Physique Numérique I semaine 7

- Rappel Semaine 6: Schémas symplectiques
  - Euler-Cromer «pied gauche d'abord»
  - Euler-Cromer «pied droite d'abord»
  - Idée de combiner ces deux schémas → Verlet

Physique Numérique I semaine 7

- Stabilité de Verlet
- Extension du schéma de Verlet pour des forces dépendant de la vitesse.
- Exercice 3: introduction
- Mouvements oscillatoires, physique linéaire et non-linéaire.
- Schéma semi-implicite (Boris-Buneman), appliqué au mouvement d'une particule dans un champ magnétique curviligne: « miroir magnétique », cf. Ex.2.
- Pourquoi le schéma d'Euler *semi-implicite* converge à *l'ordre 2* en Δt, alors que les schémas explicite et implicite convergent à l'ordre 1 ?

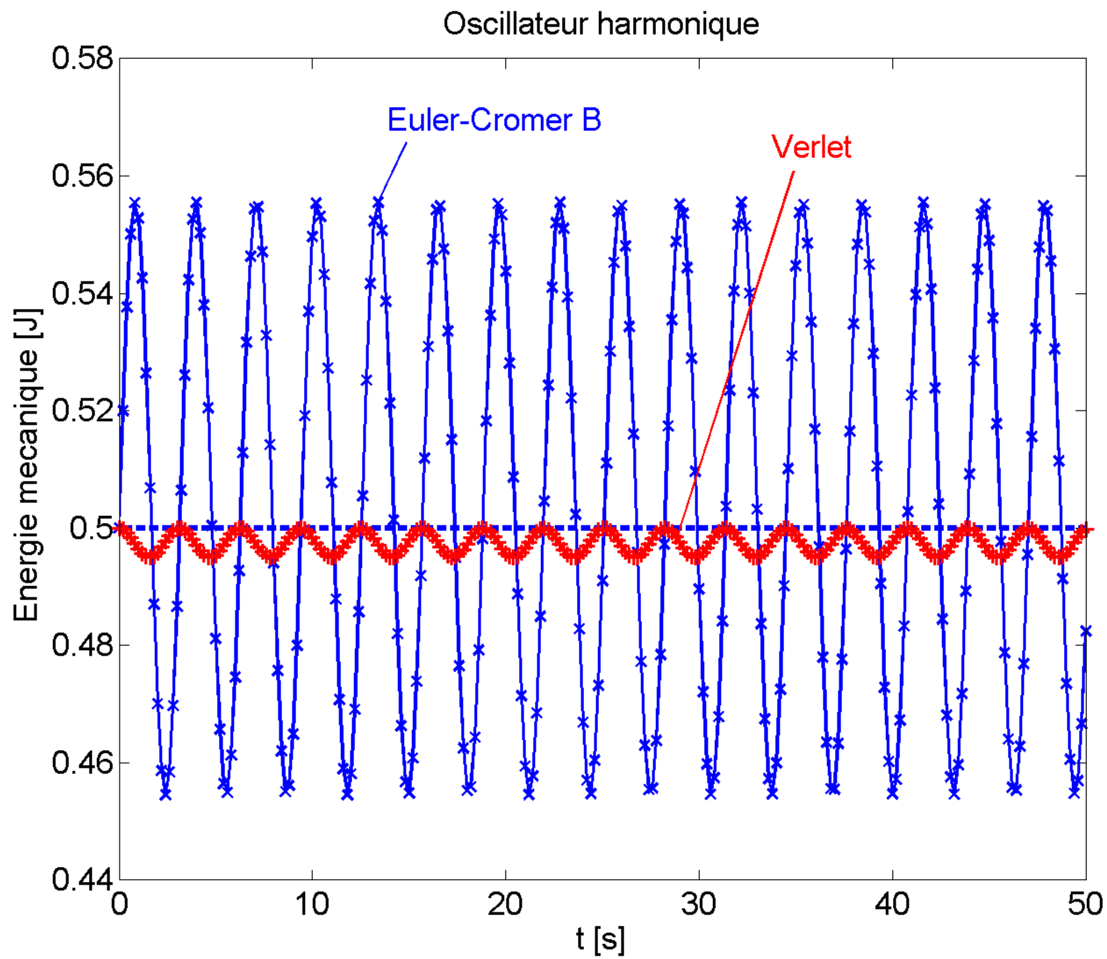
"Velocity Verlet"

