Appendice 2 La décomposition en série de Fourier

Fonctions périodiques

Définition

Soit une fonction $f(\theta)$, telle que:

$$f(\theta) = f(\theta - 2\pi) \tag{2.1}$$

On considérera que $f(\theta)$ est une “bonne fonction” dans le sens où dans l’intervalle: $0 \leq \theta \leq 2\pi$

- elle possède un nombre fini de discontinuités
- elle possède un nombre fini d’extremum
- elle est monotone et continue
- elle peut prendre des valeurs infinies pour autant que l’intégrale:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \text{ converge absolument}$$

Sans entrer dans le détail, les conditions que $f(\theta)$ doit remplir sont connues sous le nom de ***conditions de Dirichlet***.

Si ces conditions sont remplies, on peut alors approximer la fonction périodique $f(\theta)$ par une série de fonctions trigonométriques, connue sous le nom de série de Fourier:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\theta) \quad (2.2)$$

En multipliant cette dernière relation, par l'unité, $\cos(m\theta)$ et $\sin(m\theta)$ respectivement, et en intégrant entre 0 et 2π, on obtient facilement les relations intégrales permettant de déterminer les coefficients a_0, a_n et b_n, connus sous le nom de coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (2.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (2.5)$$

On remarque que le coefficient a_0 ne représente rien d'autre que la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle considéré.

convergence

On peut démontrer le théorème suivant:

La série de Fourier d'une fonction $f(\theta)$ de périodicité 2π remplissant les conditions de Dirichlet converge pour toutes les valeur de θ. La somme de la série de Fourier égale la valeur de la fonction en tous les points de continuité et est égale à la moyenne arithmétique des limites à gauche et à droite sur les points de discontinuité. Si $f(\theta)$ est continue en tout point, la série de Fourier converge absolument et uniformément.

exemple 1:

La fonction f(x) est discontinue en x_0, dans ce cas la somme de la série de Fourier prend en x_0 la valeur:

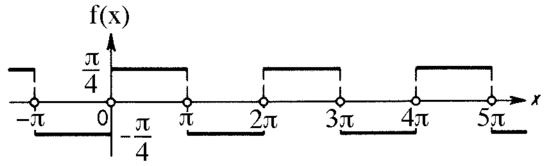
$$\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)] \quad (2.6)$$

exemple 2:

calculer le développement en série de Fourier de la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{si} \qquad 2n\pi < x < (2n+1) \cdot \pi$$

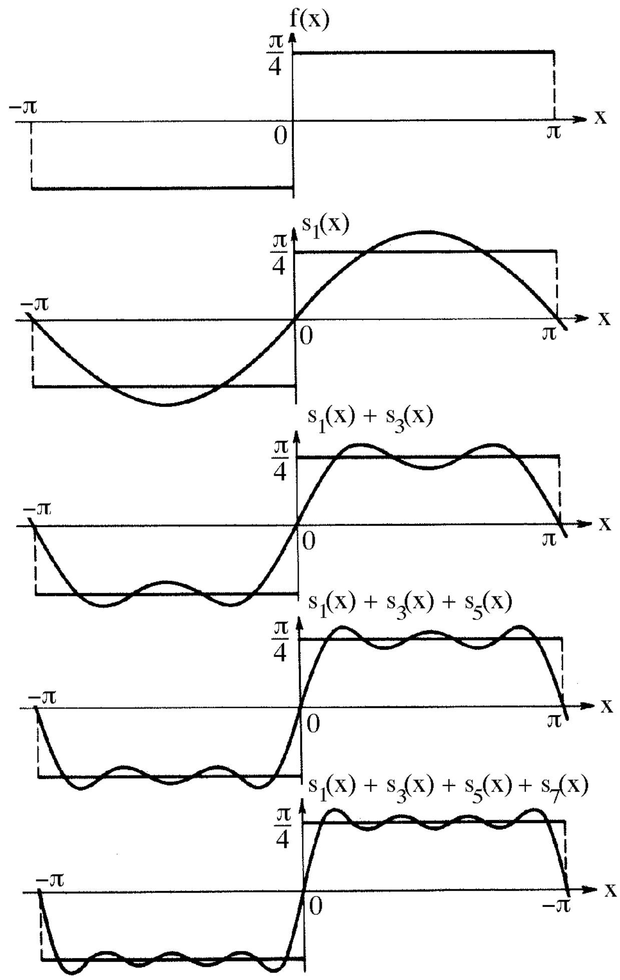
$$f(x) = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{si} \qquad (2n\text{-}1)\pi < x < 2n\pi$$



la fonction est impaire et par conséquent tous les coefficients a_n sont nuls.

$$b_n = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi n}\right) \cdot [1-(-1)^n]$$

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = s_1(x) + s_3(x) + s_5(x) + \ldots$$



On observe, bien, dans la figure ci-dessus que la série converge vers f(x).

