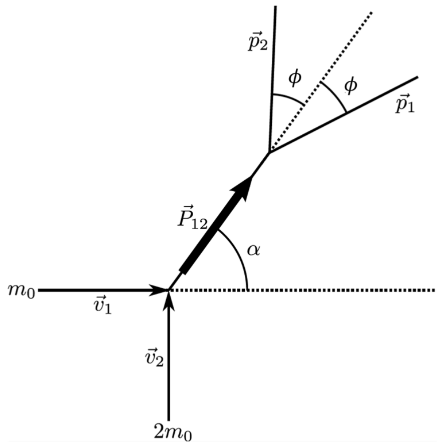
23 mai 2025

Corrigé 12 : Dynamique relativiste

1 Collision relativiste à l'équerre



Une particule de masse au repos m_0 et de vitesse $\mathbf{v}_1 = v\,\mathbf{e}_x$ entre en collision avec une particule de masse au repos $2m_0$, de même vitesse scalaire $\mathbf{v}_2 = v\,\mathbf{e}_y$, mais sur une trajectoire perpendiculaire à celle de la première particule (voir dessin ci-contre). Juste après la collision, les deux particules forment une nouvelle particule, qu'on appellera « particule composite », de quantité de mouvement $\mathbf{P}_{12}$. Cette particule composite se décompose, après un certain temps, en deux photons de mêmes énergies. L'angle entre la trajectoire des deux photons vaut 2ϕ.

(a) Quel est le module de la quantité de mouvement $\mathbf{P}_{12}$ de la particule composite ?

On calcule d'abord la quantité de mouvement de chaque particule incidente,

$$\mathbf{P}_1 = \gamma m_0\,\mathbf{v}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_2 = 2\gamma m_0\,\mathbf{v}_2, \tag{1}$$

où le facteur γ est le même pour les deux particules. La quantité de mouvement de la particule composite, par conservation de la quantité de mouvement du système, est

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \gamma m_0(\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2) \tag{2}$$

dont le module vaut

$$\|\mathbf{P}_{12}\| = P_{12} = \sqrt{5}\gamma m_0 v. \tag{3}$$

(b) Quelle est la masse au repos $M_{0_{12}}$ de cette particule composite ?

Les énergies des particules incidentes sont

$$E_1 = \gamma m_0 c^2 \quad \text{et} \quad E_2 = 2\gamma m_0 c^2. \tag{4}$$

Pour trouver la masse de la particule composite, on calcule d'abord son énergie,

$$E_{12} = E_1 + E_2 = 3\gamma m_0 c^2. \tag{5}$$

En utilisant $E_{12}^2 = M_{0_{12}}^2 c^4 + P_{12}^2 c^2$, on obtient

$$M_{0_{12}} = \frac{1}{c^2}\sqrt{E_{12}^2 - P_{12}^2 c^2} = \frac{\gamma m_0}{c}\sqrt{9c^2 - 5v^2} = 3\gamma m_0\sqrt{1 - \frac{5}{9}\frac{v^2}{c^2}}. \tag{6}$$

(c) Que vaut l'angle ϕ ?

Les deux photons sont identiques, et donc ils ont la même quantité de mouvement (en module) et ils se partagent l'énergie disponible :

$$p_1 = p_2 = p \quad \text{et} \quad E_1 = E_2 = \frac{E_{12}}{2}. \tag{7}$$

La relation $E = pc$, valable pour les photons, implique $p = 3\gamma m_0 c/2$. Finalement, par conservation de la quantité de mouvement, on obtient

$$P_{12} = \sqrt{5}\gamma m_0 v = 3\gamma m_0 c \cos\phi = \|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\| \implies \cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{v}{c}. \tag{8}$$

