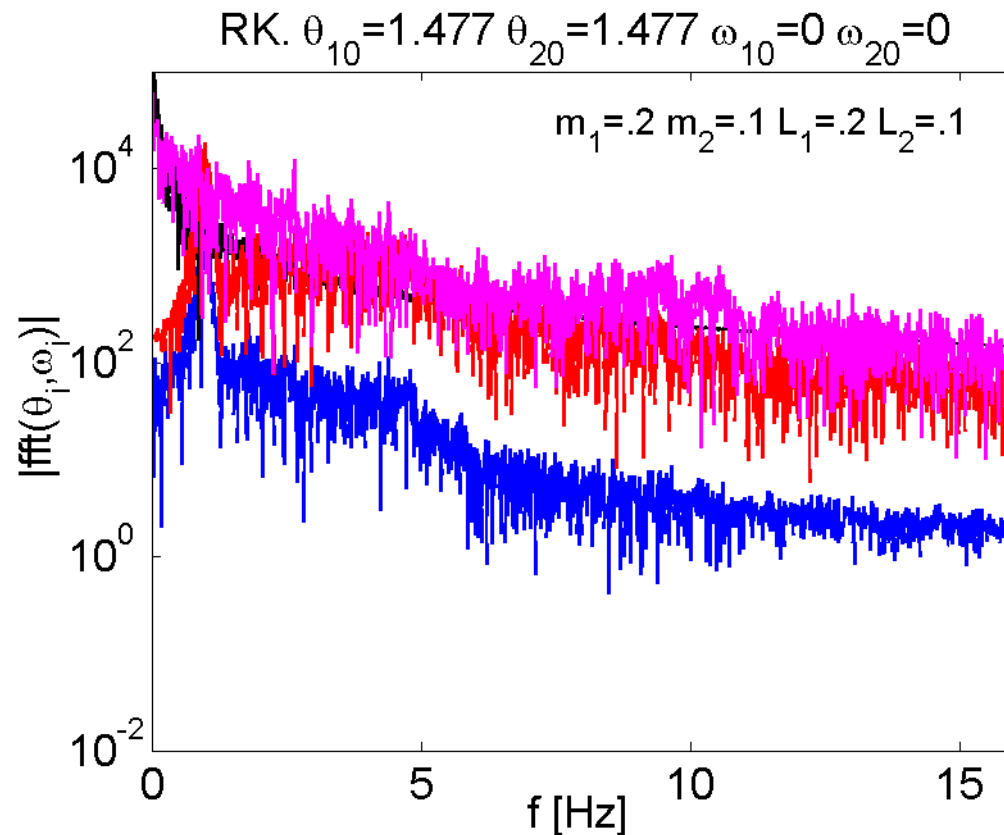
Amplitude  $2\pi/10$ . Frequences observées  $m\omega_1+n\omega_2$ , avec  $|m|+|n|=1,3,5,7,\dots$

# Pendule double - simulations



Amplitude  $0.45 \pi$  . Une forêt de pics...

