# Physique Numérique I semaine 5

- **Retour indicatif** avant dimanche 23 octobre à minuit
- **Info-échanges**: vendredi 28 octobre 09:00 Ce1 3
- **Rappel des semaines précédentes**:
  - Notions de ***convergence*** et de ***stabilité*** numériques
  - Analogie oscillateur harmonique, particule dans un champ magnétique et effet Magnus
- (1) Euler explicite**: *instable pour oscillateur harmonique***
- (2) Euler implicite: ***stable, mais dissipation numérique***
- (3) Euler semi-implicite: ?
- (4) Runge-Kutta (explicite, d’ordre 2) : ?
- (5) Euler-Cromer (explicite, symplectique)
- (6) Boris-Buneman (semi-implicite, conservatif, d’ordre 2)

# Exercice 2: indications

- On utilisera des ‘valarray’ dans le code C++, par exemple:
  - valarray<double> x=valarray<double>(3); // position de la particule
  - valarray<double> v=valarray<double>(3); // vitesse de la particule
- On peut additioner des valarrays et les multiplier par un scalaire, p.ex.:
  - x += v * dt;   // mise à jour de la position
- On a déjà défini dans le squelette de code C++ des fonctions pour le produit scalaire de deux vecteurs:
  - produitInterne(valarray1,valarray2)
- Et la norme d’un vecteur:
  - norm2(valarray)
- On donne un script ParameterScan.m qui lance une série de simulations avec plusieurs valeurs d’un paramètre d’entrée, (nsteps, pour faire une étude de convergence)
- Des fonctions Python sont également données

# Mouvement oscillatoire harmonique et mouvement circulaire uniforme

- Représentation complexe:

$$x(t) = \Re\left(\hat{x}\, e^{-i\omega t}\right), \quad \omega \in R, \quad \hat{x} = |\hat{x}| e^{i\varphi} \in C$$

- Rotation dans le plan complexe à la fréquence $\omega$
- Projection sur l'axe réel: oscillation à la fréquence $\omega$
- Généralisation: fréquence complexe $\omega \in C, \omega = \omega_r + i\gamma$

$$x(t) = |\hat{x}| e^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$\gamma > 0$ : amplitude exponentiellement croissante

$\gamma < 0$ : amplitude exponentiellement décroissante

Substituer la représentation complexe dans une équation différentielle linéaire la transforme en une équation algébrique, après simplification par $e^{-i\omega t}$ :

$$\frac{d}{dt} x \rightarrow -i\omega \hat{x}$$

# Plan

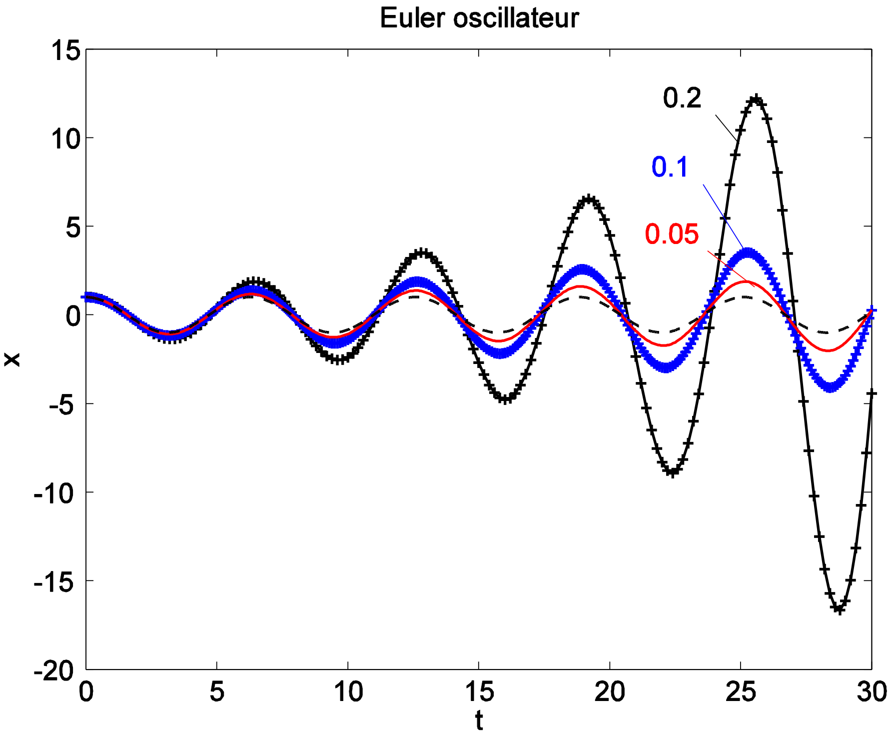
- **Oscillateur harmonique**
- Démonstrations et analyse de la stabilité du schéma d'Euler explicite
- Démonstrations d'un schéma symplectique (Euler-Cromer)
- Démonstrations d'un schéma semi-implicite (Boris-Buneman), appliqué au mouvement d'une particule dans un champ magnétique curviligne non-uniforme.

