16 mai 2025

Pré-corrigé 11 : Cinématique relativiste

1 Astronaute sur internet

Un astronaute à bord d'une fusée s'éloigne à une vitesse constante u de la Terre. Deux horloges mesurent le temps depuis lequel l'astronaute a quitté la Terre. On note t le temps indiqué par l'horloge terrestre et t' celui donné par l'horloge de la fusée. L'astronaute désire surfer sur internet.

(a) L'astronaute clique pour se connecter ; on appelle cet évènement A. À cet instant, son horloge de bord indique t'_A. À quelle distance de la Terre (dans le référentiel terrestre), se trouve-t-il alors ? Quel temps t_A est-il indiqué par l'horloge terrestre ? Commencer par placer les différents événements sur un diagramme espace-temps.

Solution :

$$t_A = \gamma t'_A, \qquad x_A = \gamma u t'_A = u t_A$$

L'application numérique donne $\gamma = 3.2$, $x_A = 1.4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$ et $t_A = 48.0\,\mathrm{s}$.

(b) Le signal étant transmis par ondes radio, qu'indique l'horloge terrestre lorsque le signal est reçu sur Terre ? Qu'indique alors l'horloge de la fusée ? Vu de la fusée, à quelle distance la Terre se trouve-t-elle alors ?

Solution :

$$t_B = \gamma t'_A\left(1 + \frac{u}{c}\right), \qquad t'_B = \frac{t'_A}{1 - u/c}, \qquad x'_B = -u t'_B$$

L'application numérique donne $t_B = 93.7\,\mathrm{s}$, $x'_B = -8.5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$ et $t'_B = 300\,\mathrm{s}$.

(c) La Terre renvoie immédiatement un signal de confirmation, également par ondes radio. Qu'indique l'horloge de la fusée lorsque l'astronaute reçoit le signal de confirmation ? Sur son horloge, combien de temps s'est-il écoulé entre l'instant où il a cliqué et l'instant où il reçoit la confirmation ?

Solution :

$$t'_C = t'_A \frac{1 + u/c}{1 - u/c}, \qquad \Delta t' = \frac{2u/c}{1 - u/c} t'_A$$

L'application numérique donne $t'_C = 585\,\mathrm{s}$ et $\Delta t = 570\,\mathrm{s}$.

2 Expansion de l'univers et décalage vers le rouge

L'univers est en expansion constante en raison d'une dilatation de l'espace lui-même. Il en résulte un éloignement progressif des objets célestes à grande échelle (galaxies, amas de galaxies). On montre que cette expansion entraîne un décalage vers le rouge de la lumière émise par des galaxies distantes. On considère une seule dimension spatiale. Soit une source lumineuse s s'éloignant d'un observateur o à une vitesse $v > 0$. On associe un référentiel $\mathcal{R}$ à l'observateur, ainsi que λ_o la longueur d'onde qu'il mesure provenant de la source. Le référentiel lié à la source est noté $\mathcal{R}'$, ainsi que λ_s la longueur d'onde émise dans son propre référentiel.

(a) Exprimer la longueur d'onde λ_o mesurée par l'observateur en fonction de la longueur d'onde émise λ_s et de la vitesse relative β d'éloignement entre l'observateur et la source, $\beta = v/c$.

Solution :

$$\lambda_o = \lambda_s \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

(b) Exprimer ce résultat en fonction du décalage vers le rouge (« redshift » en anglais), c'est-à-dire la variable $z = (\lambda_o - \lambda_s)/\lambda_s$. Interpréter les cas $z > 0$ et $z < 0$.

Solution :

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1.$$

Le cas $z > 0$ correspond à un décalage vers le rouge (« redshift »). Si $z < 0$, on mesure alors un décalage vers le bleu (« blueshift »).

(c) Quelle relation obtient-on pour λ lorsque $v \ll c$?

Solution :

$$\lambda_o \approx \lambda_s \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{et} \quad z \approx \beta = \frac{v}{c}.$$

Cette équation correspond à l'effet Doppler classique déjà vu en cours.

3 Physique des particules

Parmi les innombrables particules observées dans l'accélérateur du LHC au CERN, on rencontre parfois la particule nommée Λ_0. Sa durée de vie au repos est de τ_0, après quoi elle se désintègre. Les appareils de mesure la repèrent pendant $\tau = 13\tau_0/5$. Pour simplifier, on traite le problème de façon unidimensionnelle dans l'espace.

