# Physique Numérique I semaine 4

## ❑Infos

- Groupes d'étudiants par assistant et répartition dans les salles: voir liste sur Moodle
- Paires d'étudiants: dès l'Exercice 2, un rapport pour la paire, avec deux auteurs

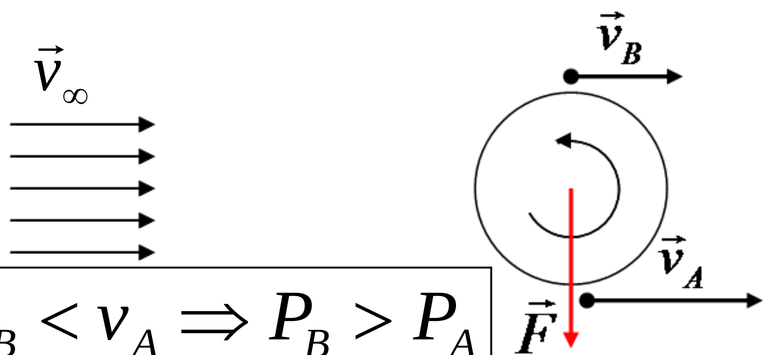
  → participation de chacun des deux requise!

# Plan

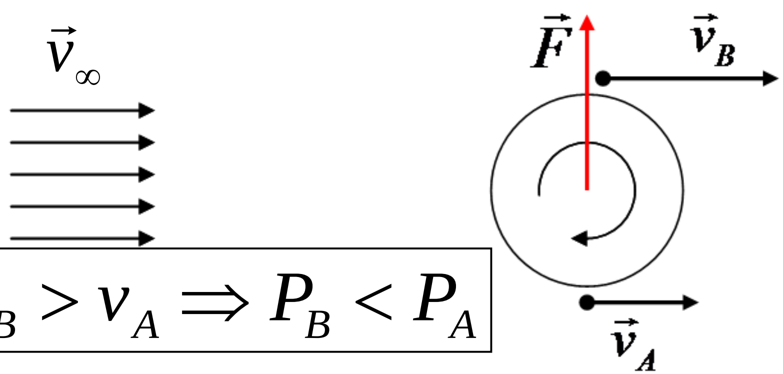
- **Notes de Cours: Section 2.2.3 et Section 2.3**
- **Exercice 2**: **particule dans champ électromagnétique**. Plusieurs schémas numériques:
- **(1) Euler explicite**
- **(2) Euler implicite:**
- **(3) Euler semi-implicite,**
- **(4) Runge-Kutta d'ordre 2 explicite:**
- ***Autres schémas numériques:***
  - **(4) Euler-Cromer (explicite, symplectique)**
  - **(5) Boris-Buneman (semi-implicite, conservatif, d'ordre 2)**
- Analogie avec l'effet Magnus et avec l'oscillateur harmonique
- Expériences

# Force de portance, effet Magnus

- Expériences




$$v_B < v_A \Rightarrow P_B > P_A$$




$$v_B > v_A \Rightarrow P_B < P_A$$

- Eq. Bernouilli

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P = const$$

(le long d'une ligne de courant)

