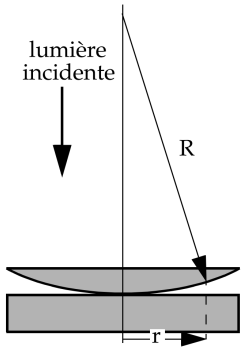
4 avril 2025

Pré-corrigé 7 : Interférences et diffraction

1 Anneaux de Newton

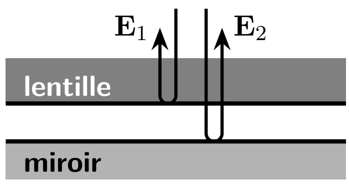


Une lentille optique plan-convexe, posée sur un miroir parfait, est illuminée par une onde monochromatique. On suppose que l'épaisseur $d(r)$ de la couche d'air sous la lentille est négligeable par rapport au rayon de courbure de la lentille R, c'est-à-dire $d \ll R$. La figure ci-contre représente la lentille plan-convexe reposant sur le miroir.

(a) En utilisant la limite $d \ll R$, montrer que $d \approx r^2/(2R)$. Avec cette approximation, montrer les ondes réfléchies et réfractées d'une onde incidente verticale restent elles-mêmes verticales.

(b) Décrire le comportement d'un faisceau incident réfléchi aux différentes interfaces. On négligera les réflexions multiples. Expliquer qualitativement pourquoi un observateur placé au-dessus de la lentille observe des interférences qui se manifestent par des anneaux concentriques alternativement sombres et clairs appelés « anneaux de Newton ».

Solution :



(c) Déterminer le rayon r_m du m^{e} anneau sombre ainsi que la loi décrivant l'augmentation du rayon entre deux anneaux sombres consécutifs.

Solution :

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}$$

(d) Quelle est l'aire séparant deux anneaux sombres ? Dépend-elle de m ?

Solution :

L'aire séparant r_m et r_{m+1} est donnée par :

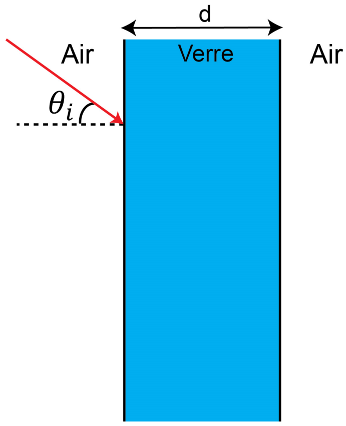
$$A_m = \pi(r_{m+1}^2 - r_m^2) = \pi\lambda R = \text{cst.}$$

(e) Déterminer la loi décrivant le rayon r'_m de l'interférence constructive.

Solution :

$$r'_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R}$$

2 Interféromètre de Fabry-Perot



Un interféromètre de Fabry-Perot est un instrument optique composé de deux surfaces partiellement réfléchissantes. Il permet de laisser passer uniquement les longueurs d'onde de la lumière incidente qui sont en résonance avec la cavité optique formée par les deux surfaces. On désire caractériser la figure d'interférences de cet interféromètre en assimilant les surfaces aux deux interfaces d'une lame de verre de largeur d et d'indice de réfraction n. Pour simplifier l'analyse, on considère une onde monochromatique incidente sur la lame avec un angle incident θ_i par rapport à la normale. Le rayon incident est réfracté avec un angle θ_r.

(a) À l'aide d'un diagramme, expliquer comment se comporte un rayon lumineux incident traversant la lame de verre. Considérer des réflexions multiples et montrer qu'un rayon entrant engendre plusieurs rayons sortants (ayant traversé la lame). Déduire la différence de phase $\Delta\phi(\theta_r)$ en fonction de θ_r entre deux rayons sortants successifs.

Solution :
La différence de chemin optique est donnée par :

$$\delta = 2nd\cos\theta_r.$$

La différence de phase δ est donc donnée par :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd}{\lambda}\cos\theta_r.$$

(b) On suppose que la réflectivité de l'interface verre-air est égal à $R < 1$. Calculer l'amplitude $s_n(\Delta\phi)$ de chaque réfraction en sortie de l'interféromètre. En déduire l'amplitude totale s_{tot} en fonction de l'amplitude incidente s_i.