2 Choc relativiste

On considère deux particules élémentaires (1 et 2), de masses au repos $m_1 = m_2 = m$, se dirigeant l'une vers l'autre dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au laboratoire. Dans $\mathcal{R}$, la première particule se déplace à une vitesse relativiste $\mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{e}_x$, $v_1 > 0$, et la deuxième particule se déplace à une vitesse relativiste $\mathbf{v}_2 = -v_2\,\mathbf{e}_x$, $v_2 > 0$, où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire le long de l'axe x. On introduit également le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la particule 1, c'est-à-dire que la particule 1 est au repos dans $\mathcal{R}'$. On définit deux événements A et B dont on connait les propriétés suivantes :

— événement A : la particule 1 se trouve en $t_A = x_A = 0$ (dans $\mathcal{R}$) et $t'_A = x'_A = 0$ (dans $\mathcal{R}'$),

— événement B : la particule 2 se trouve en $t_B = 0$ (dans $\mathcal{R}$) et $x'_B > 0$ (dans $\mathcal{R}'$).

Exprimer tous les résultats en fonction de v_1, v_2, m, x'_B et la vitesse de la lumière, c.

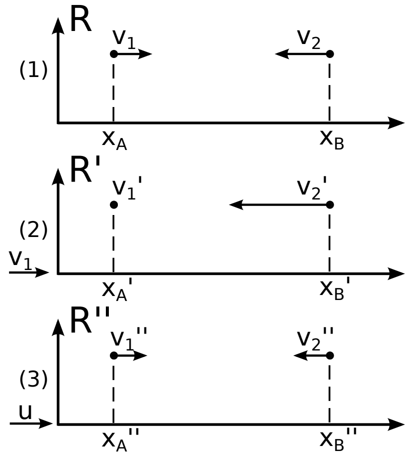


Figure 1

(a) Déterminer x_B et t'_B. Est-ce que les deux événements A et B sont simultanés dans $\mathcal{R}'$? Déterminer également la vitesse $\mathbf{v}'_2$ de la particule 2 dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Les deux événements A et B sont représentés sur les deux panneaux supérieurs de la figure 1 pour les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En utilisant les transformations de Lorentz,

$$x'_B = \gamma_1(x_B - v_1 t_B) = \gamma_1 x_B \quad \text{et} \quad t'_B = \gamma_1\left(t_B - \frac{v_1}{c^2}x_B\right) = -\gamma_1\frac{v_1}{c^2}x_B, \tag{9}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \tag{10}$$

c'est-à-dire,

$$x_B = \frac{x'_B}{\gamma_1} = x'_B\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad t'_B = -\gamma_1\frac{v_1}{c^2}x_B = -\frac{v_1}{c^2}x'_B. \tag{11}$$

On constate que $t'_B \neq t'_A$. Les évènements A et B étant simultanés dans $\mathcal{R}$, ils ne le sont donc pas dans $\mathcal{R}'$. On cherche désormais à transformer une vitesse $v = dx/dt$ dans $\mathcal{R}$ en une vitesse $v' = dx'/dt'$ dans $\mathcal{R}'$,

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma_1(dx - v_1\,dt)}{\gamma_1(dt - v_1\,dx/c^2)} = \frac{dx/dt - v_1}{1 - (v_1/c^2)\,dx/dt} = \frac{v - v_1}{1 - vv_1/c^2}. \tag{12}$$

On peut donc exprimer la vitesse $\mathbf{v}'_2 = -v'_2\,\mathbf{e}_x$ en fonction de $\mathbf{v}_2 = -v_2\,\mathbf{e}_x$:

$$v'_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}. \tag{13}$$

(b) On définit l'événement C comme l'instant auquel la particule 1 et la particule 2 entrent en collision. Déterminer les coordonnées t_C et x_C de l'événement C dans le référentiel $\mathcal{R}$. Faire de même pour les coordonnées t'_C et x'_C dans $\mathcal{R}'$.