$$x_{j+1} = x_j + v_j \Delta t + \frac{F}{m}(x_j, t_j)\frac{\Delta t^2}{2}$$

$$v_{j+1} = v_j + \left(\frac{F}{m}(x_j, t_j) + \frac{F}{m}(x_{j+1}, t_{j+1})\right)\frac{\Delta t}{2} \tag{2.98}$$

- Généralisé ici à une force dépendant explicitement du temps
- L'algorithme est stable (cf plus loin)
- Il est d'ordre 2 en Δt: erreur ~(Δt)²
- Une seule évaluation de F par pas temporel
- Peut être utilisé pour de longues simulations sans qu'il y ait accumulation systématique d'erreurs sur la conservation de l'énergie
- S'applique en principe bien aux systèmes conservatifs

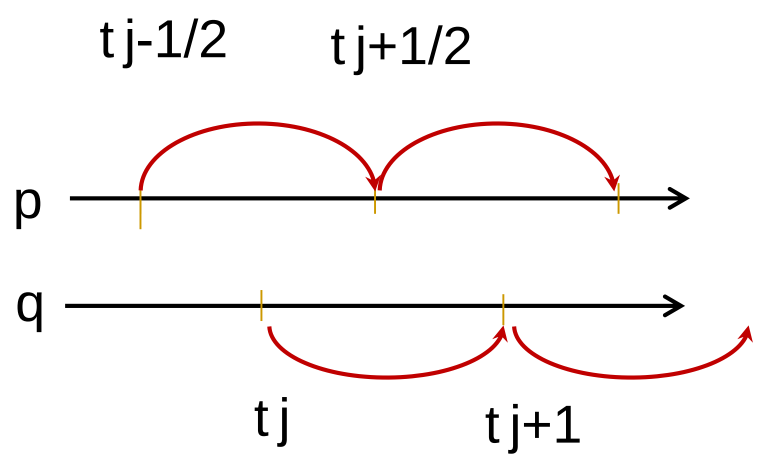
Velocity Verlet – oscillateur harmonique



- Même $\Delta t=0.2$

Formulations alternatives de Verlet 1

- Verlet «leapfrog» (saute-mouton)



$$p_{j+1/2} = p_{j-1/2} + \Delta t\, F(q_j)$$
$$q_{j+1} = q_j + (\Delta t / m)\, p_{j+1/2} \qquad (2.99)$$

Schéma à niveaux décalés («staggered»)
Nécessite un premier «demi-pas» pour être initialisé
Désavantage: on ne connaît pas p et q aux mêmes instants

Formulations alternatives de Verlet 2

- Stormer (1907) – Verlet (1967)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(q) \\ p/m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = F(q)/m \qquad (2.100)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}(t_j) = \frac{1}{\Delta t^2}\left(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}\right) + O(\Delta t^2)$$

$$q_{j+1} = 2q_j - q_{j-1} + (\Delta t^2/m)\,F(q_j) \qquad (2.102)$$

Schéma à 3 niveaux
Nécessite un premier pas «en arrière» (q_{-1}) pour être initialisé
Cet algorithme date de 1907 (Stormer)
Equivalence avec «velocity-Verlet»: Notes de Cours pp.41-42

Stabilité du schéma de Verlet

- On montre (p.40) que le schéma de Verlet est stable pour le problème de l'oscillateur harmonique, à la condition que:

$$\omega \Delta t \leq 2$$

où ω est la fréquence propre (physique!) du système:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il en est de même pour Euler-Cromer.