# Pendule double - simulations

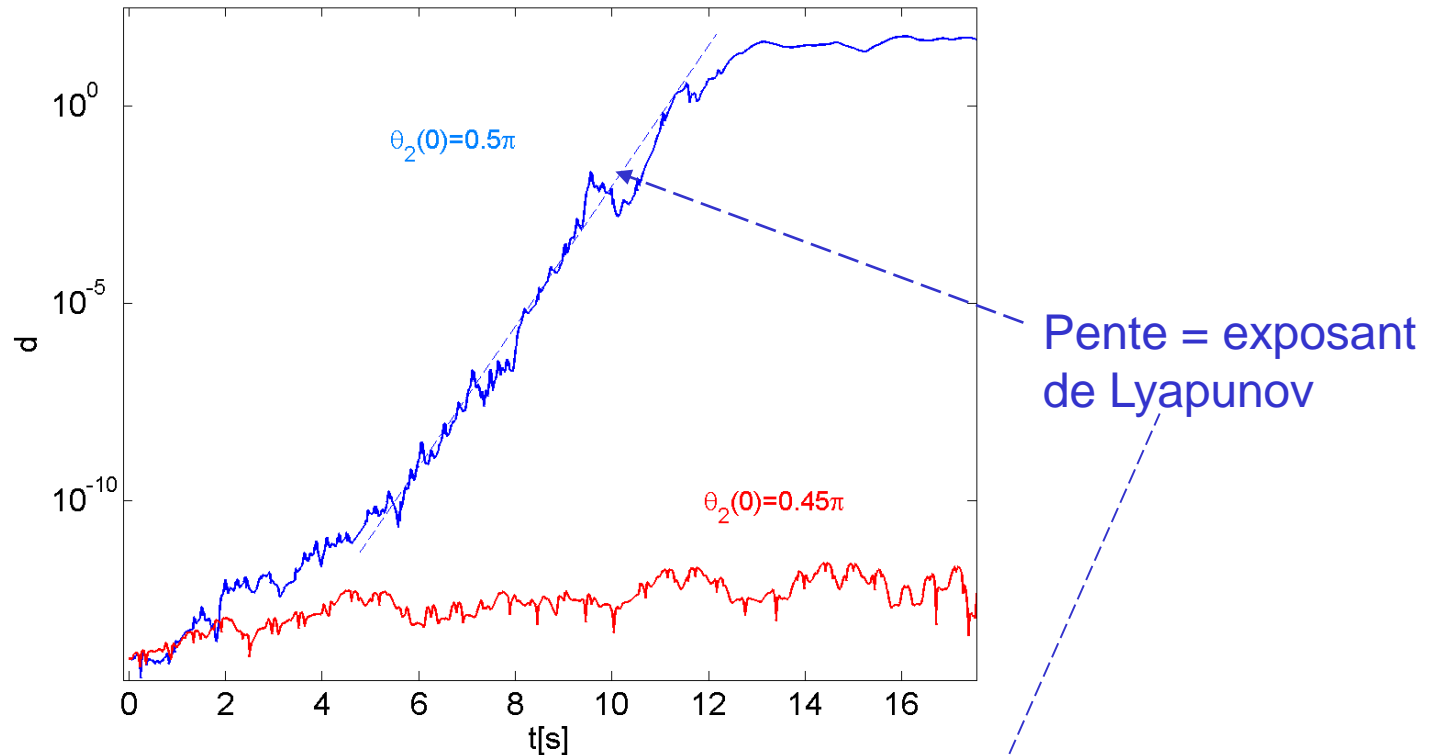


Amplitude à peine encore un peu plus élevée ( $0.47 \pi$ ): CHAOS! Plus de structure fréquentielle (« bruit »)!

# « Signature » du chaos

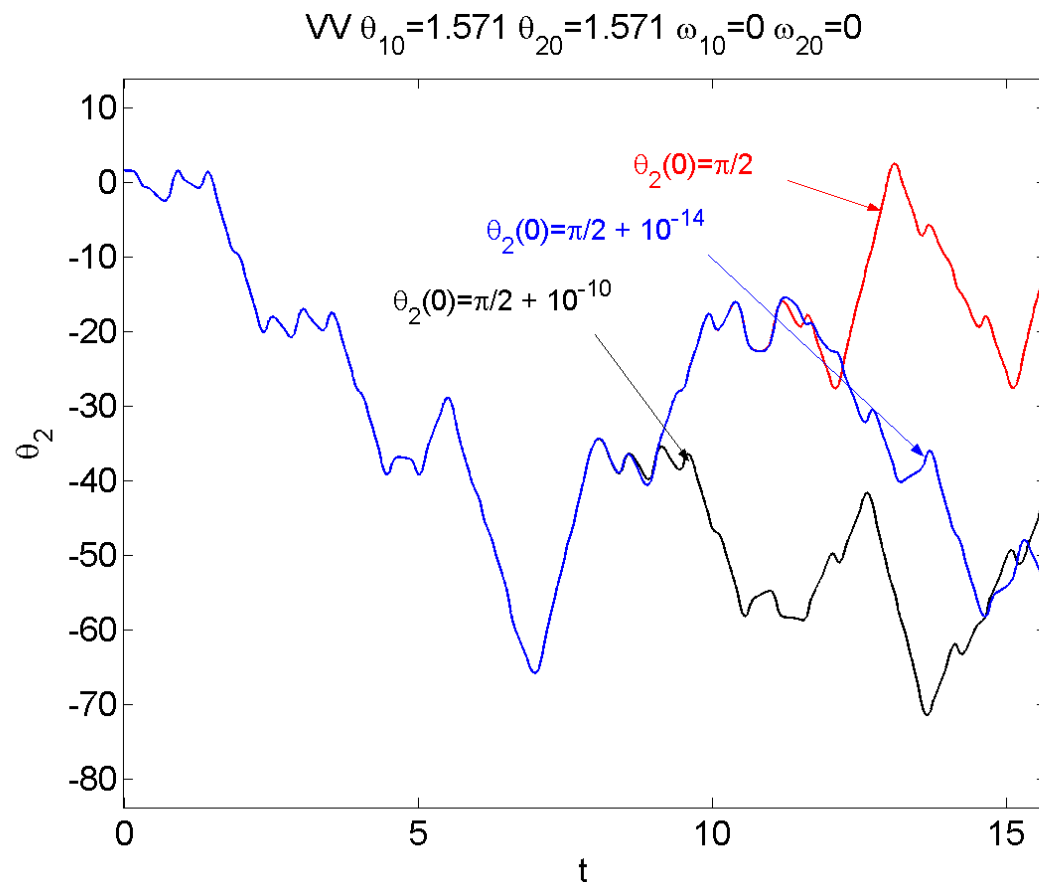
- Sensibilité extrême aux conditions initiales:
  - Soit deux conditions initiales différentes. Le mouvement est dit chaotique si, aussi ***petite*** que soit la différence entre les deux conditions initiales, il y a un ***temps  $t$  fini*** au-delà duquel les orbites respectives des deux mouvements ***s'écartent exponentiellement*** l'une de l'autre. L'exposant de l'exponentielle est appelé exposant de Lyapounov.