# Euler explicite et oscillateur harmonique

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(k/m)x \end{pmatrix}$$

Solution analytique:

$$y(t) = |A|\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$




- Le schéma d'Euler explicite est ***toujours instable*** lorsqu'il est appliqué à l'oscillateur harmonique. La norme de l'erreur augmente à chaque pas de temps
- L'amplitude des oscillations croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à $\Delta t$

# 2.3.1 Oscillateur harmo. Euler expl. Conservation $E_{mec}$

L'énergie mécanique, au lieu d'être conservée, croît exponentiellement dans le temps.

Le taux de croissance de $E_{mec}$ est proportionnel à $\Delta t$.

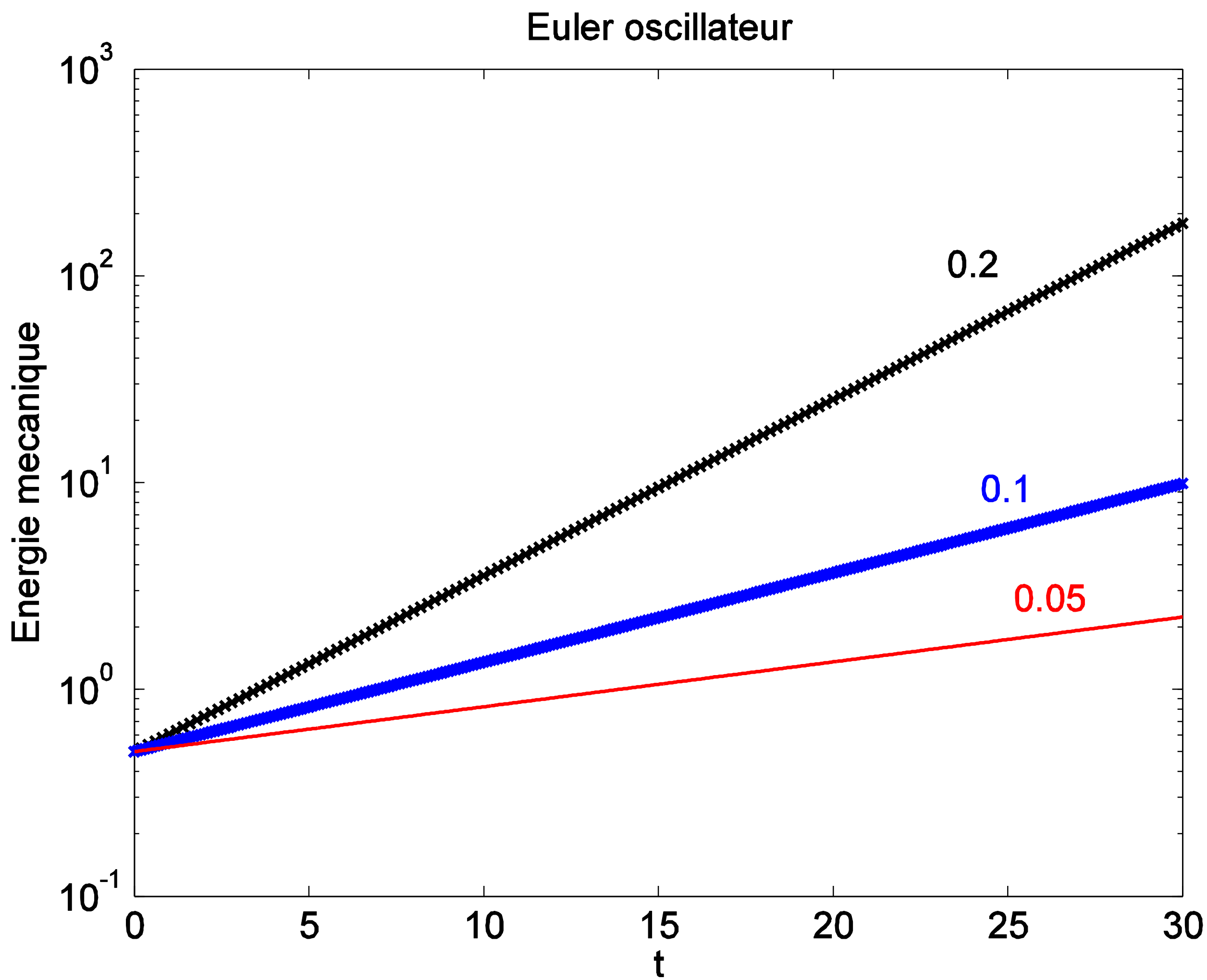



FIG. 2.8 (bas)

# Simulation de Systèmes Oscillatoires

## 2.3 Oscillations

- 2.3.1 Oscillateur harmonique. Instabilité du schéma d'Euler
- 2.3.2-2.3.3 **Analyses de stabilité numérique**

Propagation de l'erreur $e_n$

Oscillation, (dé)croissance?

Propriétés de conservation

Matrice de gain G

$$y_{num} = A e^{i\omega t}$$

$$E_{mec} = const$$

Valeurs propres $\lambda_i$

$$\omega = \omega_r + i\gamma$$

oscillant    exponentiel

$$E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + ??$$

Stable si

$$|\lambda_i| \leq 1$$

$$\gamma \geq 0$$

$$\frac{\Delta E_{mec}^{(num)}}{\Delta t} \leq 0$$

Section 2.3.2 – Von Neumann

Section 2.3.3

Section 2.3.4

# 2.3.2. Analyse de stabilité de Von Neumann

- Sera présentée au tableau
- Voir aussi les Notes de Cours, section 2.3.2.

# 2.3.3 Stabilité. Oscillations, (dé)croissance exponentielle. Sol. Analytique des Eqs. Discrètes.

$$\boxed{y_n = \Re e\{Ae^{i\omega t_n}\} = \Re e\{Ae^{i\sqrt{k/m}\,t_n} e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n}\}}$$

$$\boxed{y_n = \underbrace{e^{\left(\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}\right)t_n} \,|A|}\, \underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_n + \varphi\right)}_{\text{Oscillation sinusoidale}}}$$

**Amplitude augmentant exponentiellement dans le temps**

**Taux de croissance proportionnel à $\Delta t$**

**En accord avec nos résultats numériques**

# 2.3.3 Euler expl. osc. harmo. Conservation $E_{mec}$ 1

Analytiquement: $$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

Numériquement: $$E_{mec,n+1} = \frac{1}{2}m{v_{n+1}}^2 + \frac{1}{2}k{x_{n+1}}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_n - \frac{k}{m}x_n\Delta t\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_n + v_n\Delta t\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m{v_n}^2 + \frac{1}{2}k{x_n}^2 - v_n k x_n \Delta t + k x_n v_n \Delta t + \frac{1}{2}\frac{k^2}{m}{x_n}^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}k{v_n}^2\Delta t^2$$

$$\boxed{E_{mec,n+1} = E_{mec,n} + \left(\frac{k}{m}E_{mec,n}\Delta t\right)\Delta t} \quad (*)$$

$$\boxed{E_{mec,n+1} > E_{mec,n} \quad \forall \Delta t}$$

**L'énergie mécanique augmente à chaque pas de temps**

## 2.3.3 Euler expl. osc. harmo. Conservation $E_{mec}$ 2

$$\frac{\Delta E_{mec,n}}{\Delta t} = \left(\frac{k}{m}\Delta t\right) E_{mec,n}$$