Extension du schéma Verlet à des forces dépendant de la vitesse

Soit $a(x,v,t) = F(x,v,t)/m$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x) = v \\ \dfrac{d}{dt}(v) = a(x,v,t) \end{cases}$$

Cas $a = a(x,v,t) = a_1(x,t) + \boxed{a_2(v)}$

$$x_{j+1} = x_j + v_j \Delta t + \frac{1}{2}\boxed{a\left(x_j, v_j, t_j\right)}(\Delta t)^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{v_{j+1/2}} = v_j + \frac{1}{2} a\left(x_j, v_j, t_j\right)\Delta t \qquad (2)$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{1}{2}\left(a_1(x_j, t_j) + a_1(x_{j+1}, t_{j+1})\right)\Delta t + a_2\boxed{(v_{j+1/2})}\Delta t$$

En récrivant le dernier terme comme $a_2(v_{j+1/2})\dfrac{\Delta t}{2} + a_2(v_{j+1/2})\dfrac{\Delta t}{2}$

Et en l'insérant dans le deuxième terme, on obtient:

Extension du schéma Verlet à des forces dépendant de la vitesse (suite)

$$v_{j+1} = v_j + \left(\underbrace{a_1(x_j, t_j) + a_2(v_{j+1/2})} + \underbrace{a_1(x_{j+1}, t_{j+1}) + a_2(v_{j+1/2})} \right) \frac{\Delta t}{2}$$

$$v_{j+1} = v_j + \left(\boxed{a(x_j, v_{j+1/2}, t_j)} + \boxed{a(x_{j+1}, v_{j+1/2}, t_{j+1})} \right) \frac{\Delta t}{2} \qquad (3)$$

Cette dernière expression permet ainsi de faire appel à une fonction *a*, acceleration.

Le schéma ainsi modifé, Eqs.(1)(2)(3), implique en tout 3 appels à la fonction « acceleration », *a*(.,.,.), *avec des arguments différents.*

Pour l'exercice3: $x \rightarrow \theta,\ \mathrm{v} \rightarrow \dot{\theta}$

Applications aux systèmes oscillatoires

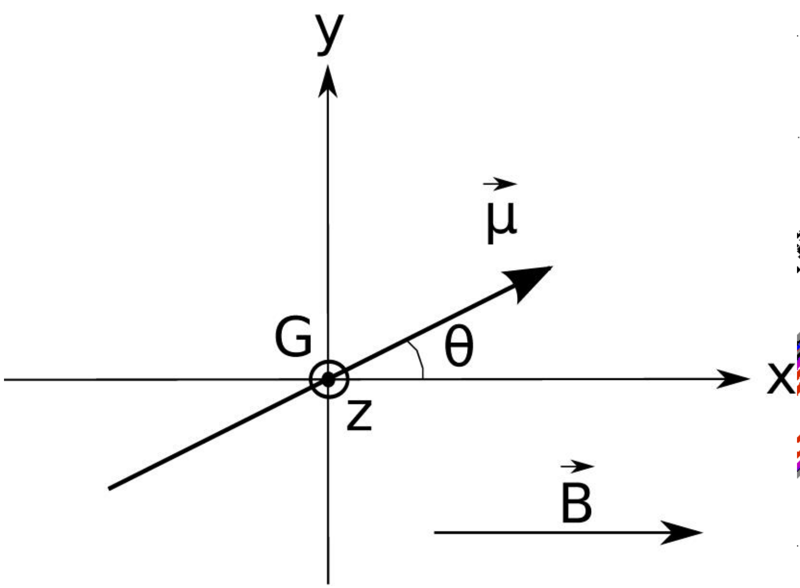
- Modes propres, fréquences propres
  - Petits mouvements. **Ex.3**
- Amortissement Fig.2.13
- Excitation résonante Fig.2.14
  - Expériences.