Dans $\mathcal{R}$, les particules 1 et 2 doivent parcourir respectivement une distance $d_1 = x_C - x_A = x_C$ et $d_2 = x_B - x_C$. On peut donc poser

$$\frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} \implies x_C(v_1 + v_2) = x_B v_1 \implies x_C = x_B \frac{v_1}{v_1 + v_2} = x'_B \frac{v_1}{v_1 + v_2}\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}, \tag{14}$$

où on a remplacé x_B à l'aide de l'équation (11). À l'aide de l'équation précédente, le temps t_C est

$$t_C = \frac{d_1}{v_1} = \frac{x_C}{v_1} = \frac{x'_B}{v_1 + v_2}\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \tag{15}$$

Dans $\mathcal{R}'$ on calcule les coordonnées en utilisant les transformations de Lorentz :

$$t'_C = \gamma_1\left(t_C - \frac{v_1 x_C}{c^2}\right) = \gamma_1 \frac{x_C}{v_1}\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) = \frac{x'_B}{v_1 + v_2}\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right), \tag{16}$$

$$x'_C = \gamma_1(x_C - v_1 t_C) = 0. \tag{17}$$

Le même résultat peut être obtenu en considérant que la particule 2 doit parcourir une distance $d' = x'_B - x'_A = x'_B$ dans $\mathcal{R}'$. Puisque la particule 1 est au repos dans $\mathcal{R}'$, il suit que $x'_C = x'_A = 0$. Pour la coordonnée temporelle, on a que

$$t'_C = t'_B + \frac{d'}{\|\mathbf{v}'_2\|}. \tag{18}$$

On substitue t'_B à l'aide de l'équation (11), d' par x'_B et $\mathbf{v}'_2$ par l'expression (13),

$$t'_C = -x'_B \frac{v_1}{c^2} + x'_B \frac{1 + v_1 v_2/c^2}{v_1 + v_2} = \frac{x'_B}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) = \frac{x'_B}{v_1 + v_2}\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right). \tag{19}$$

À partir de maintenant, on suppose que $v_1 \neq v_2 = 0$, c'est-à-dire que la particule 2 est au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$ avant la collision.

(c) Soit $\mathcal{R}''$ le référentiel du centre de masse des deux particules, dans lequel la somme de leurs quantités de mouvement est nulle. Déterminer u, la vitesse de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}$. Montrer que dans le cas $v_1 \ll c$ on retrouve le résultat de la mécanique classique.

La situation dans le référentiel $\mathcal{R}''$ est représentée sur le dernier panneau de la figure 1. En utilisant la formule des transformations des vitesses (12) et en notant u la vitesse de translation entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$,

$$v''_1 = \frac{v_1 - u}{1 - v_1 u/c^2} \quad \text{et} \quad v''_2 = -u. \tag{20}$$

Dans $\mathcal{R}''$, la somme des quantités de mouvement doit être nulle, c.-à-d. $m\gamma_1 v''_1 = -m\gamma_2 v''_2$, et donc

$$\frac{v''_1}{\sqrt{1 - v''^2_1/c^2}} = -\frac{v''_2}{\sqrt{1 - v''^2_2/c^2}}. \tag{21}$$

Cette dernière égalité n'est possible que si $v''_1 = -v''_2$. En mettant (21) au carré,

$$v''^2_1 - \frac{v''^2_1 v''^2_2}{c^2} = v''^2_2 - \frac{v''^2_1 v''^2_2}{c^2} \implies v''^2_1 = v''^2_2. \tag{22}$$

On impose donc $v_1'' = u$ dans l'éq. (20) pour obtenir

$$\frac{v_1 - u}{1 - v_1 u/c^2} = u \implies u^2 - 2\frac{c^2}{v_1}u + c^2 = 0 \implies u = \frac{c^2}{v_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\right). \tag{23}$$

En imposant $|u| < c$, on obtient

$$u = \frac{c^2}{v_1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\right). \tag{24}$$

Si on avait considéré une approche non relativiste, on aurait obtenu que $v_1'' = v_1 - u$ et $v_2'' = -u$, et donc $u = v_1/2$ puisque $v_1'' + v_2'' = 0$. On peut vérifier que l'expression (24) considérée dans la limite où $v_1 \ll c$ est en accord avec le résultat non relativiste. On fait un développement limité de la forme $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, et on a donc

$$u \approx \frac{c^2}{v_1}\left(1 - 1 + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) = \frac{v_1}{2}, \tag{25}$$

qui correspond au résultat non relativiste.

