18 avril 2025

Pré-corrigé 8 : Propriétés de base des ondes électromagnétiques

1 Polarisation et représentation de Jones

Une onde électromagnétique polarisée se propageant dans la direction z s'écrit

$$\mathbf{E} = E_x \cos(kz - \omega t + \phi_x)\,\mathbf{e}_x + E_y \cos(kz - \omega t + \phi_y)\,\mathbf{e}_y = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}\right]. \qquad (*)$$

La représentation de Jones est un formalisme vectoriel décrivant les ondes polarisées ainsi que leur évolution à travers un système d'éléments optiques linéaires. Dans ce formalisme, l'onde ($*$) est représentée par le vecteur de Jones, $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^2$, suivant :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \qquad (\dagger)$$

Au début d'un calcul, il est courant de normaliser le vecteur de Jones d'une onde incidente entrant dans un système optique à un vecteur unitaire, $E_x^2 + E_y^2 = 1$. Dans ce formalisme, un polariseur est représenté par une matrice de Jones, $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, opérant sur le vecteur de Jones de l'onde incidente. On remarque que cette description est analogue à celle d'un système quantique à deux niveaux (on pourrait adopter une notation bra-ket en définissant des vecteurs de base).

(a) Écrire le vecteur de Jones des ondes électromagnétiques polarisées suivantes :

1. Polarisée rectiligne parallèle à $\mathbf{e}_x$,
2. Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec $\mathbf{e}_x$,
3. Polarisée circulaire droite,
4. Polarisée circulaire gauche,
5. Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale deux fois plus grand que le demi-petit axe.

Solution :
Les vecteurs de Jones de ces ondes sont

$$\mathbf{E}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_5 \propto \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

(b) Un polariseur rectiligne présente un axe permettant de sélectionner la composante de l'onde incidente de polarisation parallèle à cet axe. Donner la forme matricielle P_0 d'un polariseur rectiligne idéal d'axe parallèle à $\mathbf{e}_x$. En déduire la matrice $P(\theta)$ d'un polariseur rectiligne idéal dont l'axe forme un angle θ avec l'axe $\mathbf{e}_x$.

Solution :
Matrice de Jones d'un polariseur rectiligne idéal d'axe $\mathbf{e}_x$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice de Jones d'un polariseur rectiligne idéal d'axe formant un angle θ par rapport à $\mathbf{e}_x$:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

(c) Une onde électromagnétique incidente polarisée rectiligne parallèle à $\mathbf{e}_x$ passe à travers du polariseur $P(\theta)$. Retrouver la loi de Malus, qui donne l'expression de l'intensité de l'onde sortante I en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente sur le polariseur et de l'angle θ :

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Quelle est l'intensité moyenne de l'onde sortante si l'onde incidente est non polarisée ?

Solution :
L'intensité moyenne d'une onde non polarisée après avoir traversé le polariseur est :

$$\langle I \rangle = \frac{I_0}{2}.$$

(d) Le Polaroïd est un filtre rectiligne non idéal, c'est-à-dire que celui-ci a une transmittance T_1 le long de la direction privilégiée et T_2 le long de la direction perpendiculaire, où $T_2 < T_1 \leq 1$. En considérant ces hypothèses, écrire la matrice représentant le filtre Polaroïd lorsque la direction privilégiée

1. est parallèle à l'axe $\mathbf{e}_x$,
2. fait un angle θ avec l'axe $\mathbf{e}_x$.

Dériver la loi de Malus dans le cas du filtre Polaroïd.

Solution :
La matrice de Jones associée au Polaroïd est

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1}\cos^2\theta + \sqrt{T_2}\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \\ \sin\theta\cos\theta(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) & \sqrt{T_1}\sin^2\theta + \sqrt{T_2}\cos^2\theta \end{pmatrix},$$

et la loi de Malus pour le Polaroïd est donnée par

$$I = I_0(T_1 \cos^2\theta + T_2 \sin^2\theta).$$

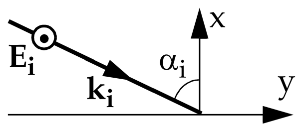
(e) Les lames à retard sont des éléments optiques introduisant une phase ϕ qui retarde la composante de l'onde incidente perpendiculaire à l'axe optique de la lame par rapport à sa composante le long de l'axe optique. Donner la forme générale d'une lame à retard si l'axe optique fait un angle θ avec $\mathbf{e}_x$. Que peut-on dire de ce polariseur si $\phi = \pi$? Et quand $\phi = \pi/2$?