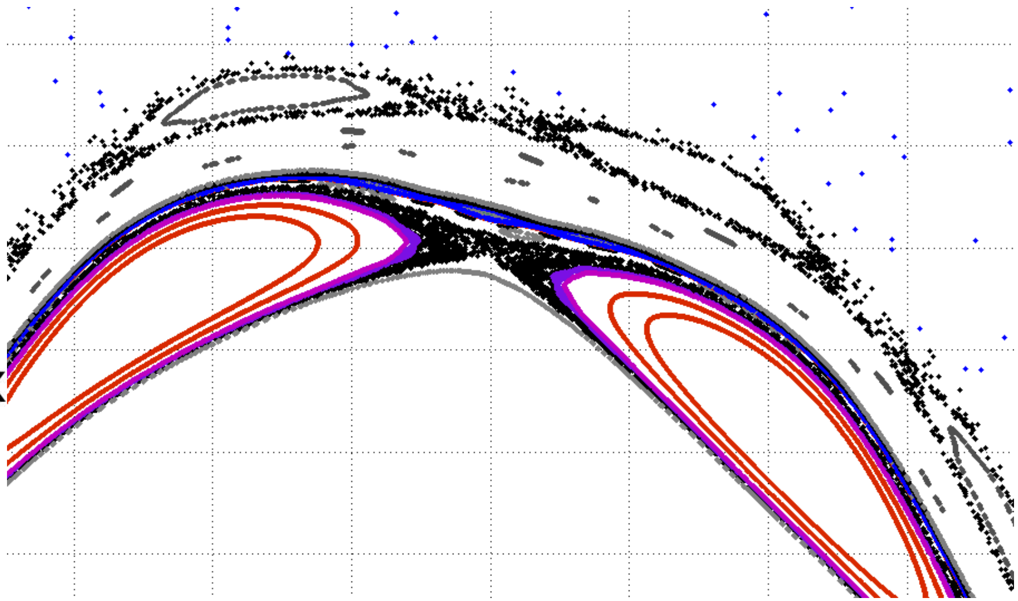
Physique linéaire

- Excitation paramétrique (déstabilisation non linéaire)
  - Ex.3
- Stabilisation non linéaire
  - Expérience. **Ex.3**
- Chaos: pendule articulé, système Hamiltonien
  - Expérience. Simulations. Figs.2.18-2.21
- Chaos: Sensibilité aux conditions initiales.
- Expérience. Simulations. Fig.2.17 **Ex.3**
- En route pour le chaos: multiplication des fréquences
  - Simulations
- Chaos: pendule excité
  - Attracteurs étranges. Simulations. Figs.2.15, 2.16, **Ex.3**

