Physique générale : quantique, Série 7

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Le puits de potentiel infini en deux dimensions

Nous allons considérer le problème de la particule de masse m dans un puits de potentiel infini, rectangulaire de taille $L_x \times L_y$, en deux dimensions. Le puits est décrit par le potentiel suivant

$$U(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L_x \text{ et } 0 < y < L_y \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases} .$$

L'équation de Schrödinger est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} + U(x,y)\psi(x,y) = E\psi(x,y)\,.$$

Soient $\phi_n(x)$ les états propres et $E_{x,n}$ les valeurs propres de l'équation de Schrödinger pour le problème en une dimension défini par le potentiel $U_x(x) = 0$ pour $0 < x < L_x$ et $U_x(x) = +\infty$ autrement. Soient $\chi_m(y)$ les états propres et $E_{y,m}$ les valeurs propres de l'équation de Schrödinger pour le problème en une dimension défini par le potentiel $U_y(y) = 0$ pour $0 < y < L_y$ et $U_y(y) = +\infty$ autrement. Les indexes n et m prennent les valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $m = 1, 2, 3, \ldots$.

1. Montrer que les états $\psi_{n,m}(x,y) = \phi_n(x)\chi_m(y)$ sont états propres de l'équation de Schrödinger en deux dimensions ci-dessus. Calculer les énergies propres $E_{n,m}$ correspondants. (on pourrait montrer aussi que ce sont les seuls états propres possibles, mais on ne le demande pas dans cet exercice).
2. Est-il possible que, pour certaines valeurs de L_x et L_y, il y ait deux valeurs propres de l'énergie $E_{n,m}$ qui coïncident ? Si oui, donnez-en un exemple.

Exercice 2 : Electron dans un puits de potentiel en deux dimensions : 1

Considérons un électron en deux dimensions, piégé dans un puits de potentiel rectangulaire avec barrières impénétrables. Les distances entre les parois du puits sont $L_x = 2L$ et $L_y = 3L$.

1. Trouvez les fonctions d'onde des cinq premiers états propres de l'électron et calculez leurs valeurs propres de l'énergie.

2. Pour l'état fondamental, calculez la probabilité que l'électron se trouve dans le quadrant $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq 1.5L$.
3. Toujours pour l'état fondamental, calculez la probabilité que l'électron se trouve dans le ruban $L \leq y \leq 1.5L$.

Exercice 3 : Electron dans un puits de potentiel en deux dimensions : 2

Considérons un électron en deux dimensions, piégé dans un puits de potentiel rectangulaire avec barrières impénétrables. Les largeurs du puits dans les deux dimensions sont L_x et L_y, où $L_x > L_y$. Nous savons que les valeurs propres de l'énergie de l'électron dans ce puits sont données par $E_{n,m} = A(n^2 + 2m^2)$ où $A = 1\,\mathrm{meV}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $m = 1, 2, 3, \ldots$.

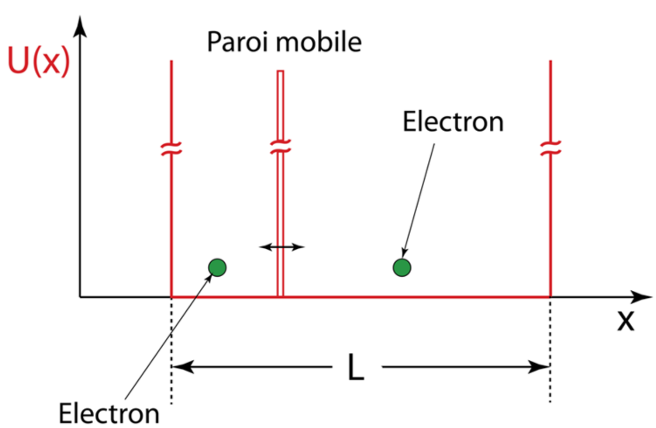
1. Trouver les valeurs de L_x et L_y.
2. Calculer les trois premières (c.-à-d. les plus petites) valeurs propres de l'énergie.
3. Calculez la longueur d'onde du photon qui, étant absorbé par le système, induirait une transition du premier au deuxième état propre.

Exercice 4 : Puits de potentiel infini avec paroi mobile

Considérons le problème de deux puits de potentiel infinis en une dimension, contenant chacun un électron. La largeur totale des deux puits est L. Les deux puits sont séparés par une paroi impénétrable, mobile et sans frottement. Nous savons qu'un électron occupe l'état fondamental dans son puits tandis que l'autre électron occupe l'état propre avec $n = 2$ dans son puits. Calculez :

1. la position de la paroi mobile à l'équilibre.
2. l'énergie totale du système quand le système se trouve à l'équilibre.
3. Donnez les réponses numériques pour $L = 5$ nm.

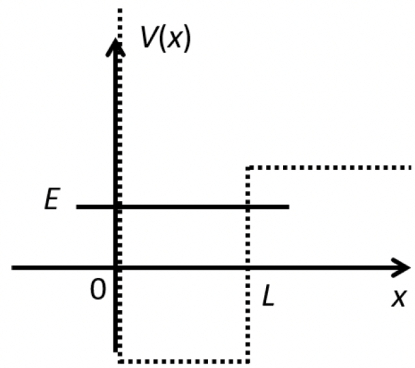
Pour cet exercice, on va négliger l'interaction électrostatique entre les deux électrons.



Exercice 5 : Question de type examen

Dans un espace à une dimension, une particule de masse m se trouve dans un état propre de l'équation de Schrödinger stationnaire avec énergie propre E. Le potentiel $V(x)$ auquel la particule est soumise est représente dans la figure et vaut

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ V_{\mathrm{I}} & 0 < x < L \\ V_{\mathrm{II}} > V_{\mathrm{I}} & x \geq L \end{cases}$$



On a $V_{\mathrm{I}} < E < V_{\mathrm{II}}$. Laquelle de ces quatre expressions de $\psi(x)$ pour $0 < x < L$ décrit correctement un tel état propre, si on tient compte des conditions au bord ? (A et k indiquent des valeurs réelles).

1. $\psi(x) = A\sin(kx)$, ou $k = \pi/L$
2. $\psi(x) = A\cos(kx)$, ou $k = \pi/L$
3. $\psi(x) = A\sin(kx)$, ou $k < \pi/L$
4. $\psi(x) = A\cos(kx)$, ou $k < \pi/L$