- Formule semi-empirique

$$\vec{F}_p = \rho \mu R^3 \vec{v}_\infty \times \vec{\omega}$$

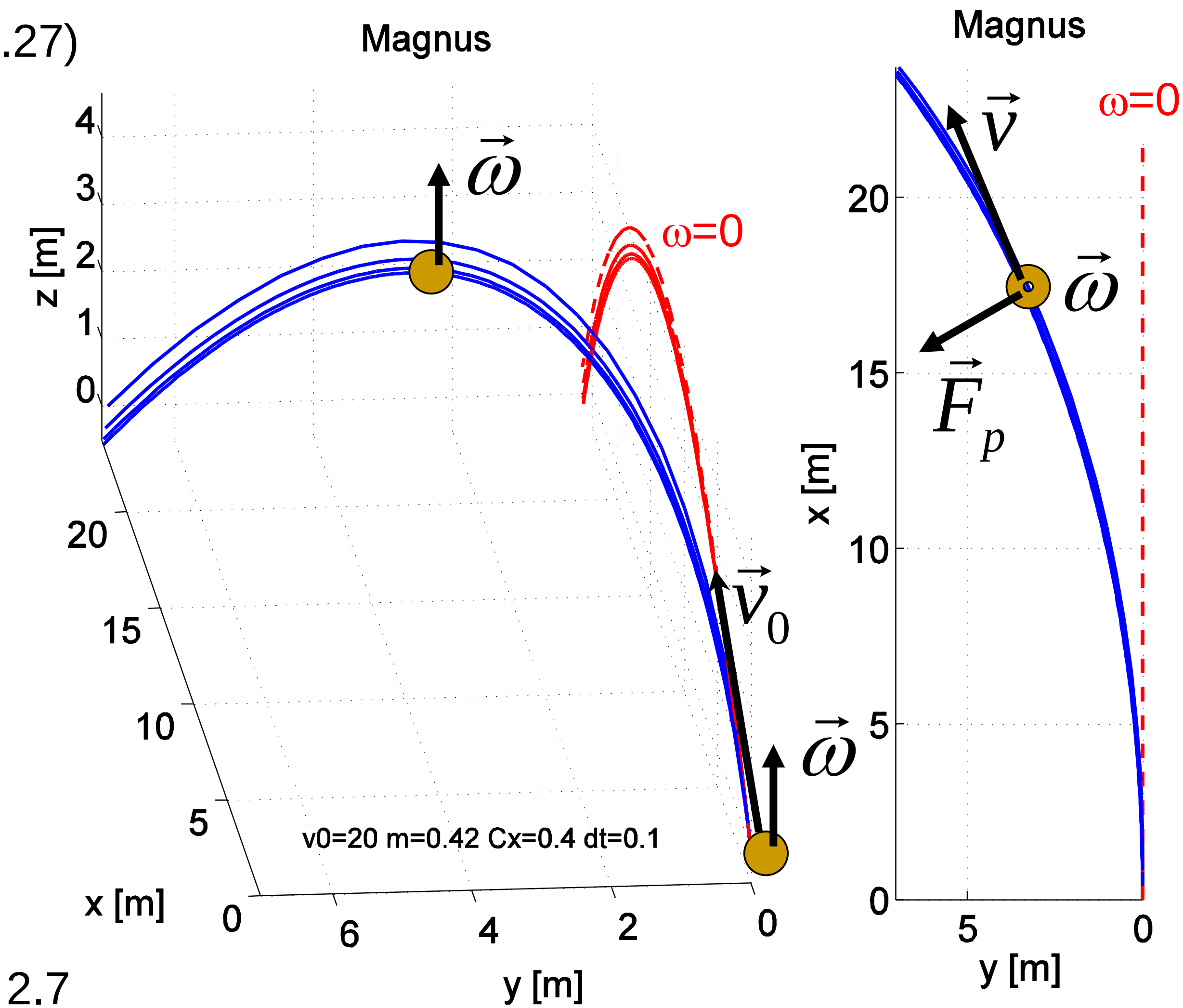
(dans le référentiel de l'obstacle)

$$\vec{F}_p = \rho \mu R^3 \vec{\omega} \times \vec{v}$$

(dans le référentiel du sol)

# Magnus tire un coup franc au football

Eq.(2.27)




$R=0.11$

$m=0.42$

$C_x=0.4$

$v_0=20$

$\alpha=30^o$

$\rho=1.3$

$\mu=2\pi$

$\omega=4\pi$

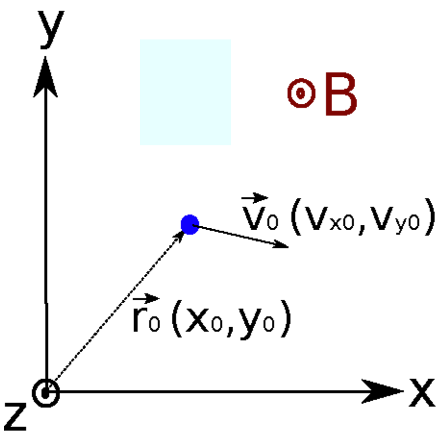
$\gamma=0$

$\Delta t=0.1, 0.0125$

FIG. 2.7

# Oscillateur harmonique, particule dans champ B, effet Magnus: même structure mathématique

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0{}^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$