On vérifie aussi que la valeur de la série aux points de discontinuité est bien égale à zéro (ce qui est logique, la moyenne arithmétique de $\pi/4$ et - $\pi/4$ étant zéro)

symétrie de $f(\theta)$

<u>fonction paire</u>

si la fonction f(x) est paire (symétrie miroir, d'axe vertical), i.e. si la relation:

$$f(x) = f(-x) \tag{2.7}$$

est vérifiée, on montre facilement que tous les coefficients b_n sont nuls. Dans ce cas:[1]

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \tag{2.8}$$

<u>fonction impaire</u>

si la fonction est impaire (l'origine est un centre de symétrie), i.e. si la relation:

$$f(\theta) = -f(-\theta) \tag{2.9}$$

est vérifiée, tous les coefficient a_n sont nuls et la série de Fourier devient une pure série de sinus:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \tag{2.10}$$

différentiation

La dérivée d'une série de Fourier ne converge pas nécessairement. C'est entre autre le cas lorsque la fonction présente des discontinuités.

1. l'intégrale sur une période est égale à deux fois l'intégrale sur une demi-période, parce que la fonction est paire.

Fonctions non-périodiques, définies seulement sur l'intervalle [-π,+π]

C'est un cas que l'on retrouve souvent dans les problèmes concrets de physique.

On construit dans ce cas une fonction de périodicité 2π qui coincide avec la fonction étudiée sur l'intervalle [-π, +π]

On peut distinguer deux cas:

a) la fonction possède la même valeur aux extrémités de l'intervalle:

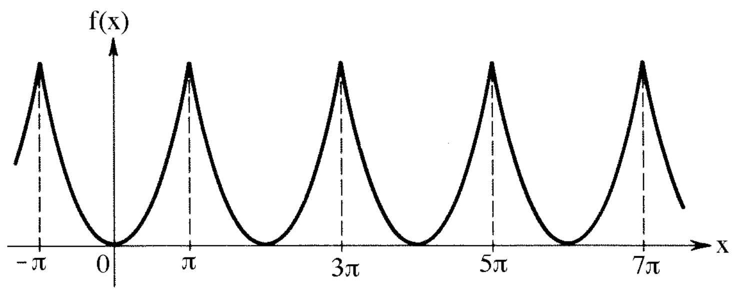
$$f(-\pi) = f(\pi)$$

Dans ce premier cas, il n'y a aucun problème, on construit une nouvelle fonction périodique qui coïncide avec la fonction originale sur l'intervalle [-π, +π]. Le théorème sur la convergence des séries de Fourier assure que la série de Fourier coincidera bien avec la fonction sur l'intervalle considéré.

<u>exemple</u>:

développer en série de Fourier la fonction f(x) définie par:

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$



dans ce cas, la valeur de la fonction est la même aux extrémités de l'intervalle, on peut construire une fonction périodique et calculer les coefficients de Fourier.

La fonction étant paire, les coefficients b_n sont tous nuls.

On obtient:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

Par conséquent, dans l'intervalle [-π, +π], le développement de la fonction est:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

b) la fonction possède des valeurs différentes aux extrémités de l'intervalle

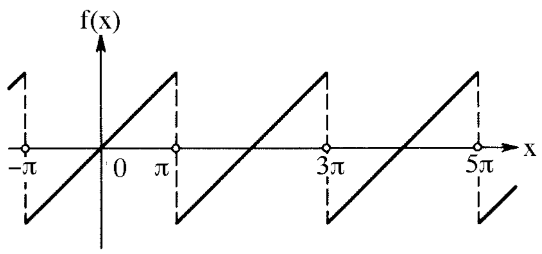
$$f(-\pi) \neq f(\pi)$$

on procède de la même manière que précédemment, on construit une fonction périodique, mais dans ce cas, la valeur de la fonction aux extrémités de l'intervalle est indéfinie. Le théorème sur la convergence des séries de Fourier indique simplement que la série convergera vers la fonction sur l'intervalle considéré et qu'aux limites de l'intervalle, la valeur prise par la série sera la moyenne arithmétique de la fonction à gauche et à droite.

exemple:

développer en série de Fourier la fonction:

$$f(x) = x \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$



On calcule facilement les coefficients de Fourier:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

les coefficients a_n sont tous nuls, car la fonction est impaire

On vérifie que la série de Fourier prend une valeurs nulle aux extrémités de l'intervalle conformément à ce qui était prédit.

Fonctions de périodicité T

On peut généraliser facilement au cas où la fonction est de périodicité $T \neq 2\pi$, i.e. si:

$$f(t) = f(t-T) = f\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \tag{2.11}$$

La série Fourier est alors donnée[1] par:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega t) \tag{2.12}$$

représentation spectrale

On peut représenter graphiquement la série de Fourier en reportant les coefficients a_n et/ou b_n en fonction de $(n\omega)$, c'est ce que l'on appelle la représentation spectrale de f(t).

