21 mars 2025

Pré-corrigé 5 : Ondes stationnaires

1 Ondes stationnaires dans une colonne d'eau

Un long cylindre vertical de rayon R et de longueur L, ouvert à son extrémité supérieure, est rempli d'une colonne d'eau de hauteur h. La hauteur de la colonne d'air est notée $H = L - h$. Une pompe de débit Q permet d'ajuster h. Un diapason, dont la fréquence propre est ν, est placé au sommet du cylindre. Dans un premier temps, on suppose que l'eau est un milieu opaque (qui ne permet pas la transmission d'ondes sonores).

(a) Déterminer les hauteurs de la colonne d'air H_n pour lesquelles on observe une résonance associée au n^{e} mode propre de l'onde sonore du diapason. On note u_{air} la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air.

Solution :

$$H_n = \frac{(2n+1)}{4\nu} u_{\mathrm{air}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) À l'aide de la pompe, on fait monter le niveau d'eau. Déterminer le temps Δt séparant deux instants où le cylindre entre en résonance avec le diapason.

Solution :

$$\Delta t = \frac{\pi R^2 u_{\mathrm{air}}}{2Q\nu} = 237\,\mathrm{s}.$$

Dans un second temps, on ne considère plus l'eau comme étant un milieu opaque. On considère d'abord une onde progressive incidente sinusoïdale d'amplitude ξ_i^0 et de fréquence ω. À l'interface entre l'eau et l'air, l'onde incidente se décompose en une onde réfléchie, se propageant dans l'air, et une onde transmise dans l'eau.

(c) En posant les conditions de continuité de l'amplitude du déplacement et de la pression à l'interface, dériver les amplitudes ξ_r^0 et ξ_t^0 des ondes transmises et réfléchies en fonction de l'amplitude incidente ξ_i^0. On note κ_{air} et κ_{eau} les coefficients de compressibilités des milieux respectifs.

Solution :

$$\xi_r = \frac{\kappa_{\mathrm{eau}} k_{\mathrm{eau}} - \kappa_{\mathrm{air}} k_{\mathrm{air}}}{\kappa_{\mathrm{eau}} k_{\mathrm{eau}} + \kappa_{\mathrm{air}} k_{\mathrm{air}}} \xi_i = R\xi_i$$
$$\xi_t = \frac{2\kappa_{\mathrm{air}} k_{\mathrm{air}}}{\kappa_{\mathrm{eau}} k_{\mathrm{eau}} + \kappa_{\mathrm{air}} k_{\mathrm{air}}} \xi_i = T\xi_i$$

Finalement, on s'intéresse à la possibilité d'observer des ondes stationnaires qui se développent dans l'eau et l'air.

(d) Déterminer les conditions nécessaires pour qu'une onde stationnaire soit présente dans les deux milieux en fonction des nombres d'onde k_{air} et k_{eau}, des coefficients de compressibilité κ_{air} et κ_{eau}, de H ainsi que L.

Solution :

$$\kappa_{\mathrm{air}} k_{\mathrm{air}} \sin(k_{\mathrm{air}}(L-H)) \sin(k_{\mathrm{eau}} H) - \kappa_{\mathrm{eau}} k_{\mathrm{eau}} \cos(k_{\mathrm{air}}(L-H)) \cos(k_{\mathrm{eau}} H)$$

2 Timbre d'un instrument à cordes

Dans cet exercice, on propose d'étudier les vibrations d'une corde de longueur L dans les cas où elle est initialement pincée ou frappée. On considère la corde sujette à une tension T et de masse linéique μ. La corde est fixe à chacune de ses extrémités.

Pour commencer, on considère une corde pincée en son milieu, c'est-à-dire que la corde est initialement de forme triangulaire, avec le sommet situé à égale distance des extrémités fixes. Le sommet est déplacé de A par rapport à la position au repos de la corde.

(a) Déterminer la forme générale de la solution de l'équation d'onde. Identifier les modes propres du système.