$$E_{mec,n} = E_{mec,0}\, e^{\left(\frac{k}{m}\Delta t\right) t_n}$$

$$\gamma_{Emec} = \frac{k}{m}\Delta t$$

**L'énergie mécanique augmente exponentiellement au cours du temps**

**Le taux de croissance est proportionnel à Δt**

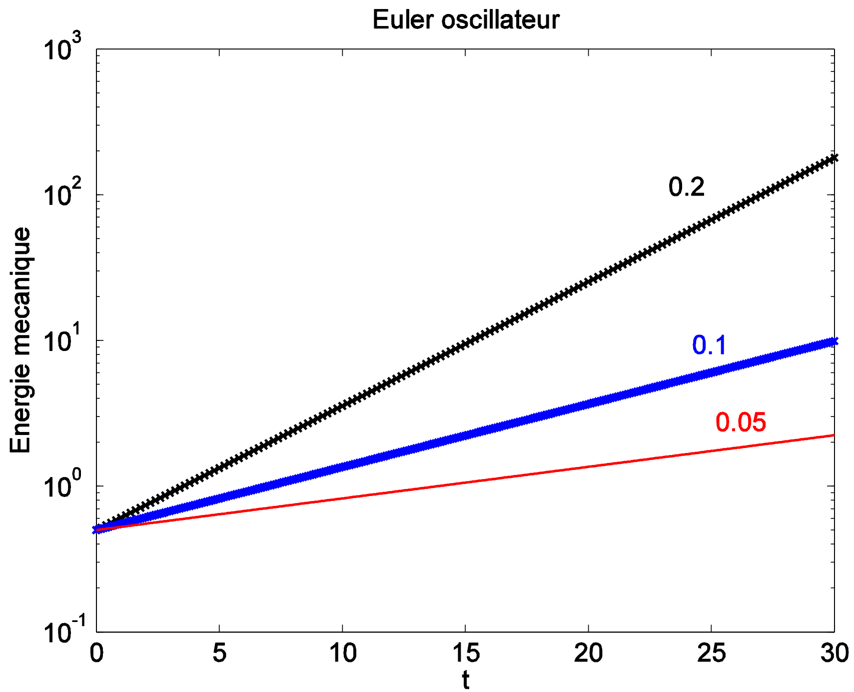



FIG. 2.8 (bas)

On trouvait un taux de croissance du mode propre

$$\gamma = \mathrm{Im}(\omega) = -\frac{k}{m}\frac{\Delta t}{2}$$

$$\gamma_{Emec} = -2\gamma$$

???

# 2.3.1-5 Oscillateur harmonique. Conclusions

- Le schéma d'Euler est toujours instable lorsqu'il est appliqué à l'oscillateur harmonique. La norme de l'erreur augmente à chaque pas de temps
- L'amplitude des oscillations croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à $\Delta t$
- L'énergie mécanique n'est pas conservée, mais croît exponentiellement, avec un taux de croissance proportionnel à $\Delta t$
- Paramètre numérique crucial: $\boldsymbol{\omega \Delta t}$
  - $\omega \Delta t \ll 1$ veut dire plusieurs pas temporels par période
- Amélioration des schémas numériques nécessaire!
  - Euler – Cromer $\sim \Delta t$ (*)
  - Stormer-Verlet $\sim (\Delta t)^2$

    Symplectiques: Emec=const en moyenne
  - Runge-Kutta ordre 4 $\sim (\Delta t)^4$
  - Augmenter l'ordre du schéma augmente la précision
- (*) changement apparemment minime, mais… (demo)