La série de Fourier en notation complexe

En utilisant les relations d'Euler:

$$\cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} = (-j) \cdot \left[\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2}\right]$$

on peut exprimer (2.13) en notation complexe:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n) \cdot e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) \cdot e^{-jn\omega t} \tag{2.13}$$

les coefficients dans les sommations s'exprimant alors comme:

$$\alpha_{\pm n} = a_n \pm jb_n = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) \cdot e^{\pm jn\omega t} dt \tag{2.14}$$

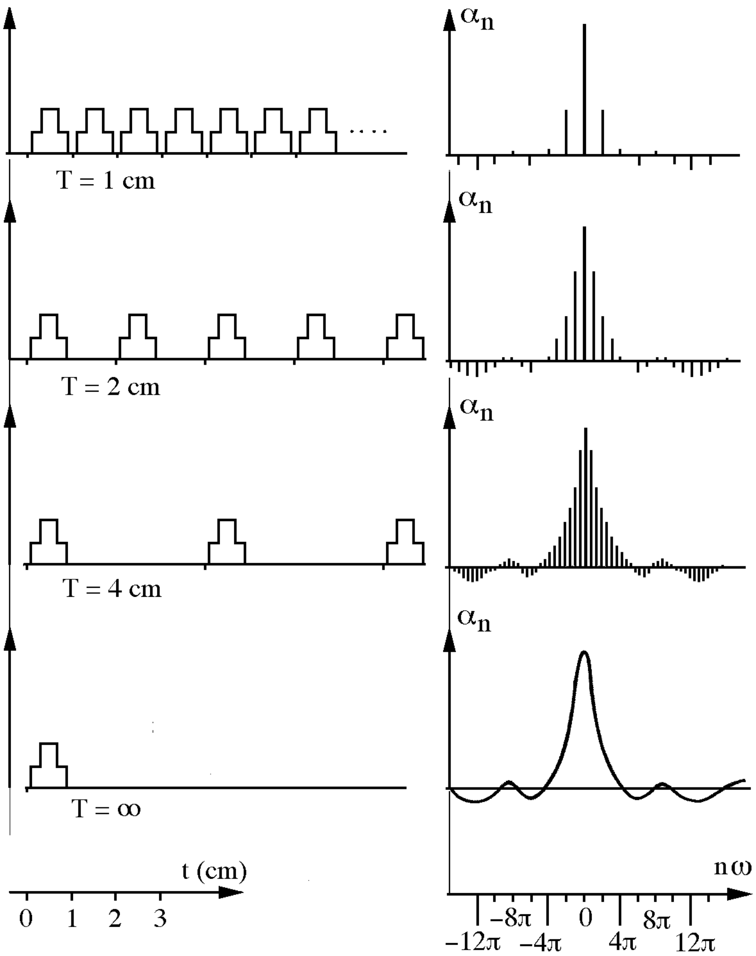
avec ces notations, il est possible de réécrire (2.14) de manière plus symétrique en sommant sur des indices qui prennent des valeurs positives et négatives:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \alpha_n \cdot e^{jn\omega t} \tag{2.15}$$

1. Il suffit de faire le changement de variable $t = \frac{2\pi\theta}{T} = \omega \cdot \theta$

Pratiquement, cette manière de formuler les séries de Fourier est utile lorsqu'on s'intéresse à des fonctions non périodiques. On peut montrer, dans ces circonstances, qu'il est possible de passer à la limite et remplacer alors la somme intervenant dans (2.16) par une intégrale. Cette manière de procéder permet d'introduire le concept de transformée de Fourier à partir de la série de Fourier.On peut comprendre intuitivement ce passage à la limite en considérant une fonction f(t), de périodicité $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On calcule les coefficients de Fourier pour différentes valeurs de T. Le spectre de f(t) en fonction de T est représenté graphiquement dans la Figure suivante:



On observe bien que lorsque T tend vers l'infini, le spectre tend vers une courbe continue, ceci signifie que la somme intervenant dans (2,15) s'exprime sous la forme d'une intégrale. Si le passage à la limite est traité rigoureusement, on obtient pour (2,15):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}d\tau d\omega \qquad (2.16)$$

Résumé

Soit une fonction $f(t)$, telle que:

$$f(t) = f(t - T)$$

qui possède les propriétés suivantes:

- elle possède un nombre fini de discontinuités
- elle possède un nombre fini d'extremum
- elle est monotone et continue
- elle peut prendre des valeurs infinies pour autant que l'intégrale:

  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$ converge absolument

La série Fourier est alors donnée par:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega t)$$

avec:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \qquad (\text{fonction impaire: } a_n = 0 \quad \forall n)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \qquad (\text{fonction paire: } b_n = 0 \quad \forall n)$$