Solution :
La forme générale de la lame à retard pour un angle θ entre l'axe optique et $\mathbf{e}_x$ est

$$Q_\phi(\theta) = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos^2\theta + e^{i\phi}\sin^2\theta & (1 - e^{i\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (1 - e^{i\phi})\sin\theta\cos\theta & e^{i\phi}\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

2 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfaitement réfléchissant

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propage dans le vide. Elle arrive, sous un angle d'incidence α_i sur une surface plane $\Sigma = Oyz$ parfaitement réfléchissante. Le champ électrique $\mathbf{E}_i$ est normal au plan d'incidence Oxy.



(a) Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$, résultant de l'interférence de $\mathbf{E}_i$ avec le champ $\mathbf{E}_r$ de l'onde réfléchie, est une onde se propageant selon y, dont l'amplitude dépend de x.

Solution :
Le champ électrique total est donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 2E_0 \cos(ky \sin\alpha_i - \omega t) \sin(kx \cos\alpha_i)\, \mathbf{e}_z.$$

(b) Déterminer les plans nodaux et les plans ventraux de $\mathbf{E}$.

Solution :
Les plans nodaux $x = x_n$ et ventraux $x = x_v$ sont donnés par

$$x_{n,m} = \frac{m\lambda}{2\cos\alpha_i} \quad \text{et} \quad x_{v,m} = \frac{(m+1/2)\lambda}{2\cos\alpha_i}, \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}.$$

(c) Exprimer la vitesse de phase u de $\mathbf{E}$ en fonction de la vitesse de la lumière c et α_i.

Solution :
La vitesse de phase vaut $u = c/\sin\alpha_i > c$.

(d) Exprimer, par un raisonnement mathématique puis par un raisonnement géométrique, la vitesse de groupe v de $\mathbf{E}$.

Solution :
La vitesse de groupe est $v = c\sin\alpha_i \le c$.

On place un second miroir plan parfait Σ' parallèle à Σ, à une distance $x = X$ de Σ. L'onde incidente subit ainsi des réflexions multiples entre Σ et Σ'.

(e) Dans ces conditions, exprimer la vitesse de phase u en fonction de X, λ et c. Montrer ensuite que pour tout X donné, il existe une longueur d'onde λ_c et donc une fréquence de coupure f_c au-dessous de laquelle l'onde de $\mathbf{E}$ ne se propage pas.

Solution :
La vitesse de phase u est :

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 - m^2\lambda^2/X^2}}.$$

La longueur d'onde et fréquence de coupure sont $\lambda_c = X$ et $f_c = c/\lambda_c = c/X$.

challenge

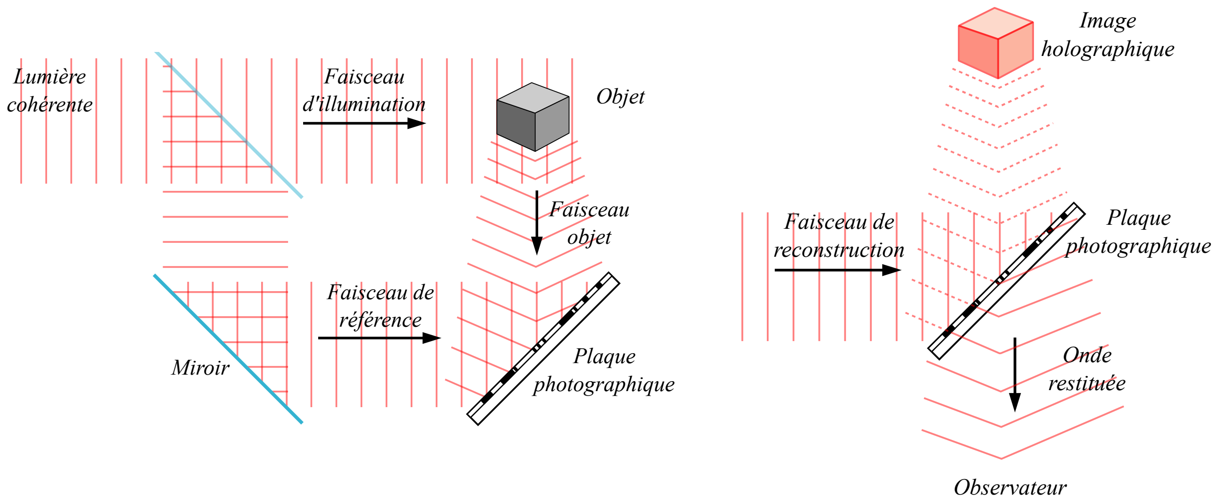
(f) Déterminer la relation de dispersion de cette onde.