# Euler-Cromer: déjà un grand progrès!

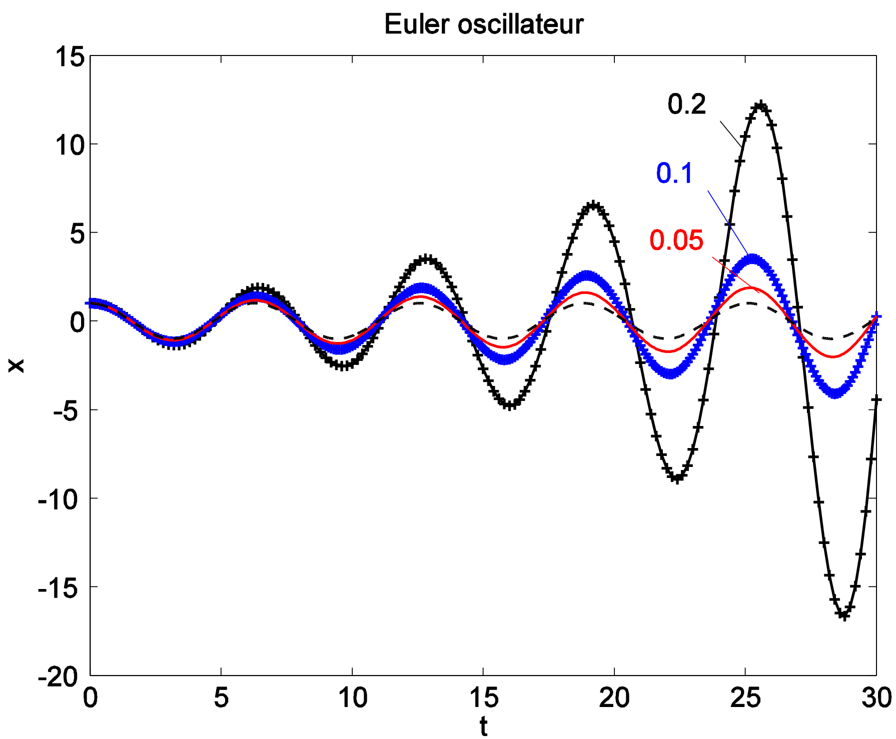



FIG. 2.8