$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\qquad \Omega = \frac{qB}{m}$

- Effet Magnus: $\vec{F} = -\mu R^3 \rho \vec{v} \times \vec{\omega}$ $\qquad \Omega = -\frac{\mu R^3 \rho \omega}{m}$

# Euler implicite (2.3.5)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(y_{n+1}, t_{n+1}) + O(\Delta t)$$

$$y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, t_{n+1})\,\Delta t + O(\Delta t)^2 \quad (*)$$

Résoudre cette équation (*) par itérations («point fixe»)

k=0: $y_{n+1}^{(k=0)} = y_n$

k→k+1 $y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + f(y_{n+1}^{(k)}, t_{n+1})$

Arrêter les itérations lorsque l'erreur sur la résolution de (*) est inférieure à une tolérance spécifiée, voir Notes de Cours Eq.(2.68)

# Euler semi-implicite

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \alpha f(y_n, t_\alpha) + (1-\alpha) f(y_{n+1}, t\_\alpha)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + [\alpha f(y_n, t_\alpha) + (1-\alpha) f(y_{n+1}, t_\alpha)]\Delta t}$$

Résoudre cette équation par itérations («point fixe»)

k=0: $$y_{n+1}^{(k=0)} = y_n$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + [\alpha f(y_n, t_\alpha) + (1-\alpha) f(y_{n+1}^{(k)}, t_\alpha)]\,\Delta t$$

k→k+1

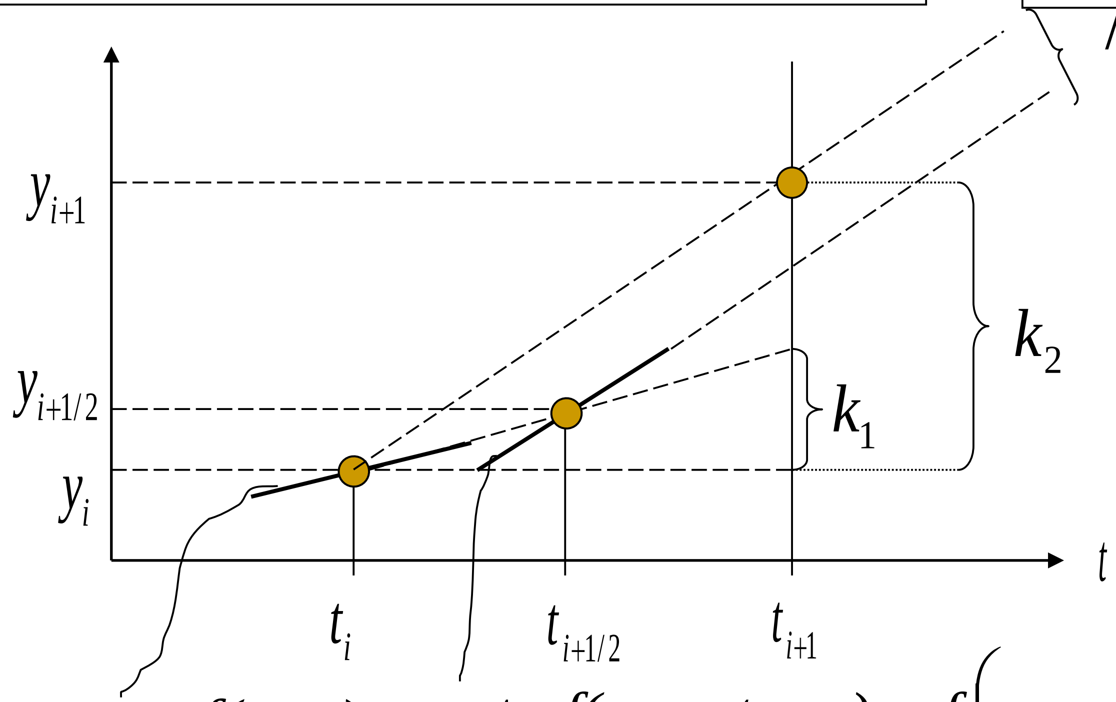
$$d = |y_{n+1}^{(k+1)} - y_n - [\alpha f(y_n, t_\alpha) + (1-\alpha) f(y_{n+1}^{(k+1)}, t_\alpha)]\,\Delta t|$$