(d) Après la collision, les deux particules se déplacent respectivement à des vitesses $\mathbf{v}_{1,a}$ et $\mathbf{v}_{2,a}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, avec $\|\mathbf{v}_{1,a}\| = \|\mathbf{v}_{2,a}\|$ (voir figure 2, après la collision). On suppose que la masse au repos de chacune des deux particules reste inchangée pendant la collision. Déterminer l'angle α que fait la vitesse $\mathbf{v}_{1,a}$ avec l'axe x dans $\mathcal{R}$.

Figure 2 : Représentation de la collision dans le référentiel $\mathcal{R}$.

La quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$ avant le choc est donnée par

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\gamma_1 v_1\, \mathbf{e}_x. \tag{26}$$

Après le choc, on a

$$\mathbf{p}_a = m\gamma_a v_a(\cos\alpha\, \mathbf{e}_x + \sin\alpha\, \mathbf{e}_y) + m\gamma_a v_a(\cos\alpha\, \mathbf{e}_x - \sin\alpha\, \mathbf{e}_y) = 2m\gamma_a v_a \cos\alpha\, \mathbf{e}_x, \tag{27}$$

avec

$$v_a = \|\mathbf{v}_{1,a}\| \quad \text{et} \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}, \tag{28}$$

où on a imposé que l'angle que fait la deuxième particule avec l'axe x est $-\alpha$ pour conserver la quantité de mouvement le long de l'axe y. L'énergie du système avant la collision est

$$E = E_1 + E_2 = m\gamma_1 c^2 + mc^2 = mc^2(1 + \gamma_1), \tag{29}$$

et après la collision,

$$E_a = E_{1,a} + E_{2,a} = m\gamma_a c^2 + m\gamma_a c^2 = 2m\gamma_a c^2. \tag{30}$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, on peut écrire

$$m\gamma_1 v_1 = 2m\gamma_a v_a \cos\alpha \quad \text{et} \quad mc^2(1 + \gamma_1) = 2m\gamma_a c^2. \tag{31}$$

La deuxième relation donne

$$\gamma_a = \frac{1+\gamma_1}{2} \implies 1 - \frac{v_a^2}{c^2} = \left(\frac{2}{1+\gamma_1}\right)^2 \implies v_a = c\sqrt{1 - \left(\frac{2}{1+\gamma_1}\right)^2}. \tag{32}$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, on peut donc écrire

$$\gamma_1 v_1 = 2\gamma_a v_a \cos\alpha = (1+\gamma_1) v_a \cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}\frac{v_1}{v_a}, \tag{33}$$

où on a remplacé γ_a à l'aide de l'éq. (32).

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= v_1 \left[\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1} c \sqrt{1 - \left(\frac{2}{1+\gamma_1}\right)^2}\right]^{-1} = \frac{v_1}{c}\left[\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2 - \frac{4}{\gamma_1^2}\right]^{-1/2} = \cdots \\ \cdots &= \frac{v_1}{c}\left[1 + \frac{2}{\gamma_1} - \frac{3}{\gamma_1^2}\right]^{-1/2} = \frac{v_1}{c}\left[1 + 2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - 3\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\right]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{34}$$

et donc on a

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{v_1/c}{\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - v_1^2/c^2} - 3(1 - v_1^2/c^2)}}\right]. \tag{35}$$