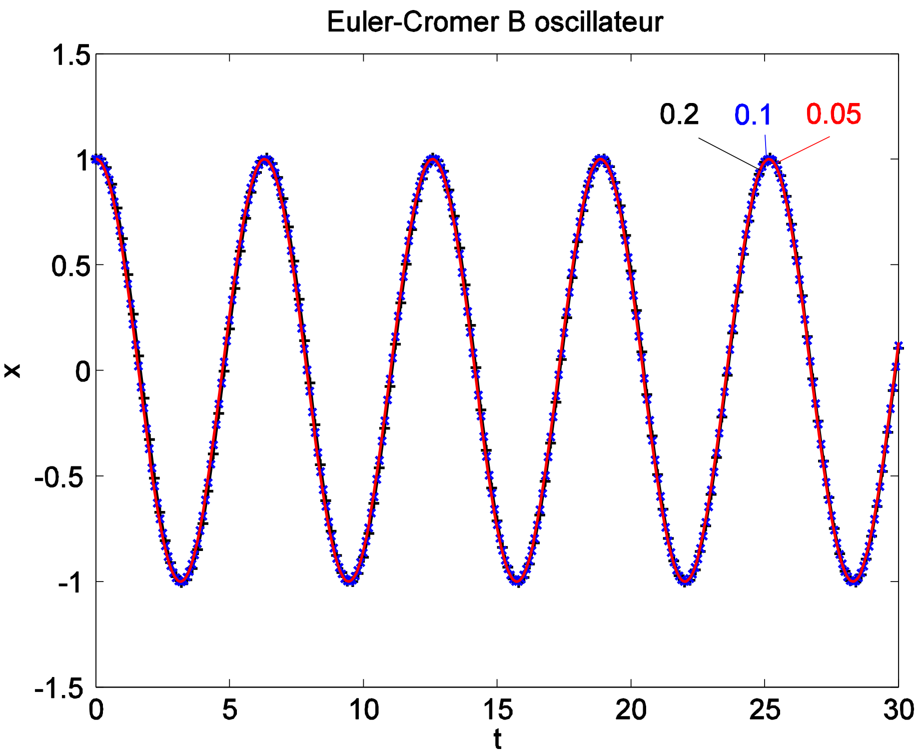
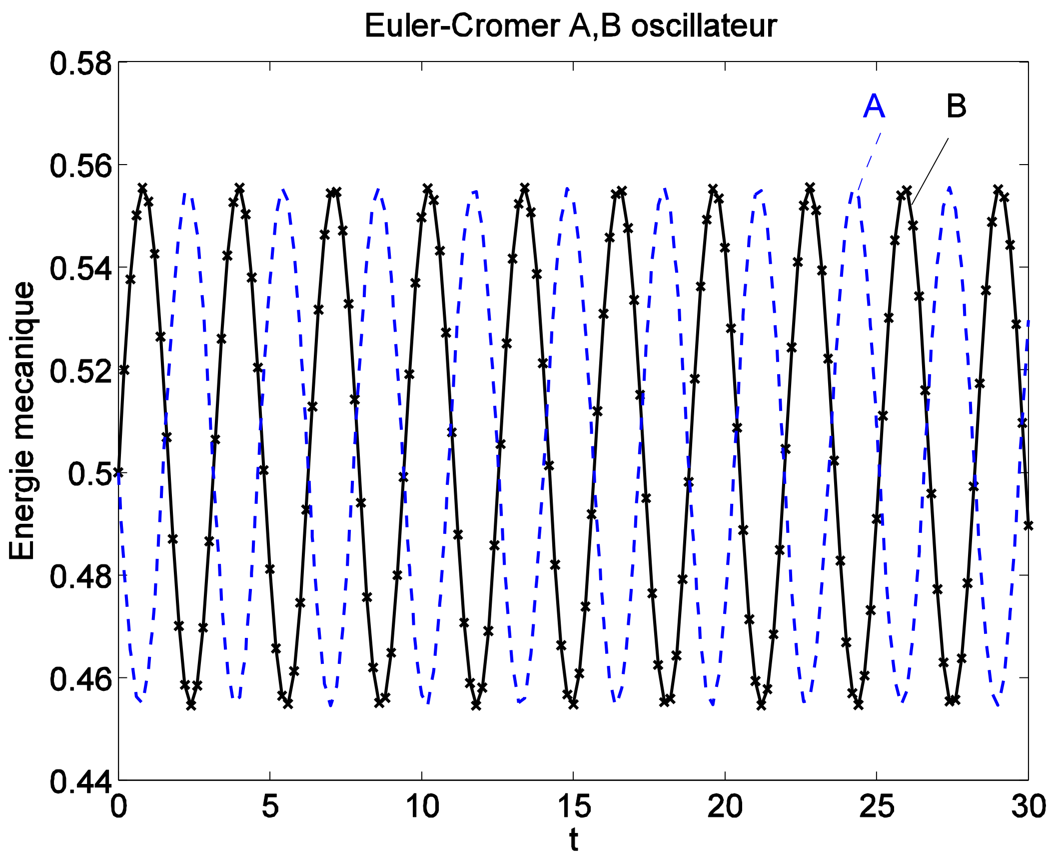