Solution :
Amplitude totale de l'onde transmise s_{tot} :

$$s_{\text{tot}} = \frac{(1-R)s_i}{1-Re^{i\Delta\phi}}.$$

(c) Montrer que la transmittance est donnée par :

$$T(\theta_r) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2}\right]^{-1}.$$

(d) Donner les conditions pour avoir une transmittance maximale et dessiner la transmittance pour un angle θ_r fixe en fonction de $\Delta\phi$, puis de λ. Que remarque-t-on ? En déduire une application de l'interféromètre de Fabry-Perot.

Solution :
Les maxima de la transmittance ont lieu quand :

$$\frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \implies \lambda_m = \frac{2nd\cos\theta_r}{m}.$$

3 Pression de radiation

On présente deux approches afin de dériver l'expression de la pression de radiation. On considère une onde électromagnétique plane progressive,

$$\mathbf{E}_i = \mathrm{Re}\big[E_{0,i}e^{i(kx-\omega t)}\,\mathbf{e}_y\big] = E_{0,i}\cos(kx-\omega t)\,\mathbf{e}_y,$$

se propageant depuis $x < 0$ dans le vide et incidente sur un miroir plan, métallique et parfaitement conducteur en $x = 0$, ce qui implique donc que le champ électrique s'annule à l'interface, $\mathbf{E}(x = 0) = 0$. Ceci implique donc une onde électromagnétique réfléchie,

$$\mathbf{E}_r = \mathrm{Re}\big[E_{0,r}e^{-i(kx+\omega t)}\,\mathbf{e}_y\big] = E_{0,r}\cos(kx+\omega t)\,\mathbf{e}_y.$$

(a) Déterminer l'amplitude $E_{0,r}$ en fonction de $E_{0,i}$. Donner une expression pour les champs électrique et magnétique $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ et $\mathbf{B}_{\text{tot}}$ résultants pour $x < 0$. Pour l'onde incidente, calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \mathbf{S}_i\rangle = \langle \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i\rangle/\mu_0$, ainsi que la densité volumique d'énergie moyenne $\langle u_{v,i}\rangle$ de l'onde électromagnétique.

Solution :
On a $E_{0,r} = -E_{0,i}$. Le champ électrique est donné par :

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = 2E_{0,i}\sin(kx)\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y.$$

Le champ magnétique est :

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = 2\frac{E_{0,i}}{c}\cos(kx)\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_z.$$

La densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique est donnée par :

$$\langle u_{v,i}\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{0,i}^2.$$

La moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\langle \mathbf{S}_i\rangle = c\langle u_{v,i}\rangle\,\mathbf{e}_x.$$

(b) Déterminer la charge surfacique σ et le courant surfacique $\mathbf{J}_s$ en $x = 0$.

Solution :
La charge surfacique est nulle, $\sigma = 0$. Le courant surfacique est donné par

$$\mathbf{J}_s = 2c\epsilon_0 E_{0,i}\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_y.$$

(c) L'expression de la force résultante est donnée par :

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\sigma\,\mathbf{E}_{\text{tot}} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_{\text{tot}})\,dS, \qquad (*)$$

où dS est un petit élément de surface. Donner une explication pour le facteur $1/2$. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P\rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,i}\rangle$ de l'onde incidente, puis de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,\text{tot}}\rangle$ de l'onde totale.

Solution :

$$\langle P\rangle = \frac{\langle d\mathbf{F}\rangle}{dS}\cdot\mathbf{e}_x = \epsilon_0 E_{0,i}^2 = 2\langle u_{v,i}\rangle = \frac{\langle u_{v,\text{tot}}\rangle}{2}$$

Dans un second temps, l'expression de la pression de radiation peut également être dérivée en considérant la nature corpusculaire de la lumière.

(d) En utilisant la relation de l'énergie d'un photon $E_\gamma = c\|\mathbf{p}_\gamma\|$, déterminer l'expression de la pression de radiation $\langle P \rangle$ produite en fonction de la puissance émise P_w et de la distance r de la surface considérée par rapport à la source.

Solution :

$$\langle P \rangle = \frac{P_w}{2\pi r^2 c}$$

(e) Déterminer le rayon limite R_{lim} d'une sphère métallique pour lequel celle-ci pourrait être éjectée du système solaire, en tenant compte de la pression de radiation. On suppose que le Soleil émet un rayonnement d'une puissance P_w. La section efficace de la sphère est donnée par πR^2.

Solution :

$$R > R_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2GcMm}{P_w}}$$