Physique non linéaire

Ex. 3 (2017): pendule magnétique



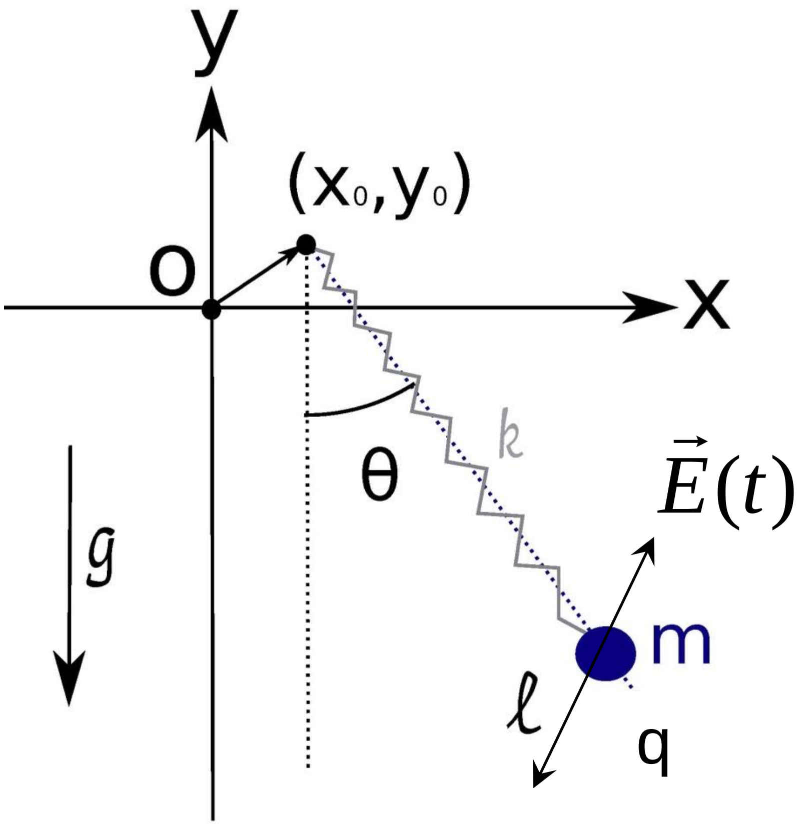


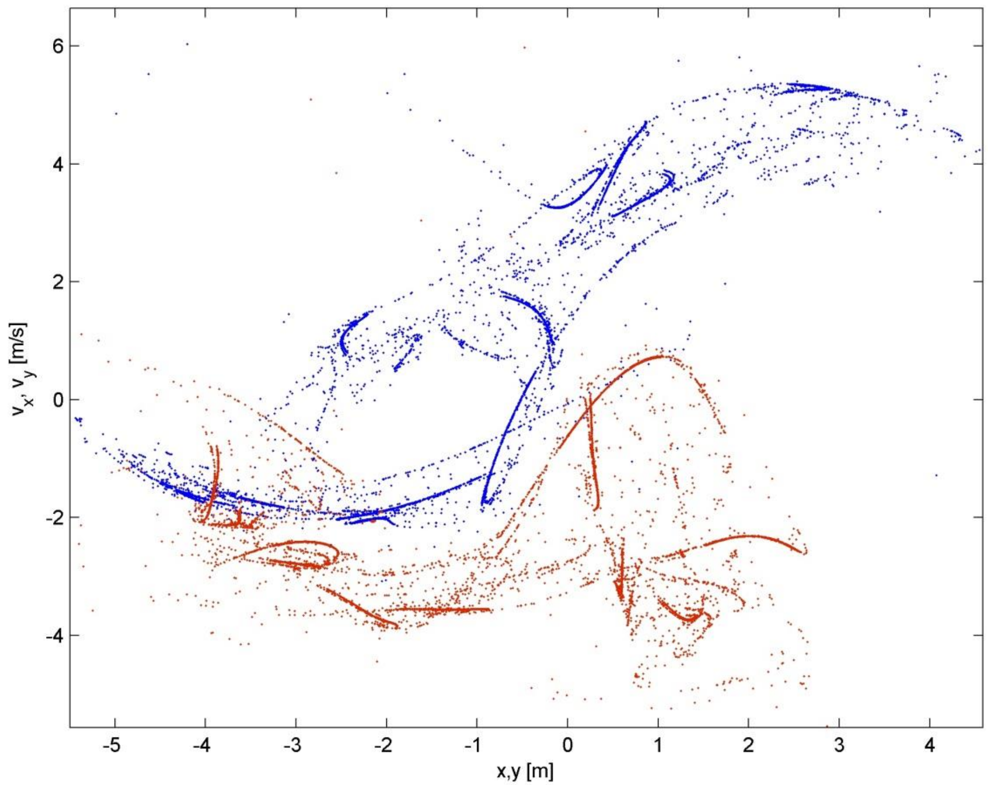
$$\vec{M}_G = \vec{\mu} \times \vec{B} - \nu\dot{\theta}\vec{e}_z$$

