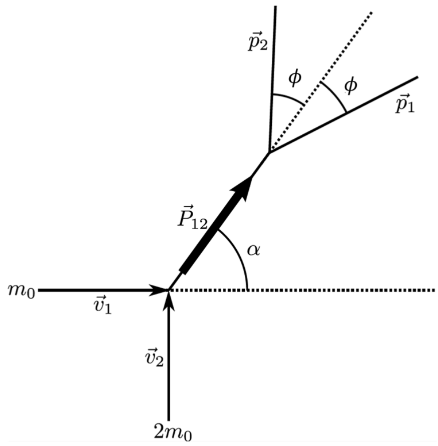
23 mai 2025

Pré-corrigé 12 : Dynamique relativiste

1 Collision relativiste à l'équerre

Une particule de masse au repos m_0 et de vitesse $\mathbf{v}_1 = v\,\mathbf{e}_x$ entre en collision avec une particule de masse au repos $2m_0$, de même vitesse scalaire $\mathbf{v}_2 = v\,\mathbf{e}_y$, mais sur une trajectoire perpendiculaire à celle de la première particule (voir dessin ci-contre). Juste après la collision, les deux particules forment une nouvelle particule, qu'on appellera « particule composite », de quantité de mouvement $\mathbf{P}_{12}$. Cette particule composite se décompose, après un certain temps, en deux photons de mêmes énergies. L'angle entre la trajectoire des deux photons vaut 2ϕ.



(a) Quel est le module de la quantité de mouvement $\mathbf{P}_{12}$ de la particule composite ?

Solution :

$$\|\mathbf{P}_{12}\| = P_{12} = \sqrt{5}\gamma m_0 v$$

(b) Quelle est la masse au repos $M_{0_{12}}$ de cette particule composite ?

Solution :

$$M_{0_{12}} = 3\gamma m_0 \sqrt{1 - \frac{5}{9}\frac{v^2}{c^2}}$$

(c) Que vaut l'angle ϕ ?

Solution :

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{v}{c}$$

2 Choc relativiste

On considère deux particules élémentaires (1 et 2), de masses au repos $m_1 = m_2 = m$, se dirigeant l'une vers l'autre dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au laboratoire. Dans $\mathcal{R}$, la première particule se déplace à une vitesse relativiste $\mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{e}_x$, $v_1 > 0$, et la deuxième particule se déplace à une vitesse relativiste $\mathbf{v}_2 = -v_2\,\mathbf{e}_x$, $v_2 > 0$, où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire le long de l'axe x. On introduit également le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la particule 1, c'est-à-dire que la particule 1 est au repos dans $\mathcal{R}'$. On définit deux événements A et B dont on connait les propriétés suivantes :

- événement A : la particule 1 se trouve en $t_A = x_A = 0$ (dans $\mathcal{R}$) et $t'_A = x'_A = 0$ (dans $\mathcal{R}'$),
- événement B : la particule 2 se trouve en $t_B = 0$ (dans $\mathcal{R}$) et $x'_B > 0$ (dans $\mathcal{R}'$).

Exprimer tous les résultats en fonction de v_1, v_2, m, x'_B et la vitesse de la lumière, c.

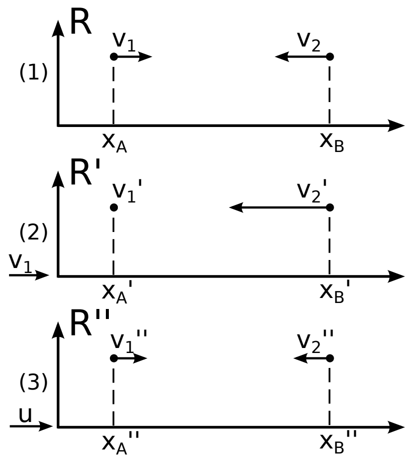


Figure 1

(a) Déterminer x_B et t'_B. Est-ce que les deux événements A et B sont simultanés dans $\mathcal{R}'$? Déterminer également la vitesse $\mathbf{v}'_2$ de la particule 2 dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Solution :

$$x_B = x'_B\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}, \qquad t'_B = -\frac{v_1}{c^2}x'_B, \qquad \mathbf{v}'_2 = -\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}\,\mathbf{e}_x.$$

(b) On définit l'événement C comme l'instant auquel la particule 1 et la particule 2 entrent en collision. Déterminer les coordonnées t_C et x_C de l'événement C dans le référentiel $\mathcal{R}$. Faire de même pour les coordonnées t'_C et x'_C dans $\mathcal{R}'$.

