École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2025
Prof. Laurent Villard
Dr Giovanni Di Giannatale

Physique Numérique – Exercice 2

A rendre jusqu'au mardi 18 mars 2025 sur le site Moodle

2 Aiguille aimantée dans un champ magnétique oscillant. Mode propre. Excitation paramétrique. Chaos. Poincaré. Attracteurs étranges.

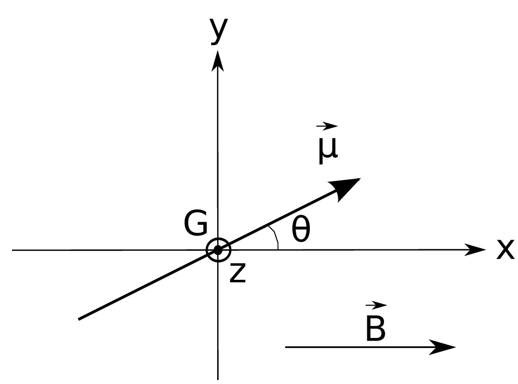

Figure 1 – Aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ magnétique $\vec{B}(t)$.

Une aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{\mu}$, considérée comme une tige mince de masse m, longueur L peut pivoter autour de son centre de masse G dans le plan horizontal (x, y), voir Fig. 1. Elle est plongée dans un champ magnétique variable :

$$\vec{B}(t) = (B_0 + B_1 \sin(\Omega t))\vec{e}_x \tag{1}$$

avec des amplitudes B_0 et B_1 données et une fréquence angulaire Ω donnée. On rappelle qu'un champ magnétique exerce un couple de forces $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. On rappelle aussi que l'énergie potentielle d'un moment magnétique dans un champ magnétique *constant* $\vec{B}_0$ est $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$. En plus, l'aiguille est soumise à un couple de forces de viscosité $\vec{M}_v = -\kappa\dot{\theta}\vec{e}_z$.

Le but de l'exercice, du point de vue physique, est de vérifier les propriétés des petits mouvements (mode propre, fréquence propre), avant de se focaliser sur différents **phénomènes non-linéaires** : excitation paramétrique, chaos, attracteurs étranges.

Du point de vue numérique, le but est d'introduire, tester et vérifier les propriétés d' un **schéma symplectique, le schéma de Verlet**.

2.1 Calculs analytiques [12 pts]

(a) **[5 pts]** Etablir les équations différentielles du mouvement de l'aiguille et les écrire sous la forme $\mathrm{d}\mathbf{y}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$, avec $\mathbf{y} = (\theta, \dot{\theta})$.

(b) **[4 pts]** Ecrire l'expression de l'énergie mécanique E_{mec} de l'aiguille. Est-elle conservée ? Si non, écrire l'expression de la puissance des forces non-conservatives P_{nc}.

(c) **[3 pts]** Considérer le cas sans excitation, $B_1 = 0$, et sans viscosité, $\kappa = 0$. Linéariser les équations du mouvement au voisinage du point d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$ et calculer la fréquence angulaire propre ω_0 et le mode propre correspondant $\theta(t)$.

2.2 Implémentation en C++

Télécharger le fichier Exercice2_student.zip du site Moodle. Dans le code, il faut implémenter le schéma de Verlet, avec son extension pour des forces dépendant de la vitesse, Eqs.(2.128)(2.129)(2.132) des Notes de Cours, Section 2.7.4. Il faut aussi implémenter le calcul de l'énergie mécanique et celui de la puissance des forces non conservatives. En plus des paramètres d'input physiques (m, L, μ, B_0, B_1 et Ω) et les conditions initiales (θ_0 et $\dot{\theta}_0$), les autres paramètres d'input importants sont le nombre N de périodes d'excitation que l'on simule (i.e. le temps final sera $t_{\text{fin}} = NT$, avec$T = 2\pi/\Omega$), et le nombre de pas de temps par période d'excitation n_{per} (i.e. le pas de temps sera $\Delta t = T/n_{\text{per}}$).

Important : il vous faut au moins une fois sur les deux sessions d'exercices montrer votre code à votre assistant.

2.3 Simulations et Analyses [33 pts]

On effectue des simulations avec le programme que l'on vient d'écrire et de compiler. La visualisation des résultats numériques se fait avec Python (ou `Matlab`).

On prendra les valeurs suivantes : $m = 0.075$kg, $L = 0.08$m, $\mu = 0.2$J/T, $B_0 = 0.01$T.

(a) **[4 pts] Petits mouvements. Mode propre.**
On considère le cas sans excitation, $B_1 = 0$, et sans viscosité, $\kappa = 0$, et une condition initiale proche du point d'équilibre stable, $\theta_0 = 10^{-6}$, $\dot{\theta}_0 = 0$. Simuler $N = 3$ périodes théoriques. On mesure l'erreur numérique au temps t_{fin} comme

$$\delta = \sqrt{\omega_0^2(\theta(t_{\text{fin}}) - \theta_a(t_{\text{fin}}))^2 + (\dot{\theta}(t_{\text{fin}}) - \dot{\theta}_a(t_{\text{fin}}))^2}, \tag{2}$$

où $\theta_a(t)$ est la solution analytique et ω_0 la fréquence angulaire propre. Prendre des n_{per} différents et effectuer une étude de convergence de l'erreur δ en fonction de Δt.