(a) Montrer que la vitesse de la particule par rapport aux appareils de mesure est de $v = 12c/13$. Quelle est la longueur L de sa trace (le chemin enregistré par le détecteur depuis son apparition jusqu'à sa désintégration) ? De quelle longueur L_0 est la trace de la particule dans son référentiel propre ?

Solution :

$$L = v\tau = \frac{12}{13}c\tau$$
$$L_0 = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0$$

(b) On détecte deux particules Λ_0 créées au même moment et au même endroit. Elles se déplacent avec des vitesses de normes égales à $v = 12c/13$, mais de directions opposées. Quelle est la vitesse u de l'une par rapport à l'autre ? Est-ce qu'elles se désintègrent en même temps dans le référentiel du laboratoire ? Et dans le référentiel de l'une des particules ? Justifier les réponses par des calculs.

Solution :
La vitesse relative est

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{312}{313}c.$$

La désintégration est simultanée dans le laboratoire, mais pas dans le référentiel d'une des particules. Dans le référentiel d'une des particules, on mesure les temps de vie τ_0 et

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{313\tau_0}{25} > \tau_0.$$

4 Simultanéité

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, deux événements 1 et 2 ont lieu en $(x_1, t_1) = (x_0, x_0/c)$ et $(x_2, t_2) = (2x_0, x_0/(2c))$. Quelle est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel les deux événements ont lieu simultanément ? Déterminer l'instant correspondant.

Solution :

$$v = -\frac{c}{2}, \qquad t_1' = t_2' = \sqrt{3}\frac{x_0}{c}$$

5 Invariance des équations de Maxwell (partie 2)

On aborde la seconde partie du problème débuté en série 10, exercice 1.

À titre de rappel, on désire déterminer quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'alembertien $\Box = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, on a montré que l'équation d'onde n'est pas invariante sous les transformations de Galilée et donc que les transformations galiléennes ne sont pas adaptées pour l'électromagnétisme. Ci-dessous, on dérive la transformation cherchée et on l'identifie aux transformations de Lorentz.

Par convention, on choisit d'exprimer les coordonnées spatio-temporelles à l'aide des quadrivecteurs suivants, $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)^T = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ et on écrit l'opérateur d'alembertien $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \nabla^2$.

(c) Exprimer l'opérateur $\Box$ sous forme matricielle. Plus précisément, on demande d'exprimer $\Box$ à l'aide de l'opérateur $\mathbf{D} = (\partial_{x_0}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^T$ et d'une matrice diagonale $\boldsymbol{G}$ qu'il faudra préciser.

Solution :
Avec

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

l'opérateur $\Box$ s'écrit

$$\Box = \mathbf{D}^T \boldsymbol{G} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \partial_{x_0} & \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_0} \\ \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} = \partial_{x_0}^2 - \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 .$$

(d) Soit une matrice $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ décrivant le changement de coordonnées $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}$. Démontrer que celle-ci doit satisfaire la relation

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda} \qquad (*)$$

pour que l'équation d'onde soit invariante pour cette transformation.

Solution :
Remarquer que $\mathbf{D}' = \boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{D}$, et donc, en imposant $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda}$,

$$\Box' = \mathbf{D}'^T \boldsymbol{G} \mathbf{D}' = (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{D})^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{D}) = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{G} \mathbf{D} = \Box\,.$$

(e) Soit la matrice

$$\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta) = \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & -\beta\gamma & \multirow{2}{*}{$\mathbf{0}_2$} \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}_2} & \boldsymbol{I}_2 \end{array}\right),$$

avec $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Montrer que $\mathbf{\Lambda}_x(\beta)$ correspond à une transformation de Lorentz entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Vérifier que $\mathbf{\Lambda}_x(\beta)$ satisfait la relation ($*$).

Solution :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}_x(\beta)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma x_0 - \beta\gamma x_1 \\ \gamma x_1 - \beta\gamma x_0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - \beta x/c) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

challenge

(f) Démontrer que les matrices $\mathbf{\Lambda}$ satisfaisant ($*$) forment un groupe. Montrer que les rotations spatiales appartiennent également à ce groupe.