Arrêter les itérations lorsque l'erreur *d* est inférieure à une tolérance spécifiée $\varepsilon$

# Runge-Kutta d'ordre 2 (2.3.7)

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta t\, f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i,t_i), t_{i+1/2}\right)} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} k_1 &= \Delta t\, f(y_i,t_i) \\ k_2 &= \Delta t\, f\left(y_i + 0.5k_1, t_i + 0.5\Delta t\right) \\ y_{i+1} &= y_i + k_2 \end{aligned}}$$




pente $f(y_i,t_i)$ pente $f(y_{i+1/2},t_{i+1/2}) = f\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i,t_i), t_{i+1/2}\right)$

Runge-Kutta ordre 2

Voir aussi les Notes de Cours, pp. 39-40, pour une généralisation

# Euler-Cromer («symplectique») (2.3.6)

- Pour la force de portance de Magnus, comme pour la force de Lorentz due au champ magnétique, l'accélération en x dépend de vz, et l'accélération en z dépend de vx.
- Le schéma d'Euler-Cromer, s'écrit, pour la particule dans un champ magnétique selon z:

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \Omega v_{y,n}$$

- $$v_{y,n+1} = v_{y,n} - \Omega v_{x,n+1}$$ (Euler: $v_{x,n}$)

- Pour l'Ex.2, similaire (mais (x,z) au lieu de (x,y), … et attention aux signes!)

# Boris – Buneman (2.7.2)

- Cas d'une particule dans un champ magnétique

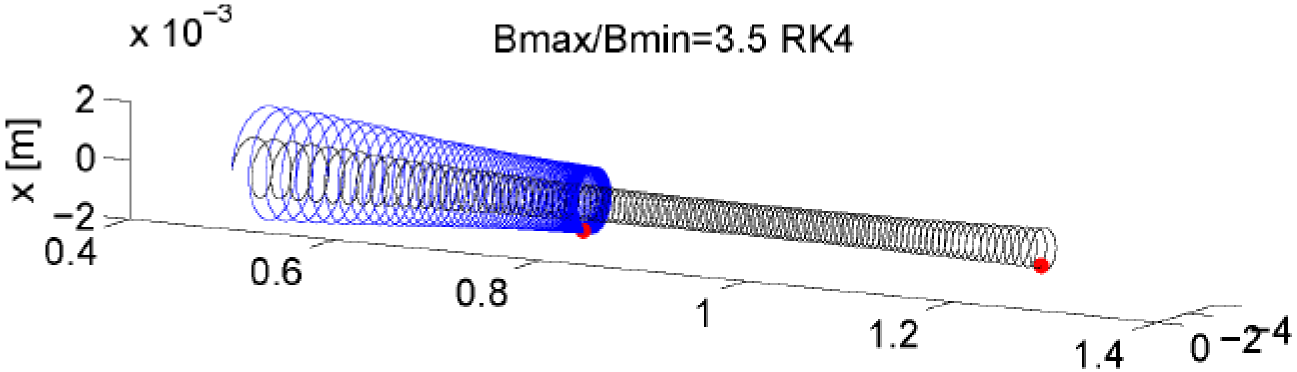
Semi-implicite $$\frac{\vec{v}_+ - \vec{v}_-}{\Delta t} = \frac{q}{m}\left(\frac{\vec{v}_+ + \vec{v}_-}{2}\right) \times \vec{B}$$