Solution :

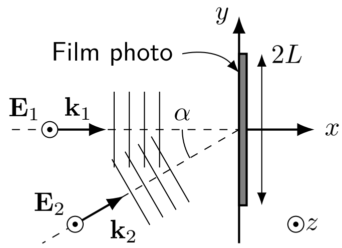
$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + \omega_c^2 \quad \text{où} \quad \omega_c = 2\pi f_c$$

3 Principe de base de l'holographie

L'holographie est un procédé d'enregistrement de la lumière réfléchie par un objet. On procède par illumination d'une surface sensible, par exemple un film photographique, par une figure d'interférence entre la lumière réfléchie par l'objet (« faisceau objet ») et une source de lumière cohérente (« faisceau de référence »), typiquement un laser. Les franges d'interférences sont alors enregistrées sur cette surface et, lorsque éclairées par une source lumineuse cohérente, agissent comme un réseau de diffraction et restituent le faisceau objet, qu'un observateur percevra comme une image holographique.



Enregistrement (gauche) et lecture (droite) d'un hologramme.



On étudie la situation simplifiée suivante, voir la figure ci-contre, pour laquelle on considère deux ondes lumineuses planes, cohérentes, de mêmes longueurs d'onde λ, de mêmes intensités, polarisées linéairement et de vecteurs $\mathbf{E}$ parallèles à l'axe z. Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$ de la première onde est parallèle à x et le vecteur d'onde $\mathbf{k}_2$ de la seconde forme un angle α par rapport à x. Un film photographique est placé dans le plan $x = 0$ afin d'enregistrer les franges d'interférence.

(a) Montrer que l'intensité, moyennée dans le temps, résultant de la superposition des deux ondes dans le plan $x = 0$ est donnée par

$$I_{\text{moy}}(y) = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2} k y \sin\alpha\right),$$

avec I_0 une constante réelle à déterminer.

Solution :
Soit E l'amplitude des champs électriques incidents, on a

$$I_0 = 2E^2.$$

Dans le plan $x = 0$, on place un film photographique de largeur $2L$ dont le noircissement est proportionnel à l'intensité $I(y)$ incidente sur celui-ci. Une fois ce film exposé et noirci, on l'éclaire avec une onde incidente de vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$. On suppose que l'amplitude $E(y)$ du champ électrique transmis à travers le film est donnée par le profil de noircissement déterminé en (a),

$$E(y) \propto 1 - \frac{I_{\text{moy}}(y)}{I_0}.$$

(b) Déterminer le profil d'intensité diffractée. En déduire que seuls des rayons diffractés par le film photo pour $x > 0$ dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pm\alpha$ ne sont pas atténués, comme attendu pour une image holographique.

Solution :
L'intensité résultant de la diffraction de l'onde $\mathbf{k}_1$ au travers du film est

$$I(r,\theta) \propto 4\,\text{sinc}^2(k'L) + \text{sinc}^2(k''_+L) + \text{sinc}^2(k''_-L),$$

avec $k' = -k\sin\theta$ et $k''_\pm = k' \pm k\sin\alpha$.