# Sensibilité aux conditions initiales



- Distance entre 2 orbites
- Régime chaotique : divergence exponentielle
- Régime non chaotique: pas de divergence exponentielle

# Chaos et imprédictabilité

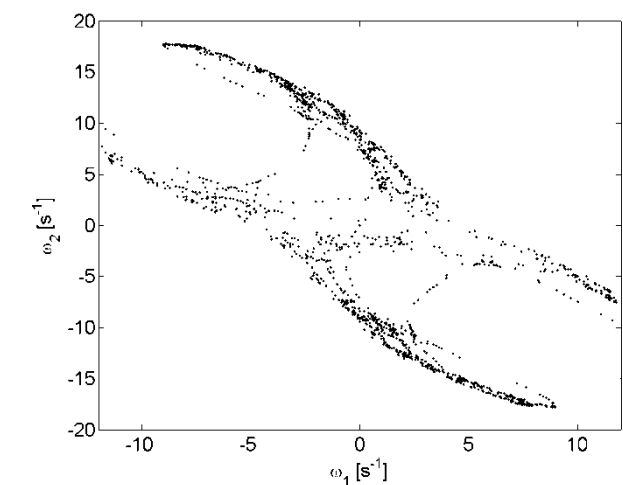
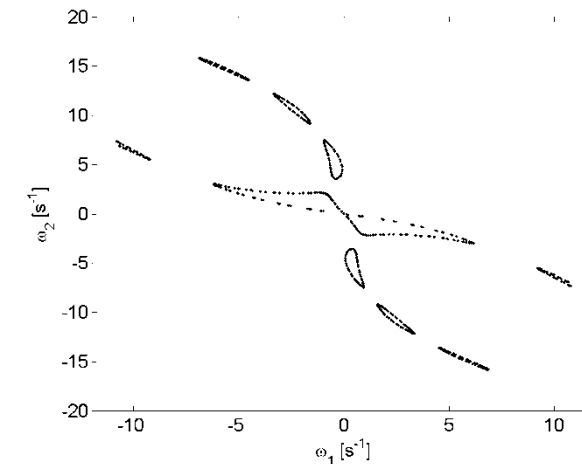
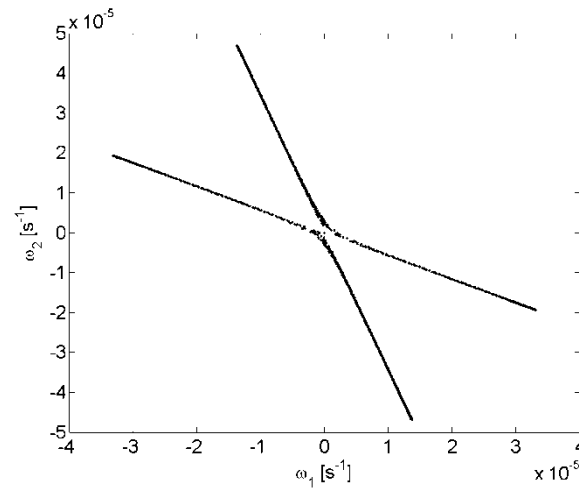
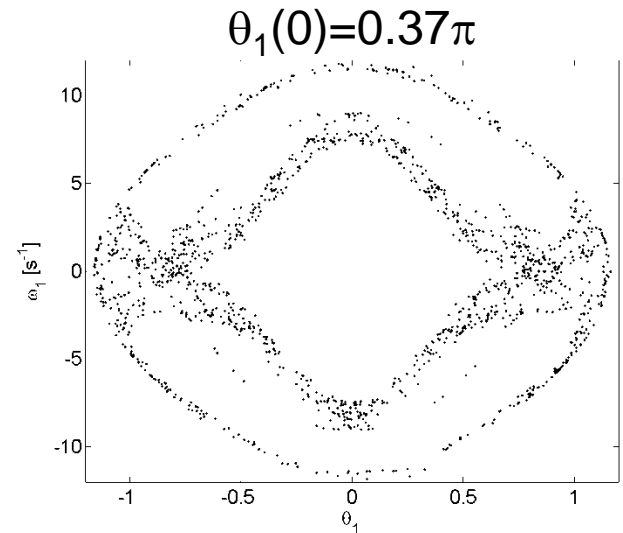
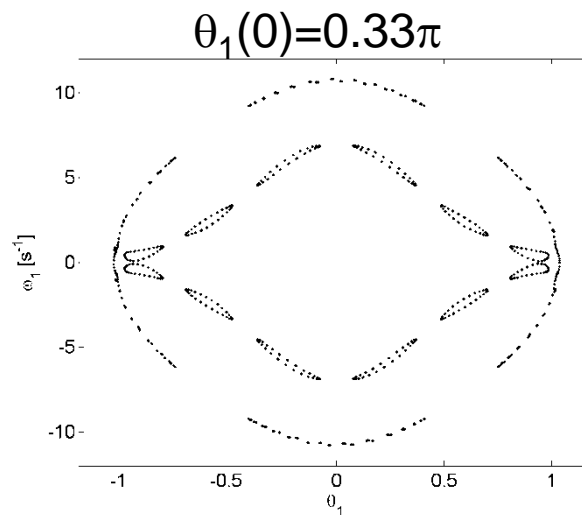
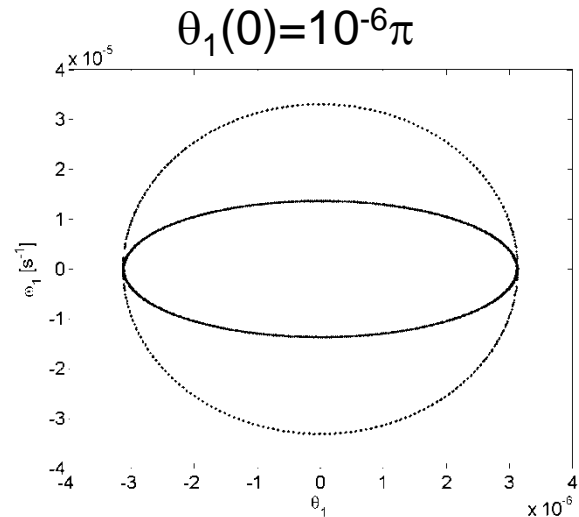