FIG. 2.9

- Les schémas d'Euler-Cromer et de Verlet seront présentés au tableau et seront illustrés par des simulations numériques.

EPFL

# Euler-Cromer: pied gauche ou pied droite d'ab




- En combinant Euler-Cromer « A » et « B » pour deux demi-pas de temps, on aboutit au schéma de Verlet. La dérivation sera présentée au tableau.

# Euler-Cromer («symplectique») (2.3.6)

- Pour la force de portance de Magnus, comme pour la force de Lorentz due au champ magnétique, l'accélération en x dépend de vz, et l'accélération en z dépend de vx.
- Le schéma d'Euler-Cromer, s'écrit, pour la particule dans un champ magnétique selon z:

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \Omega v_{y,n}$$

- $$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \Omega v_{x,n+1}$$ (Euler: $v_{x,n}$)

- Pour l'Ex.2, similaire … et attention aux signes!)

# Boris – Buneman (2.7.2)

- Cas d'une particule dans un champ magnétique

Semi-implicite
$$\frac{\vec{v}_+ - \vec{v}_-}{\Delta t} = \frac{q}{m}\left(\frac{\vec{v}_+ + \vec{v}_-}{2}\right)\times \vec{B}$$

Posons: $\omega_c = qB/m \qquad \vec{e_\parallel} = \vec{B}/B$

$$\vec{v}_+ = \vec{v}_- + \frac{\omega_c \Delta t}{1 + (\omega_c \Delta t/2)^2}\left(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel} + \frac{\omega_c \Delta t}{2}(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel}) \times \vec{e_\parallel}\right)$$

- Conserve Emec exactement, quel que soit $\Delta$t
- Ordre 2 en $\Delta$t
- Pour l'effet Magnus (Ex.2 2019), $\omega_c$ aura une autre expression