Solution :

$$x_C = x'_B\frac{v_1}{v_1+v_2}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}, \qquad t_C = \frac{x'_B}{v_1+v_2}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}},$$

$$x'_C = 0, \qquad t'_C = \frac{x'_B}{v_1+v_2}\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right).$$

À partir de maintenant, on suppose que $v_1 \neq v_2 = 0$, c'est-à-dire que la particule 2 est au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$ avant la collision.

(c) Soit $\mathcal{R}''$ le référentiel du centre de masse des deux particules, dans lequel la somme de leurs quantités de mouvement est nulle. Déterminer u, la vitesse de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}$. Montrer que dans le cas $v_1 \ll c$ on retrouve le résultat de la mécanique classique.

Solution :

$$u = \frac{c^2}{v_1}\left(1-\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}\right)$$

(d) Après la collision, les deux particules se déplacent respectivement à des vitesses $\mathbf{v}_{1,a}$ et $\mathbf{v}_{2,a}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, avec $\|\mathbf{v}_{1,a}\| = \|\mathbf{v}_{2,a}\|$ (voir figure 2, après la collision). On suppose que la masse au repos de chacune des deux particules reste inchangée pendant la collision. Déterminer l'angle α que fait la vitesse $\mathbf{v}_{1,a}$ avec l'axe x dans $\mathcal{R}$.

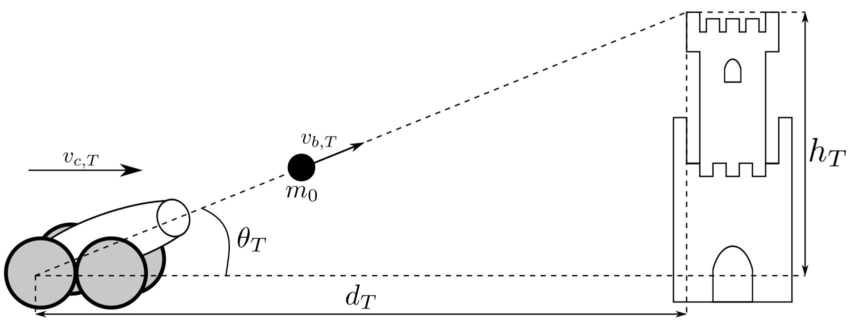
Figure 2 : Représentation de la collision dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Solution :

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{v_1/c}{\sqrt{1+2\sqrt{1-v_1^2/c^2}-3(1-v_1^2/c^2)}}\right].$$

3 Bataille relativiste

Dans le but d'attaquer une tour fortifiée, des attaquants ont mis au point un canon capable de rouler et de tirer à des vitesses relativistes. Dans le référentiel de la tour, le canon roule avec une vitesse $v_{c,T}$ constante en direction de la tour et lorsqu'il fait feu, il se trouve à une distance d_T de la fortification. Toujours dans le référentiel de la tour, l'angle de tir θ_T est tel que le boulet, qui a une vitesse de module $v_{b,T}$ et une masse au repos m_0, touche le haut de la tour. On néglige les effets de la gravité et de toute autre force (frottements, etc.). Exprimer tous les résultats en fonction des paramètres θ_T, d_T, $v_{b,T}$, m_0, $v_{c,T}$, de la vitesse de la lumière, c, et $\gamma_C = 1/\sqrt{1-v_{c,T}^2/c^2}$.



(a) Calculer la hauteur h_T de la tour dans son référentiel. Puis, calculer le temps que met le boulet pour arriver à son objectif dans le référentiel de la tour, Δt_T, et dans celui du canon, Δt_C. De plus, calculer la distance horizontale parcourue par le boulet jusqu'à la tour vue dans le référentiel du canon, d_C.

Solution :

$$h_T = d_T \tan\theta_T, \qquad \Delta t_T = \frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T},$$

$$\Delta t_C = \gamma_C d_T\left(\frac{1}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}\right), \qquad d_C = \gamma_C d_T\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right).$$

(b) Calculer l'angle de tir θ_C dans le référentiel du canon.

Solution :

$$\tan\theta_C = \frac{\tan\theta_T}{\gamma_C[1 - v_{c,T}/(v_{b,T}\cos\theta_T)]}$$

(c) Calculer l'énergie cinétique relativiste du boulet dans le référentiel de la tour, $E_{b,T}$, et dans celui du canon, $E_{b,C}$.

Solution :

$$E_{b,T} = (\gamma_{b,T} - 1) m_0 c^2,$$

$$E_{b,C} = \left[\left(1 - \frac{(v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T})^2 + (v_{b,T}\sin\theta_T)^2}{(c - v_{c,T}v_{b,T}\cos\theta_T/c)^2}\right)^{-1/2} - 1\right] m_0 c^2.$$