- $10^{-10}$ : taille atome,  $10^{-14}$ : taille 10 noyaux atomiques!

# Sections de Poincaré

- Longues simulations
- Représentation de toute l'orbite: pas toujours informative (l'espace de phase est 4D dans le cas du pendule articulé)
- Une Section de Poincaré est une intersection de l'orbite avec une surface de l'espace de phase
- Par exemple  $\{(\theta_1, \omega_1, \omega_2)(t_i) \mid \theta_2(t_i)=0\}$

# Sections de Poincaré – pendule double



Petits mouvements

Multi-périodique

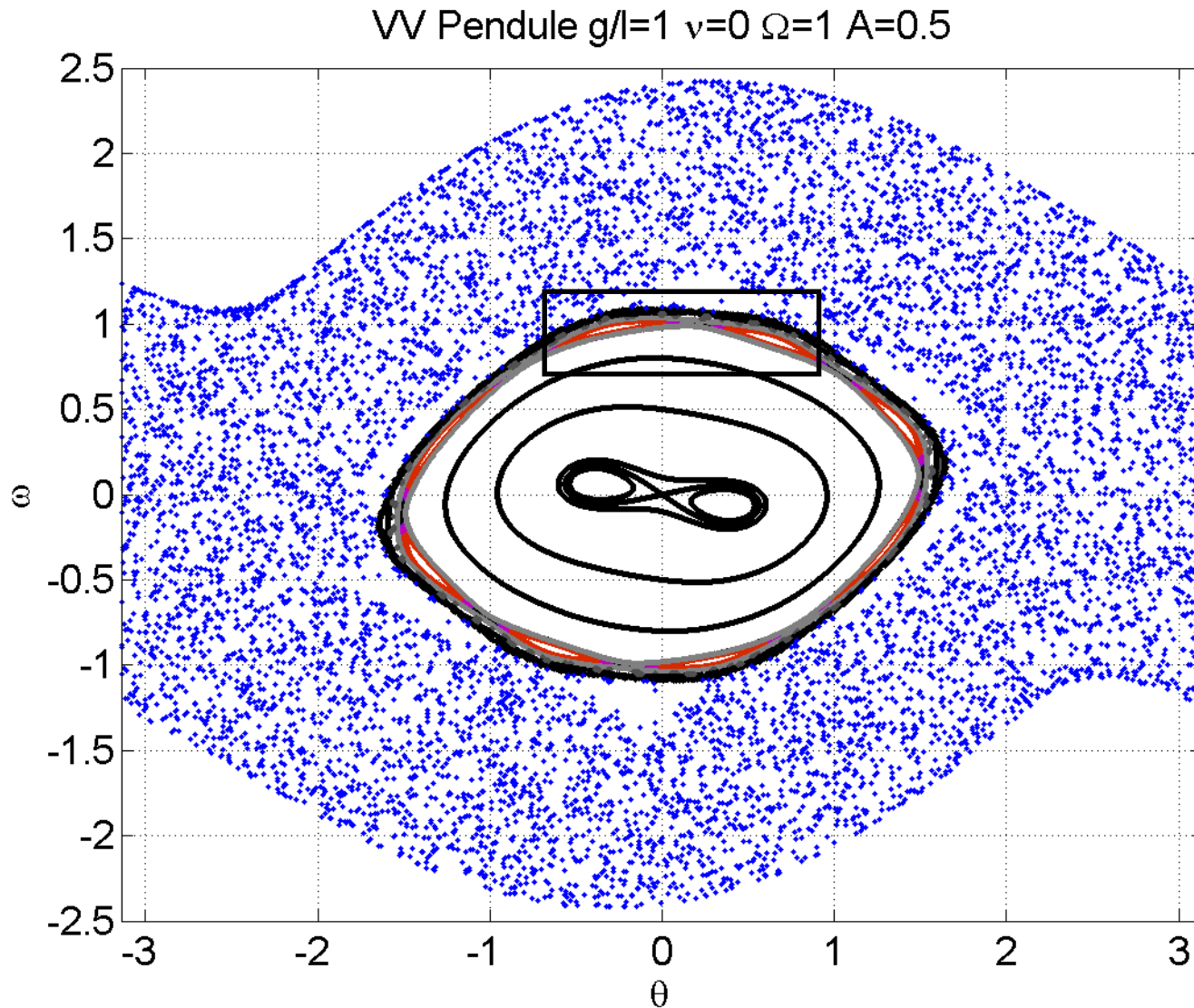
Chaotique



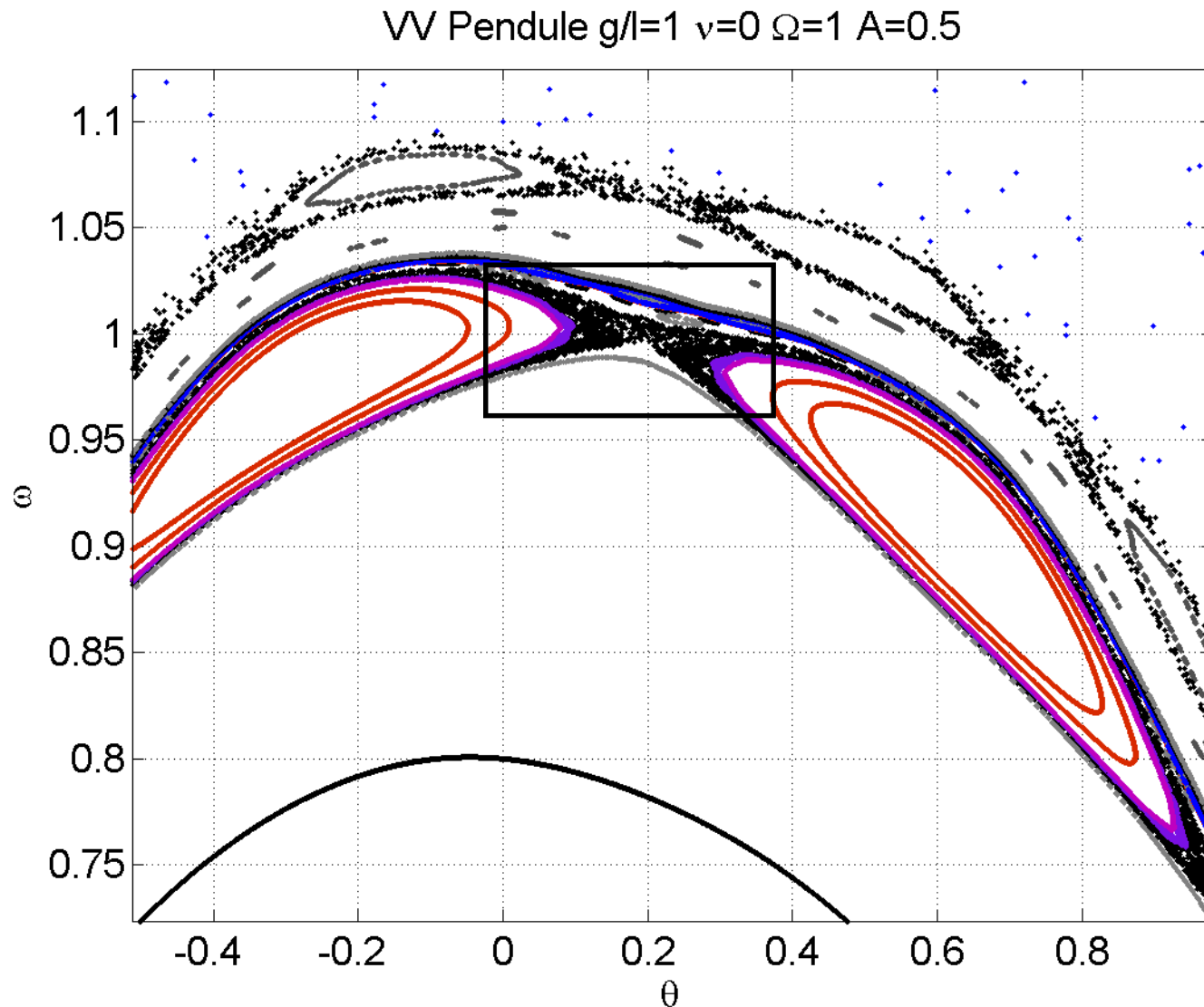
# Sections de Poincaré – pendule excité

- Excitation par une perturbation sinusoïdale (point d'attache mobile, ou couple appliqué)
- Section de Poincaré: on représente une projection dans un plan de l'espace de phase, p.ex. (angle, vitesse angulaire) pour l'Ex.3, à chaque période de l'excitation.
  - Hint: prenez  $\Delta t = (2\pi/\Omega)/k$ ,  $k$ =nombre de pas de temps par période, et mettez `sampling=k` en input du code: l'output contiendra ainsi directement les coordonnées des sections de Poincaré.
- Cas sans amortissement: chaque condition initiale produit une section de Poincaré différente. L'ensemble des sections de Poincaré présente une topologie de surfaces imbriquées, de chaînes d'îlots, et de régions stochastiques signalant la présence de chaos.

# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale

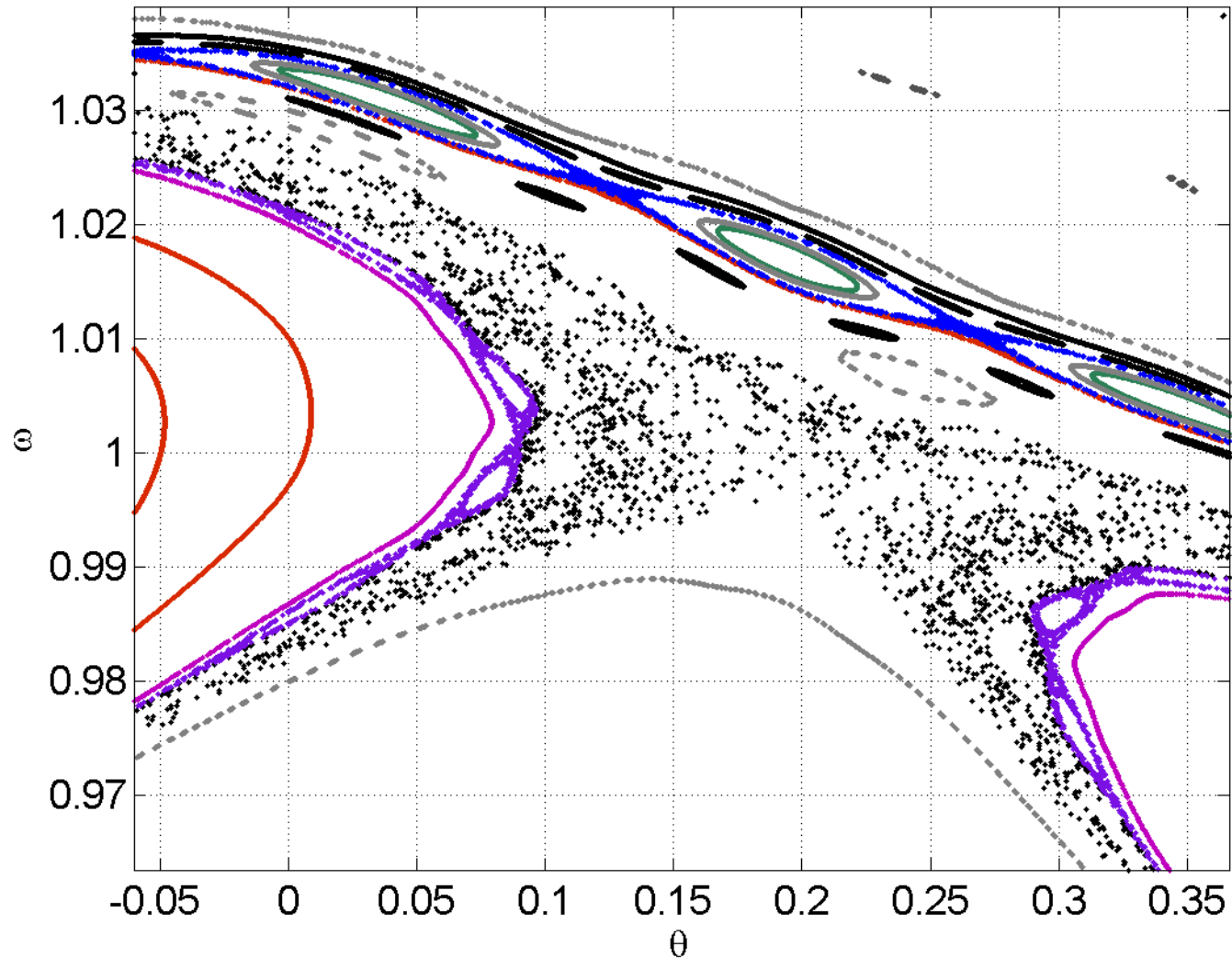


# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale zoom



# Sections de Poincaré pendule