(b) **[8 pts] Excitation paramétrique.**
On considère maintenant une excitation $B_1 = 0.002$T, avec une fréquence $\Omega = 2\omega_0$, où ω_0 est la fréquence angulaire du mode propre, mais toujours pas de viscosité : $\kappa = 0$. On prend une condition initiale proche du point d'équilibre stable, $\theta_0 = 10^{-3}$, $\dot{\theta}_0 = 0$. On simule $N = 100$ périodes d'excitation. Illustrer et décrire qualitativement les solutions obtenues : $\theta(t)$, orbite dans l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$, $E_{\text{mec}}(t)$, comparaison de $\mathrm{d}E_{\text{mec}}(t)/\mathrm{d}t$ avec $P_{\text{nc}}(t)$.
Faire un étude de convergence de la position finale $\theta(t_{\text{fin}})$ avec Δt.

(c) **[8 pts] Sections de Poincaré. Cas sans amortissement.**
Pour les mêmes paramètres physiques qu'au cas précédent, faire des *sections de Poincaré* pour diverses conditions initiales, et pour un temps de simulation de plusieurs milliers de périodes d'excitation, $N \sim 5000 - 10000$. Une section de Poincaré est l'ensemble des points de l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$ collectés à chaque période d'excitation, i.e. aux temps $t_j = jT$, avec $j \in \mathbb{N}$. En pratique, cela revient à prendre tous les n_{per} pas de temps numériques. *Indication : ne pas faire l'output de tous les points de la trajectoire, seulement la section de Poincaré, pour éviter les fichiers trop volumineux.*

(d) **[8 pts] Chaos, stabilité des orbites (Lyapunov). Etudes de convergence pour un cas chaotique et pour un cas non-chaotique. Cas sans amortissement.**

Dans cette section, il suffit de simuler un temps final de $N = 100$ périodes d'excitation. Toujours pour les mêmes paramètres physiques qu'au cas précédent, choisir deux conditions initiales, l'une donnant un comportement chaotique, l'autre non. Pour chacune de ces deux conditions initiales, faire une paire de simulations "quasi-jumelles", $\theta_a(t)$ et $\theta_b(t)$ obtenues avec des conditions initiales différant d'un angle de 10^{-6}. Calculer la "distance" entre les simulations de chaque paire au cours du temps,

$$\delta_{ab}(t) = \sqrt{\omega_0^2(\theta_b(t) - \theta_a(t))^2 + (\dot{\theta}_b(t) - \dot{\theta}_a(t))^2}, \tag{3}$$

avec ω_0 la fréquence angulaire propre. Illustrer et discuter le résultat, en particulier sur la différence entre le cas chaotique et le cas non-chaotique.

(e) **[5 pts] Chaos, attracteurs étranges. Cas avec amortissement.**
On prend cette fois $B_1 = 0.018$T, $\kappa = 2{\cdot}10^{-5}$, en gardant $B_0 = 0.01$T et $\Omega = 2\omega_0$. On effecture de très longues simulations, $N \sim 5000 - 10000$. *Indication : ne pas faire l'output de tous les points de la trajectoire.* Obtenir les sections de Poincaré pour des simulations ayant des *conditions initiales très différentes l'une de l'autre* (par exemple $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (2, 12)$ et $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-1, -8)$). Discuter qualitativement les résultats.

(f) **[max 5pts] Facultatif.** Le but de cette section est de stimuler votre créativité. On donne ci-dessous quelques pistes possibles pour aller plus loin, mais n'hésitez pas à vous lancer si vous avez d'autres idées.
   (i) Pour le cas (e), faire une analyse de stabilité des orbites avec la procédure indiquée en (d).
   (ii) A partir du cas physique (e), changer l'amplitude d'excitation B_1 et déterminer les plages chaotiques et non-chaotiques.
   (iii) Simuler la stabilisation non-linéaire de la position d'équilibre (linéairement) instable $\theta_{\text{eq}} = \pi$.

2.4 Rédaction du rapport en LaTeX, soumission du rapport en pdf et du code source C++

(a) Rédiger un rapport de **maximum 10-12 pages** dans lequel les résultats sont présentés, analysés et discutés.
(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice1_Nom1_Nom2.pdf`.
(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice1_Nom1_Nom2.cpp`.
(d) Le lien de soumission est ici.

En plus des points mentionnés ci-dessus, [**5 pts**] *sont attribués pour la qualité générale de votre travail : qualité rédactionnelle du rapport, mais aussi participation en classe en interaction avec les assistants.*