Ceci est un pendule

Ex.3 (2018): pendule, excitation verticale

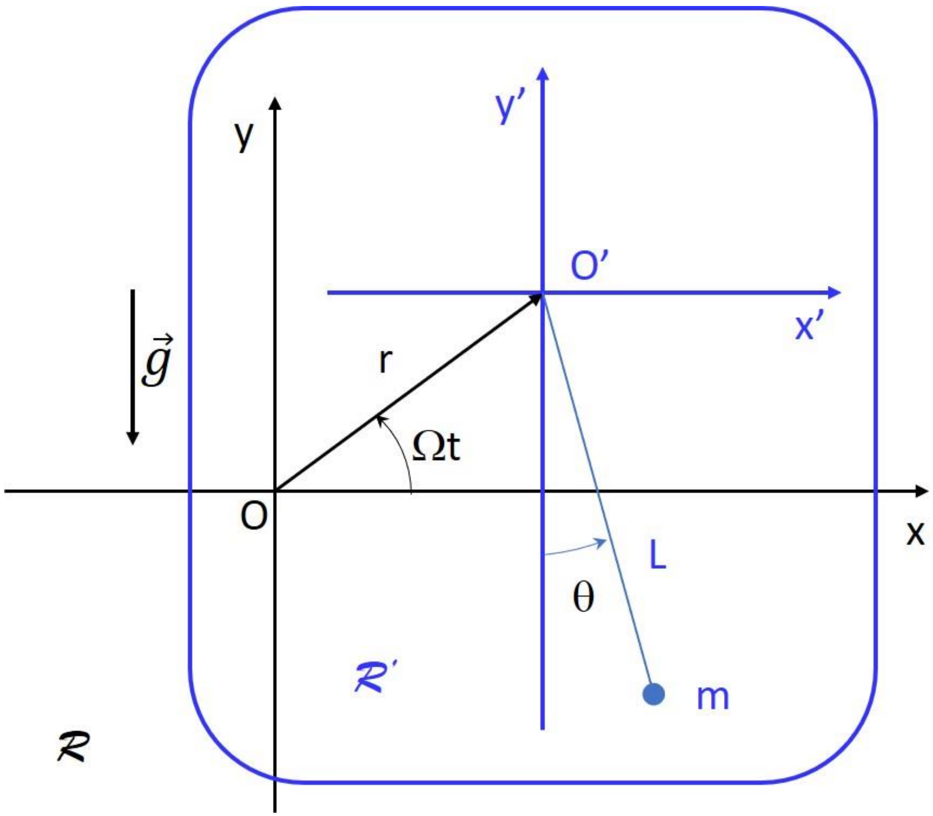
Ex. 3 (2019): pendule ressort + champ électrique oscillant





Ceci est un pendule

Ex. 3 (2021): pendule simple avec point d'attache en mvmt circulaire



On établira les Eqs du mvmt dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au point d'attache O', en ***translation*** par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du sol.
O' est en MCU dans $\mathcal{R}$.

Schéma Velocity-Verlet, avec extension pour forces dépendant de la vitesse

$$x \rightarrow \theta \quad \mathrm{v} \rightarrow \dot{\theta}$$

Expériences (semaines prochaines)

- Pendule double, petits mouvements, modes propres.
- Pendules sur élastique. Excitation résonante.
- Pendule magnétique. Chaos.
- Pendule avec excitation circulaire. Chaos.
- Pendule double, grands mouvement. Chaos.
- Pendule inversé. Stabilisation non-linéaire.

Boris – Buneman (2.7.2)

- Cas d'une particule dans un champ magnétique

Semi-implicite
$$\frac{\vec{v}_+ - \vec{v}_-}{\Delta t} = \frac{q}{m}\left(\frac{\vec{v}_+ + \vec{v}_-}{2}\right) \times \vec{B} \qquad (2.147)$$