simple, excitation verticale zoom

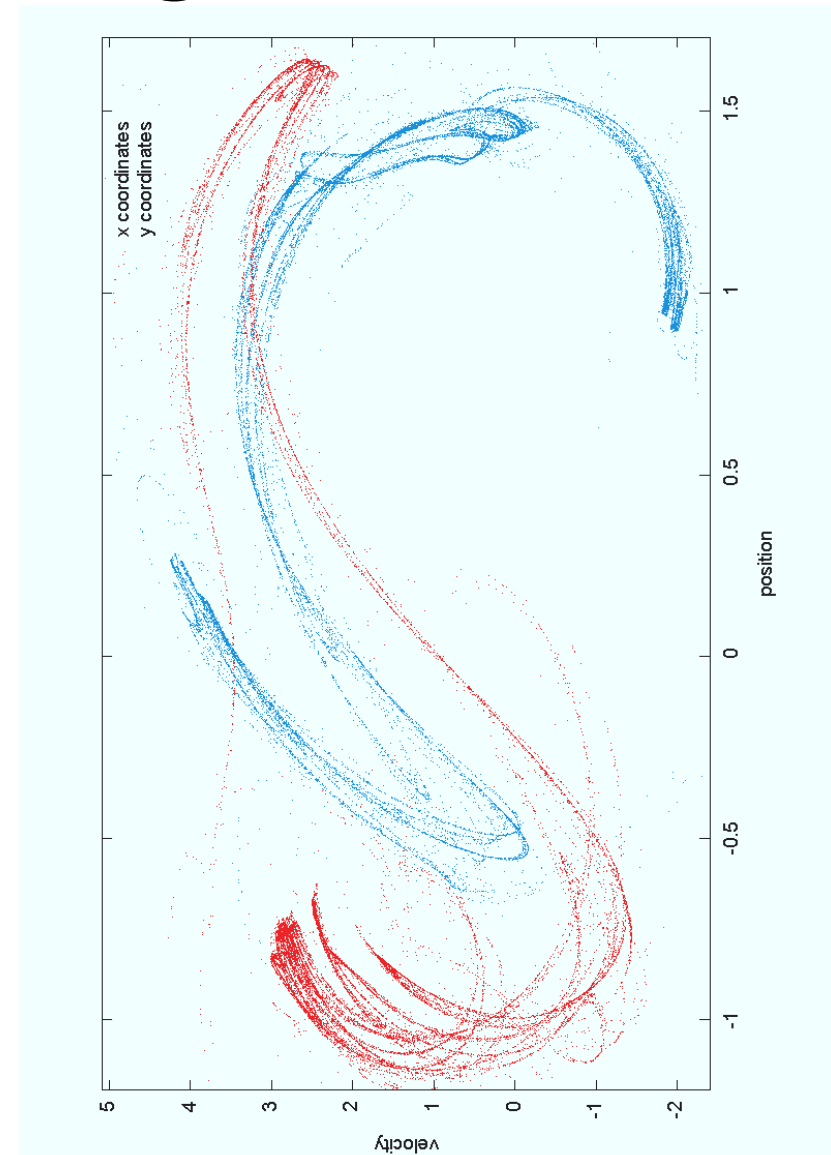
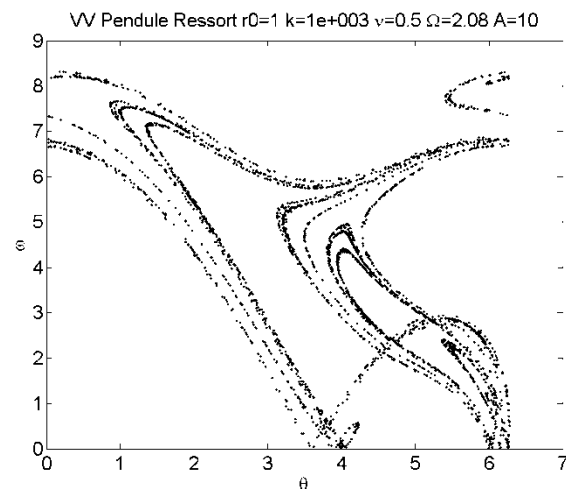
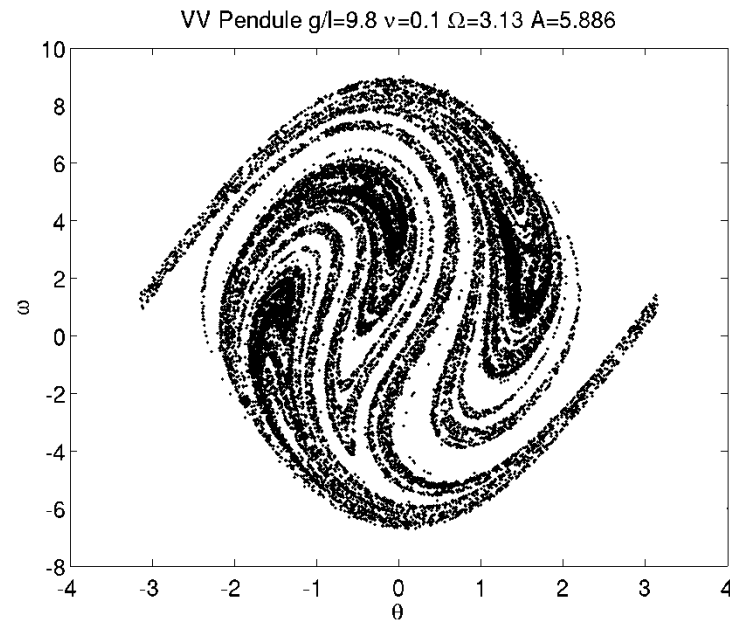
VV Pendule  $g/l=1$   $\nu=0$   $\Omega=1$   $A=0.5$



