Physique générale : quantique, Série 8

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Valeurs moyennes des observables

Nous avons vu que les quantités physiques “observables”, dans le formalisme mathématique de la Physique Quantique, sont exprimées par des opérateurs agissant sur la fonction d'onde.

Si on mesure une observable exprimée par l'opérateur $\hat{A}$, la valeur moyenne ou “espérance” de la mesure est donnée par

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\hat{A}\psi(x)\,,$$

où l'opérateur $\hat{A}$ agit sur la fonction d'onde $\psi(x)$ à sa droite. On rappelle que l'opérateur $\hat{x}$, associé à l'observable position de la particule, agit sur la fonction d'onde comme la multiplication par la variable x. On retrouve donc pour la position, l'expression de la valeur moyenne déjà vue au cours

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\hat{x}\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x|\psi(x)|^2\,.$$

Nous nous intéressons ici au calcul des valeurs moyennes de $\hat{x}$, $\hat{p}$, et de leurs carrés. On considère en particulier une particule de masse m qui se trouve dans un état décrit par la fonction d'onde

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}+ikx}\,,$$

avec $\sigma > 0$ et k réel.

1. Calculer la valeur moyenne de x.
2. Calculer la valeur moyenne de p.
3. Calculer l'incertitude Δx. Elle est donnée par la écart type de la quantité x.
4. Calculer l'incertitude Δp.
5. Calculer le produit d'incertitude et montrer qu'il satisfait le principe d'incertitude.

Pour cet exercice on va utiliser des résultats connus pour les intégrales Gaussiennes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Adopter des changements de variable pour calculer les intégrales Gaussiennes intervenant dans l'exercice à partir des intégrales ci-dessus.

Exercice 2 : Problème inverse

Il est souvent utile de déterminer le potentiel $U(x)$, étant donné la fonction d'onde d'un état. Considérons une particule de masse m qui se trouve dans un état décrit par la fonction d'onde

$$\psi(x) = e^{-\alpha x^2} ,$$

où nous avons négligé la constante de normalisation, car elle ne sera pas importante pour cet exercice, et $\alpha > 0$. Supposer que cet état est un état propre, solution de l'équation de Schrödinger stationnaire, avec valeur propre de l'énergie E.

1. Calculer le potentiel $U(x)$ tel que la fonction ci-dessus est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire avec valeur propre de l'énergie E.
2. De quel potentiel couramment rencontré en physique s'agit-il ?
3. Peut-on déterminer la valeur de E à partir de ces seules considérations ? Si non, expliquer la raison physique.

Exercice 3 : Etat fondamental d'un puits de potentiel

Le but de cet exercice est d'étudier la forme et les propriétés de l'état fondamental d'une particule dans un puits de potentiel carré avec barrière finie. On va considérer une particule de masse m soumise au puits de potentiel avec barrières finies, défini par

$$U(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{L}{2} \\ U > 0 & x < -\frac{L}{2} \text{ et } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

On cherche un état propre confiné dans le puits, c.-à-d. avec valeur propre de l'énergie $E < U$. On va faire l'hypothèse que la fonction d'onde prend la forme

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{Cx} & x < -\frac{L}{2} \\ F\cos(kx) & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ Ae^{-Cx} & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

avec $C = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U-E)}$ et $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$.

1. Imposer les conditions au bord et trouver une équation pour E. Etant donné la forme de la fonction d'onde, qui remplit déjà une partie des conditions, il suffira d'imposer les conditions seulement à une des deux positions, p.e. $x = -L/2$.
2. Montrer qu'il existe toujours une solution valable, quelle que soit la hauteur U des barrières.
3. Quelle est la valeur limite de E, dans la limite d'un puits peu profond $U \to 0$?
4. Quelle est la valeur limite de E, dans la limite opposée d'un puits très profond, $U \to \infty$? Montrer qu'on retrouve l'état fondamental du puits avec barrière infinie.