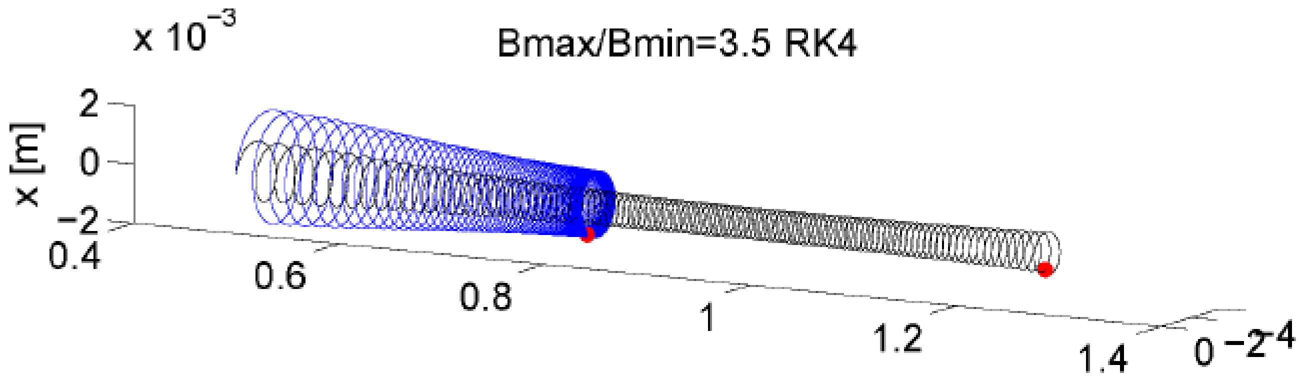
Posons: $\omega_c = qB/m \qquad \vec{e_\parallel} = \vec{B}/B$

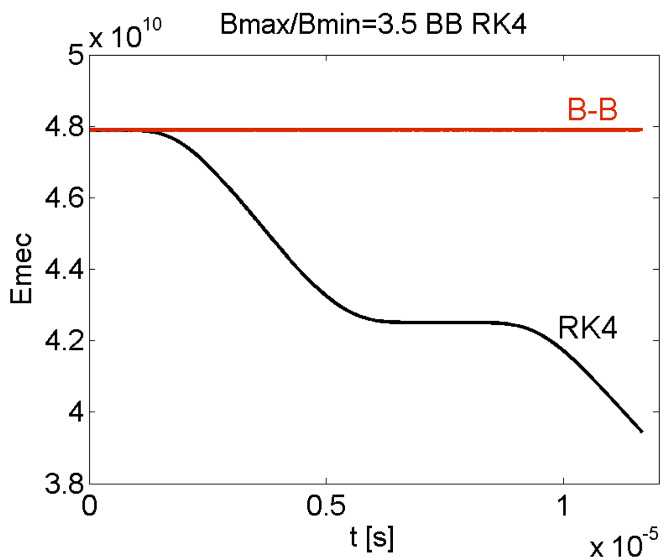
$$\vec{v}_+ = \vec{v}_- + \frac{\omega_c \Delta t}{1 + (\omega_c \Delta t/2)^2}\left(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel} + \frac{\omega_c \Delta t}{2}(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel}) \times \vec{e_\parallel}\right)$$

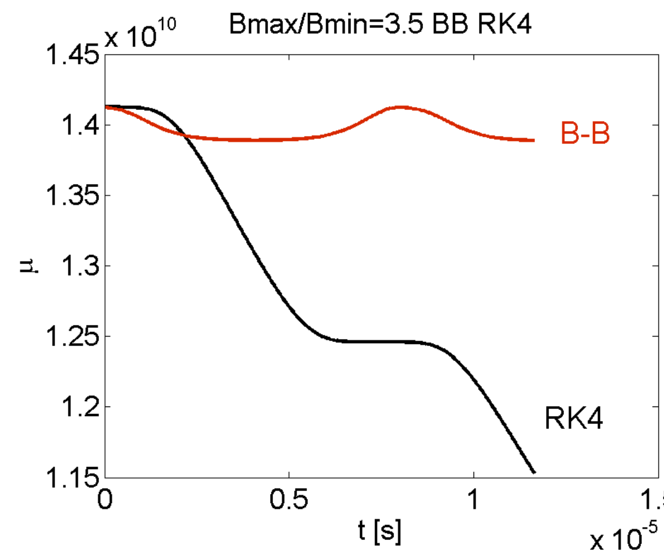
(2.149)

- Conserve Emec exactement, quel que soit Δt
- Ordre 2 en Δt

Particule dans champ magnétique: Boris - Buneman







- B-B Conserve Emec exactement, (quel que soit Δt !)