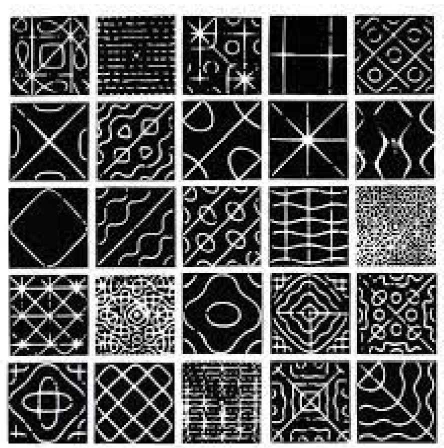
28 mars 2025

Pré-corrigé 6 : Ondes stationnaires et diffraction

1 Figures de Chladni sur une plaque carrée

Les figures de Chladni sont des motifs élégants pouvant être observés sur une plaque en vibration. Celles-ci correspondent aux modes propres de vibration de la plaque. Quand certains de ces modes sont excités, la poudre placée sur la plaque se concentrera alors aux points correspondant aux nœuds des ondes stationnaires excités par la vibration. On souhaite décrire un modèle simple de ces figures de Chladni. Pour ce faire, on considère une plaque rectangulaire de dimensions L_x et L_y. On va tout d'abord considérer que les vibrations respectent l'équation d'onde. La définition des conditions aux bords de la plaque n'est pas évidente. Par simplicité, on va considérer que la déformation principale de la plaque est une déformation sous forme de cisaillement. Pour ce type de déformation, la pente de la déformation doit être nulle au bord dans la direction perpendiculaire au bord, c'est-à-dire



$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,y,t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x,y,t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0,t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,L_y,t) = 0, \quad x \in [0,L_x], \quad y \in [0,L_y]. \qquad (*)$$

(a) En utilisant la méthode de séparation des variables, dériver les modes propres de la plaque.

Solution :
La solution recherchée est formée d'une combinaison des modes propres et s'écrit :

$$\psi(x,y,t) = \frac{\psi_{0,0}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{n,0}(x,y,t) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{0,m}(x,y,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{n,m}(x,y,t),$$

où les modes propres individuels sont donnés par

$$\psi_{n,m}(x,y,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)\Big(A_{n,m}\cos(\omega_{n,m}t) + B_{n,m}\sin(\omega_{n,m}t)\Big).$$

Les coefficients $A_{n,m}$ et $B_{n,m}$ se calculent de la façon suivante :

$$A_{n,m} = \frac{2}{L_x}\frac{2}{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\psi(x,y,0)\cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)dx\,dy,$$
$$B_{n,m} = \frac{2}{L_x}\frac{2}{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\frac{1}{\omega_{m,n}}\frac{\partial\psi(x,y,0)}{\partial t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)dx\,dy.$$

(b) Quels motifs de Chladni les modes propres trouvés donneraient-ils ? Commenter avec les résultats présentés ci-contre.

2 Diffraction par un trou circulaire

La diffraction par un trou circulaire produit ce qu'on appelle une tâche d'Airy. Cette tâche est notamment la cause d'une limite de résolution angulaire des instruments optiques. Dans cet exercice, on souhaite décrire la figure de diffraction produite par un trou circulaire de rayon R, illuminé par une onde plane incidente de longueur $\lambda = 2\pi/k$, placé à une distance d d'un écran

(a) En supposant que, selon le principe de Huygens, chaque élément de surface du trou circulaire émet une onde sphérique d'amplitude ξ_0, montrer que l'amplitude totale de l'onde sur un point P de l'écran est donnée par :

$$\xi(X,Y) = \frac{\xi_0}{d}\exp\big(i(kd-\omega t)\big)\exp\left(ik\frac{X^2+Y^2}{2d}\right)\int_{\text{trou}}\exp\left(-ik\frac{xX+yY}{d}\right)dx\,dy,$$

où (X,Y) et (x,y) sont, respectivement, les coordonnées du point P sur l'écran et d'un point sur la surface du trou. Faire les hypothèses x, y, X, $Y \ll d$ (approximation de Fraunhofer), $x \ll X$ et $y \ll Y$ pour dériver ce résultat.

(b) En utilisant des coordonnées polaires, $r = \sqrt{X^2+Y^2}$, démontrer que l'expression de l'intensité moyenne est donnée par :

$$I(r) = I_0\left(\frac{2J_1(krR/d)}{krR/d}\right)^2. \qquad (\dagger)$$

L'équation ($\dagger$) ci-dessus correspond à l'intensité d'une tâche d'Airy. Cette figure de diffraction est rencontrée dans les systèmes optiques possédants une géométrie circulaire et en limite le pouvoir de résolution angulaire.

(c) Quelle condition entre $D = 2R$, le diamètre du trou, et λ est nécessaire à l'observation d'une figure de diffraction ?