Solution :
La solution générale $\psi(x, t)$, après imposition des conditions aux bords, est donnée par une somme de modes propres :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t), \quad \text{avec} \quad \psi_n(x,t) = \sin(k_n x)\big[b_n \cos(k_n ut) + c_n \sin(k_n ut)\big].$$

(b) Imposer que la solution de l'équation d'onde trouvée au point (a) satisfasse les conditions initiales, en déduire que

$$\psi(x, t=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8A(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right).$$

Solution :
On trouve que $c_n = 0$ (condition initiale sur $\partial\psi/\partial t$), et avec $n \in \mathbb{N}$, que $b_{2n} = 0$ (condition initiale symétrique par rapport au centre de la corde) et

$$b_{2n+1} = \frac{8A(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

(c) Dériver l'évolution temporelle du déplacement de la corde. Quelle est l'intensité de l'onde sur la corde en fonction du temps ?

Solution :
L'évolution temporelle de la corde pincée en son centre est :

$$\psi(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8A(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi ut}{L}\right).$$

L'intensité de la corde est donnée par :

$$I(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(t),$$

où l'intensité de chaque harmonique $I_m(t)$ est donnée par :

$$I_m(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{8A}{(2m+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi ut}{L}\right)\right]^2.$$

(d) Refaire les points (a)–(c) en considérant une corde pincée au $1/3$ de sa longueur.

Solution :
L'amplitude de la corde pincée au 1/3 de sa longueur est donnée par :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ut}{L}\right),$$

avec

$$b_n = 6A\left[\frac{\sin(n\pi/3) - (n\pi/3)\cos(n\pi/3)}{n^2\pi^2} - (-1)^n \frac{\sin(2\pi n/3) - (2\pi n/3)\cos(2\pi n/3)}{2n^2\pi^2}\right].$$

On aimerait également étudier le cas d'une corde frappée plutôt que pincée, comme pour un piano par exemple. Initialement, la corde est supposée être à sa position d'équilibre, mais sur un intervalle de longueur a centré en $L/2$, une vitesse initiale v_0 est donnée aux éléments de la corde. Cette condition se traduit en

$$\psi(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{si } x \in [(L-a)/2, (L+a)/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Dériver l'évolution temporelle de la corde frappée.

Solution :

$$\psi(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{4v_0 L}{(2m+1)^2\pi^2 u} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi a}{2L}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi ut}{L}\right)$$

3 Corde dans un milieu visqueux

On considère une corde de longueur L et de masse linéique μ dans un milieu visqueux. Les bords de la corde sont considérés comme étant fixes. Chaque élément infinitésimal de corde dx est soumis à une force de frottement infinitésimale $dF = -\lambda v\, dx$, où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement par unité de longueur. La corde est soumise à une tension T. La vitesse de propagation de la perturbation est notée u.

(a) Montrer que l'équation d'onde, en tenant compte des frottements, s'écrit :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

(b) En utilisant la méthode de séparation de variables, dériver les modes propres d'une corde dans un milieu visqueux. Discuter de l'évolution temporelle des différents régimes observés pour ces modes propres.

Solution :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Delta_n} \in \mathbb{R} \text{ (sur-critique)} : &\quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(Ae^{\sqrt{\Delta_n}t} + Be^{-\sqrt{\Delta_n}t}), \\
\sqrt{\Delta_n} = 0 \text{ (critique)} : &\quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(A + Bt), \\
\sqrt{\Delta_n} \in i\mathbb{R} \text{ (sous-critique)} : &\quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(Ae^{i|\sqrt{\Delta_n}|t} + Be^{-i|\sqrt{\Delta_n}|t}),
\end{aligned}$$

où $\Delta_n = \Lambda^2 - k_n^2 u^2$, $\Lambda = \lambda/2\mu$ et $k_n = n\pi/L$.

(c) Obtenir la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

Solution :

$$u^2k^2 = \omega^2 + i\frac{\lambda}{\mu}\omega$$

(d) En considérant $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$, que peut-on dire sur l'évolution temporelle d'un paquet d'onde ?

Solution :
Comparer la fréquence angulaire obtenue en question (c) avec les régimes identifiés en (b).