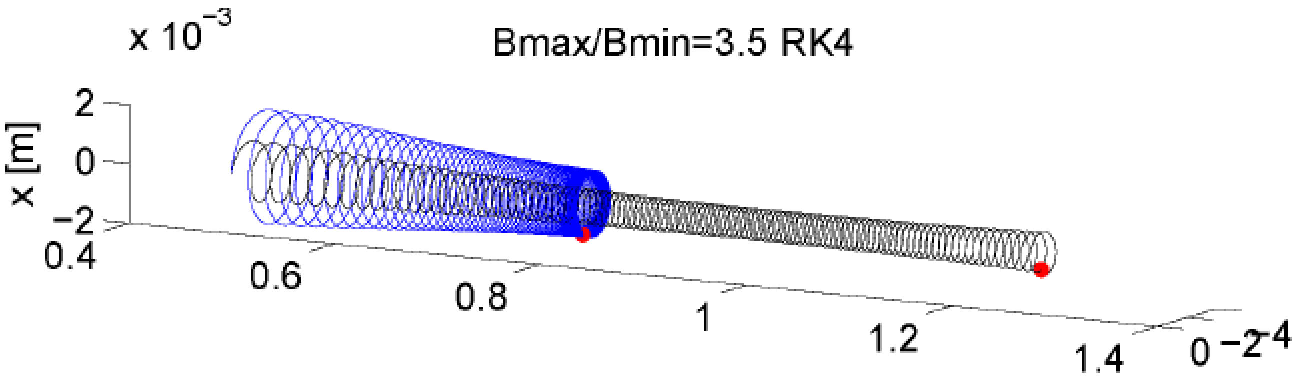
# Quiz

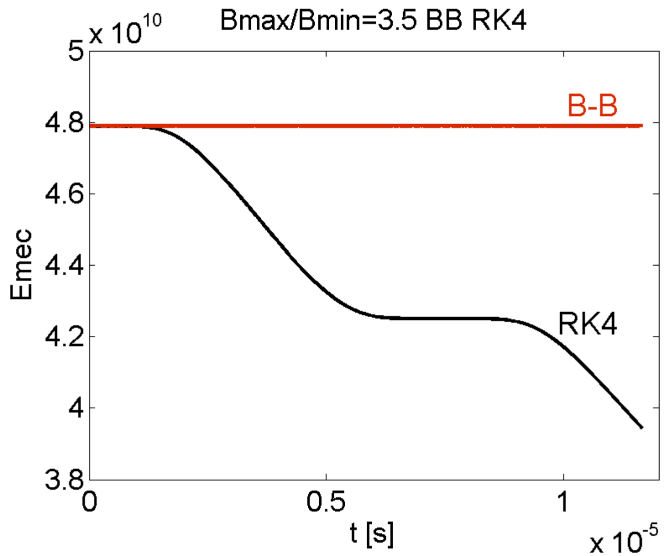
- La force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ est toujours perpendiculaire au champ magnétique.
- Donc la composante parallèle au champ magnétique est toujours nulle, $F_{//}=0$
- Donc, la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique est constante, puisque:

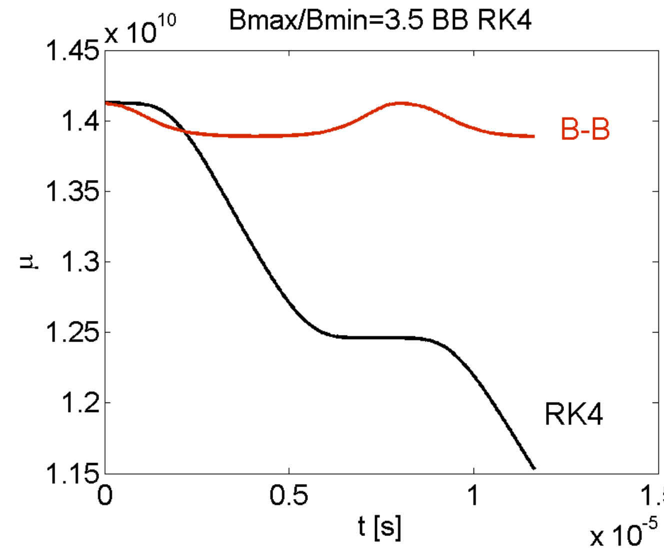
$$m\frac{d}{dt}v_{||} = F_{||} = 0$$

- … Qui est d'accord avec ce raisonnement?
- Si vous n'êtes pas d'accord, où est l'erreur?

# Particule dans champ magnétique: Boris - Buneman




- B-B Conserve Emec exactement, (quel que soit $\Delta t$ !)