Solution :
La condition pour observer une figure de diffraction est qu'il existe un angle θ tel que $krR/d \approx kR\sin\varphi \geq x_1$, où x_1 est le premier zéro de la fonction J_1. Par conséquent, on observe une tâche d'Airy si $kR \geq x_1$. En fonction de D, le diamètre de la fente, et λ la longueur d'onde de l'onde incidente sur la fente, on obtient que :

$$kR = \frac{\pi D}{\lambda} \geq x_1 \implies D \geq \frac{x_1}{\pi}\lambda \approx 1.22\lambda.$$

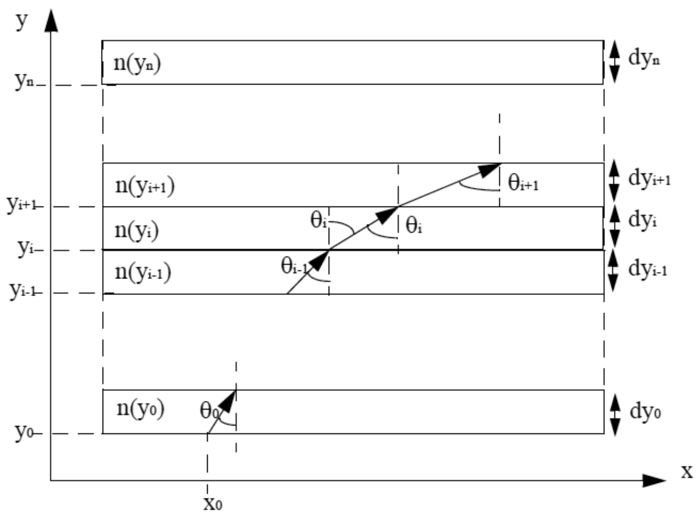
(d) On considère deux sources séparées d'un angle $\vartheta \ll 1$ par rapport au trou, produisant chacune une tâche d'Airy sur l'écran, comme illustré sur la figure ci-dessus. Discuter des conditions sur l'angle ϑ afin que les sources soient distinguables sur l'écran, c'est-à-dire que l'on puisse distinguer leurs tâches d'Airy respectives.

Solution :
Plusieurs critères existent afin de définir le pouvoir de résolution angulaire d'un instrument optique :

$$\begin{aligned}
\vartheta &\geq \vartheta_{\text{crit}} = 1.22\frac{\lambda}{D}, \quad \text{(critère de Rayleigh)},\\
\vartheta &\geq \vartheta_{\text{crit}} = 2.44\frac{\lambda}{D}, \quad \text{(critère de Schuster)},\\
\vartheta &\geq \vartheta_{\text{crit}} = 1.02\frac{\lambda}{D}, \quad \text{(critère de Sparrow)}.
\end{aligned}$$

3 Trajectoire dans un milieu non homogène (revisitée)

On considère une situation analogue à l'exercice 3, série 4. Un milieu non homogène possède un indice de réfraction variable $n(y)$ le long de la direction y. Comme illustré sur la figure, un rayon de lumière entre dans le milieu. On note θ l'angle entre la trajectoire du rayon et l'axe y.



(a) Montrer que l'équation de la trajectoire du rayon est :

$$x = x(y) = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{\sqrt{n^2(y')/C^2 - 1}}, \tag{‡}$$

où C est une constante à déterminer.

Solution :

$$C = n(y) \sin \theta$$

(b) On souhaite calculer la trajectoire de la lumière pour un milieu où l'indice de réfraction est linéaire, c.-à-d. $n(y) = n_0 + ay$. On suppose le point de départ en $x_0 = y_0 = 0$ et que la lumière est initialement parallèle à l'axe x. Donner une expression de la trajectoire $y(x)$. Calculer le rayon de courbure au point $x_0 = y_0 = 0$. Comparer ce résultat à celui de l'exercice 3, série 4.
Indications : $d\cosh^{-1}(x)/\,dx = 1/\sqrt{x^2-1}$. La formule du rayon de courbure pour une trajectoire $y(x)$ est donnée par :

$$\rho(x) = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{y''(x)}. \tag{§}$$

Solution :
La trajectoire $y(x)$ du rayon lumineux est donc donnée par :

$$y(x) = \frac{n_0}{a}\left(\cosh\left(\frac{a}{n_0}x\right) - 1\right)$$

Évalué en $x = 0$, le rayon de courbure donne $\rho(0) = n_0/a$. Cette solution est égale à celle obtenue en exercice 1, série 4, où le rayon de l'arc de cercle est donnée par $R(x) = n(x)/a$.

Le phénomène de mirages est également dû à un indice de réfraction inhomogène dans les couches atmosphériques. L'indice de réfraction dépend de la pression, de la température et de l'humidité. Pour simplifier, on considère que l'indice de réfraction est donné par la relation $n(y) = n_0\sqrt{1 + ay}$.

(c) Dériver la forme générale de la trajectoire $y(x)$ d'un rayon lumineux qui entre dans le milieu en $x_0 = y_0 = 0$ avec un angle $\theta_0 \in \,]0, \pi[$.

Solution :

$$y(x) = a\left(\frac{x}{2\sin(\theta_0)}\right)^2 + x\cot(\theta_0)$$

(d) En quoi cette trajectoire permet-elle d'expliquer le phénomène de mirage ? Considérer pour cela une source lumineuse en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ qu'un observateur regarde depuis $(x, y) = (L, 0)$. Discuter l'influence du signe du paramètre a sur le type de mirage observé.

challenge

(e) Le principe de Fermat affirme que la trajectoire suivie par la lumière entre deux points A et B est telle que le temps de trajet soit minimal. Montrer que minimiser le chemin optique L_{AB} est équivalent à minimiser le temps de trajet,

$$L_{AB} = \int_A^B n \, ds,$$

où n est l'indice de réfraction du milieu. En dériver l'équation (‡) pour la trajectoire.