# Pendule excité *et* amorti - attracteurs

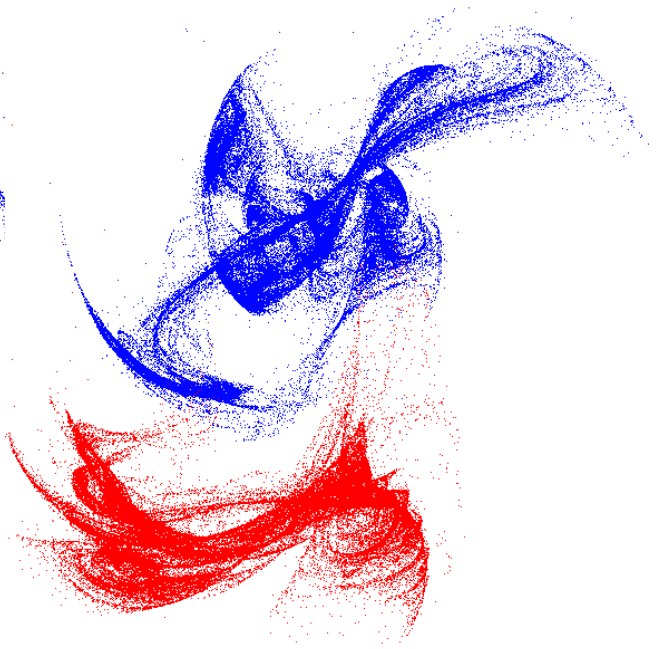
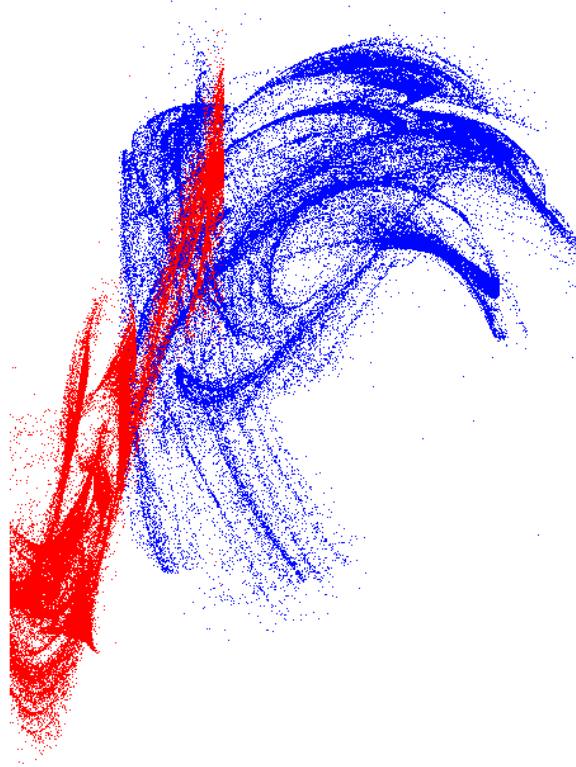
- Section de Poincaré: on représente une projection dans un plan de l'espace de phase des positions à chaque période de l'excitation.
- Attracteur: toute condition initiale (dans un domaine appelé « bassin d'attraction ») conduit à une section de Poincaré de structure similaire.
- **Attracteur** « étrange »: cas **chaotique**.
  - L'«étrangeté» vient du fait que (1) des conditions initiales même infinitésimalement voisines conduisent en un temps relativement *court* à des orbites qui divergent exponentiellement l'une de l'autre; (2) des conditions initiales même très éloignées l'une de l'autre conduisent au même attracteur pour des temps *longs*.

# Galerie d'attracteurs étranges





# Galerie (suite)



# Simulation numérique de systèmes en régime chaotique

- La sensibilité extrême aux conditions initiales, avec divergence  $\sim \exp(\lambda t)$  conduit à ***l'impossibilité de converger numériquement la solution pour des temps  $t > \sim 1/\lambda$***
- Cependant:
  - La structure de l'espace de phase (p.ex. l'étendue de la zone stochastique et/ou la forme de l'attracteur étrange) converge numériquement