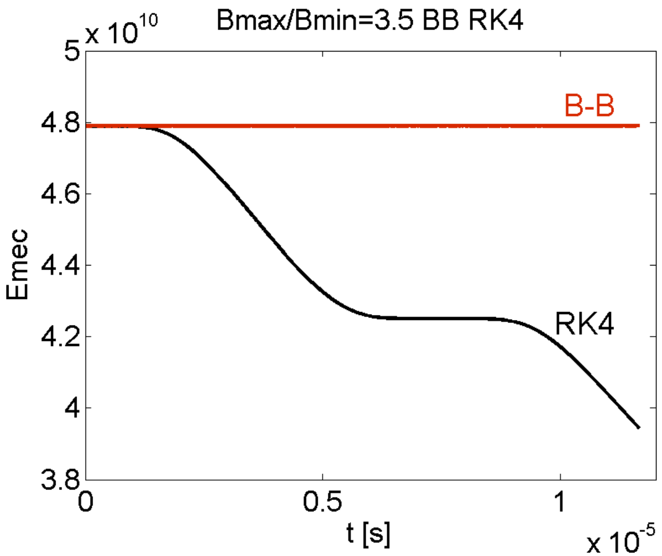
Posons: $\omega_c = qB/m \qquad \vec{e_\parallel} = \vec{B}/B$

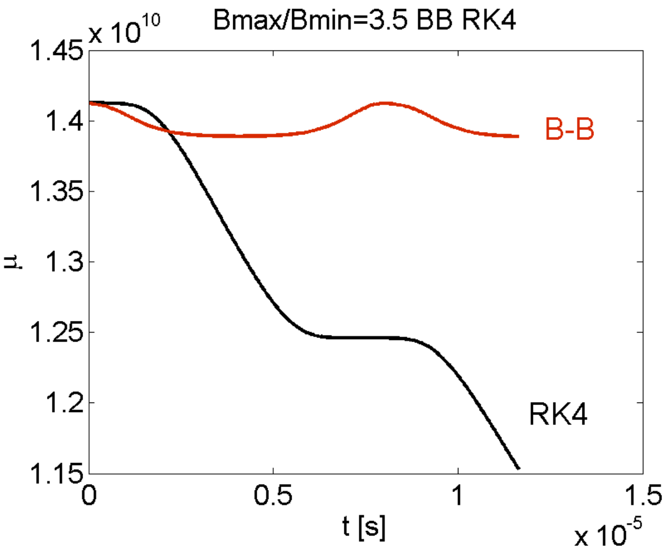
$$\vec{v}_+ = \vec{v}_- + \frac{\omega_c \Delta t}{1 + (\omega_c \Delta t/2)^2}\left(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel} + \frac{\omega_c \Delta t}{2}(\vec{v}_- \times \vec{e_\parallel}) \times \vec{e_\parallel}\right)$$

- Conserve Emec exactement, quel que soit $\Delta$t
- Ordre 2 en $\Delta$t
- Pour l'effet Magnus (Ex.2 2019), $\omega_c$ aura une autre expression

# Particule dans champ magnétique: Boris - Buneman




- B-B Conserve Emec exactement, (quel que soit $\Delta t$ !)

# Exercice 2: indications

- On utilisera des ‘valarray’ dans le code C++, par exemple:
  - valarray<double> x=valarray<double>(3); // position de la particule
  - valarray<double> v=valarray<double>(3); // vitesse de la particule
- On peut additioner des valarrays et les multiplier par un scalaire, p.ex.:
  - x += v * dt;   // mise à jour de la position
- On a déjà défini dans le squelette de code C++ des fonctions pour le produit scalaire de deux vecteurs:
  - produitInterne(valarray1,valarray2)
- Et la norme d’un vecteur:
  - norm2(valarray)
- On donne un script ParameterScan.m qui lance une série de simulations avec plusieurs valeurs d’un paramètre d’entrée, (nsteps, pour faire une étude de convergence)
- Des fonctions Python sont également données