Physique générale : quantique, Corrigé 2

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Métabolisme basal d'un être humain

Selon les hypothèses le corps humain émet et absorbe de la chaleur en même temps. La puissance totale émise peut être calculée comme le bilan entre ces deux processus. La puissance de rayonnement absorbée de l'environnement externe est $P_{ext} = \sigma A T_{ext}^4$ et celle produite par le corps humain est $P_{corps} = \sigma A T_{corps}^4$. La énergie totale absorbée en 24 heures sera donc $E = (P_{corps} - P_{ext}) \times 24 \times 3600$ (24 heures en un jour, 3600 secondes en une heure). En utilisant la valeur de σ vue au cours on obtient (on rappelle que, dans le SI, la température se mesure en degrés Kelvin)

$$
\begin{aligned}
E &= \sigma A (T_{corps}^4 - T_{ext}^4) \times 24 \times 3600 \\
&\simeq 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \times 1.7\,\mathrm{m}^2 \times ((273+37)^4 - (273+22)^4)\,\mathrm{K}^4 \times 24 \times 3600\mathrm{s} \\
&\simeq 1.384 \times 10^9 \text{ Joules} \\
&\simeq 3308\,\text{kilocalories}
\end{aligned}
$$

L'ordre de grandeur correspond bien au résultat connu de 1800 kilocalories. L'estimation est en excès d'environ un facteur 2. En plus, si l'on considère que pas tout le rayonnement externe est absorbé par le corps humain, on devrait obtenir une valeur encore plus élevée. L'explication la plus probable est que la température à la surface du corps humain est sans doute inférieure à 37 degrés (on utilise un thermomètre sous l'aisselle ou dans la bouche, qui sont des parties isolées de l'extérieur et sont donc approximativement en équilibre avec la température interne du corps). En plus, on est normalement habillés, ce qui va encore plus dans la bonne direction. La dépendance en T^4 fait qu'une petite variation dans la température à la surface du corps humain entraîne une grande variation de la puissance émise.

Exercice 2 : Limites de la loi de Planck

1. La loi de Planck pour l'intensité de la lumière émise par un corps noir à température T en fonction de la longueur d'onde λ est

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1}$$

Dans la limite $\lambda \longrightarrow 0$, on trouve

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}}}{1 - e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}}} \tag{2}$$

où nous avons simplement multiplié le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}}$. Puisque

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}} = 0 \tag{3}$$

nous pouvons utiliser $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ pour $x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}} (1 + e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}}) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}} \tag{4}$$

qui est la loi de Wien. Le deuxième terme est $(e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}})^2 << e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}}$ pour $e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}} \longrightarrow 0$, donc on peut le négliger.
Dans la limite $\lambda \longrightarrow \infty$, on a

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} = 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} + \mathcal{O}((\frac{hc}{\lambda k_B T})^2) \tag{5}$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \tag{6}$$

qui est la loi de Rayleigh-Jeans.

2. Nous allons faire un changement de variable pour utiliser des variables sans dimension. Le but est de calculer l'intensité totale émise.

$$I(T) = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda I(\lambda, T) \tag{7}$$

$$= 2\pi hc^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{8}$$

Posons $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ On a alors $\lambda = \frac{hc}{x k_B T}$ et $\mathrm{d}\lambda = -\frac{hc}{x^2 k_B T} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, ce qui implique

$$I(T) = -2\pi hc^2 \frac{hc}{k_B T} \int_\infty^0 \mathrm{d}x \frac{1}{x^2} \frac{x^5 k_B^5 T^5}{(hc)^5} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^3}{e^x - 1} \tag{9}$$

On retrouve ainsi la dépendance en T^4 de l'intensité totale rayonnée. En utilisant les valeurs données, on retrouve la loi de Stefan-Boltzmann $I(T) = \sigma T^4$ où $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.
Pour la loi de déplacement de Wien, nous allons garder le même changement de variable

$$I(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \frac{x^5}{e^x - 1} \tag{10}$$

Nous pouvons trouver le maximum en posant la dérivée égale à zéro

$$\frac{d}{dx}\frac{x^5}{e^x - 1} = 0 \tag{11}$$

On trouve alors

$$\left(1 - \frac{x}{5}\right) e^x = 1 \tag{12}$$

On voit que $x = 0$ est une solution mais cela correspond à $\lambda \longrightarrow \infty$, et ce n'est évidemment pas un maximum. L'autre solution est $x_m \approx 4.965$. Donc

$$\frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4.965 \tag{13}$$

d'où

$$\lambda_m T = \frac{hc}{k_B}\frac{1}{4.965} \approx 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m K} \tag{14}$$

qui est la loi de déplacement de Wien.

Exercice 3 : Le Soleil est un corps noir

1. La puissance totale rayonnée (= densité de flux énergétique rayonné) par le Soleil est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann $I = \sigma T^4$. Ainsi, $\sigma T^4 (\frac{R_S}{d_{TS}})^2 = 1000$ W m^{-2}, où $R_S = 7.0 \cdot 10^5$ km est le rayon du Soleil et $d_{TS} = 1.5 \cdot 10^8$ km est la distance Terre-Soleil. Il en suit que $T = [\frac{1000}{\sigma}(\frac{d_{TS}}{R_S})^2]^{\frac{1}{4}} \approx$ 5300 K.

2. On suppose à nouveau que le Soleil émet un rayonnement de corps noir. En tenant compte qu'une partie du rayonnement arrivant sur Terre est réfléchi, et que la Terre rayonne à une température de $T = 300$ K pour une surface totale égale à $4\pi R_T^2$ (surface d'une sphère) où R_T est le rayon de la Terre, la condition d'équilibre s'écrit

$$I_T 4\pi R_T^2 = (1-\epsilon) I_S 4\pi R_S^2 \frac{\pi R_T^2}{4\pi d_{TS}^2} \tag{15}$$

où R_S est le rayon du Soleil, d_{TS} la distance Terre-Soleil, et I_T et I_S sont les puissances totales rayonnées par la Terre et le Soleil respectivement. Avec $\frac{R_S}{d_{TS}} = tan(\frac{\theta}{2})$, et en utilisant la loi de Stefan-Boltzmann $I_S = \sigma T_S^4$ pour le Soleil, et $I_T = (1-\epsilon)\sigma T^4$ pour la Terre, il vient que

$$T_S = T_T(\frac{2d_{TS}}{R_S})^{\frac{1}{2}} \approx 300 \text{ K} \left(2\frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ km}}{7 \cdot 10^5 \text{ km}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 6200 \text{ K} \tag{16}$$

Exercice 4 : Question de type examen

La réponse correcte est la 3. On calcule l'énergie associée à un photon de longueur d'onde $\lambda = 300$ nm, avec la formule $E = hc/\lambda$. L'énergie cinétique de l'électron émis est égale à l'énergie du photon moins le travail de sortie.