Remarque 1 : On peut voir que dans la limite $0 < v_1 \ll c$ on a

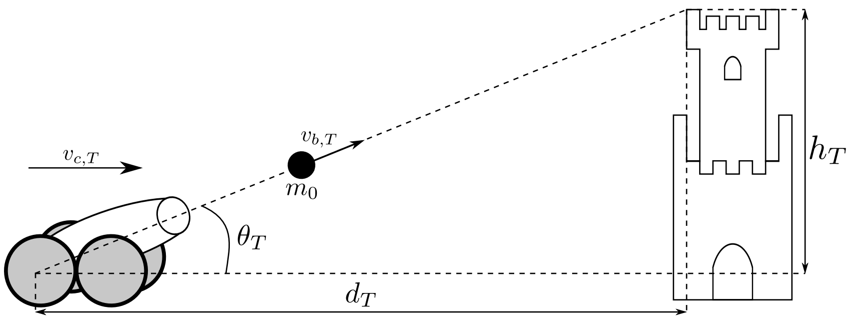
$$\alpha \approx \cos^{-1}\left[\frac{v_1/c}{\sqrt{1 + 2[1 - v_1^2/(2c^2)] - 3(1 - v_1^2/c^2)}}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{v_1/c}{\sqrt{2v_1^2/c^2}}\right] = \frac{\pi}{4}, \tag{36}$$

ce qui correspond au résultat de la mécanique classique pour une collision élastique. La relation non relativiste est obtenue par résolution de la conservation de la quantité de mouvement et énergie cinétique, $mv_1 = 2mv_a \cos\alpha$ et $mv_1^2/2 = mv_a^2$, ce qui correspond bien à la limite $v_1 \ll c$ des relations (31).

Remarque 2 : On peut aussi déterminer l'angle α'' que fait la particule 1 avec l'axe x dans $\mathcal{R}''$. En effet, on sait que, après la collision, les deux particules ont la même composante x de la vitesse dans $\mathcal{R}$. Par conséquent, elles doivent aussi avoir la même composante x de la vitesse dans $\mathcal{R}''$. Mais dans $\mathcal{R}''$ la somme de la quantité de mouvement des deux particules est nulle. Il suit que, après la collision, la composante x de la vitesse des deux particules est également nulle, ce qui implique que leur vitesse est perpendiculaire à l'axe x, et donc $\alpha'' = \pm\pi/2$.

3 Bataille relativiste

Dans le but d'attaquer une tour fortifiée, des attaquants ont mis au point un canon capable de rouler et de tirer à des vitesses relativistes. Dans le référentiel de la tour, le canon roule avec une vitesse $v_{c,T}$ constante en direction de la tour et lorsqu'il fait feu, il se trouve à une distance d_T de la fortification. Toujours dans le référentiel de la tour, l'angle de tir θ_T est tel que le boulet, qui a une vitesse de module $v_{b,T}$ et une masse au repos m_0, touche le haut de la tour. On néglige les effets de la gravité et de toute autre force (frottements, etc.). Exprimer tous les résultats en fonction des paramètres θ_T, d_T, $v_{b,T}$, m_0, $v_{c,T}$, de la vitesse de la lumière, c, et $\gamma_C = 1/\sqrt{1 - v_{c,T}^2/c^2}$.



(a) Calculer la hauteur h_T de la tour dans son référentiel. Puis, calculer le temps que met le boulet pour arriver à son objectif dans le référentiel de la tour, Δt_T, et dans celui du canon, Δt_C. De plus, calculer la distance horizontale parcourue par le boulet jusqu'à la tour vue dans le référentiel du canon, d_C.

Puisque la distance d_T et l'angle de tir θ_T sont définis dans le référentiel de la tour, la hauteur de cette dernière est

$$h_T = d_T \tan\theta_T. \tag{37}$$

Dans le référentiel de la tour, on peut définir deux événements. Le premier est l'instant du tir que l'on caractérise par les coordonnées $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Le second est l'arrivée du boulet sur la tour, $(t_1, x_1) = (\Delta t_T, d_T)$. Comme la vitesse du boulet est définie dans le référentiel de la tour, le temps qu'il met pour l'atteindre est

$$\Delta t_T = \frac{d_T}{v_{b,T,x}} = \frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T}, \tag{38}$$

où $v_{b,T,x}$ représente la vitesse du boulet en direction de la tour.

Notons que le même résultat peut être obtenu en considérant la hauteur de la tour,

$$\Delta t_T = \frac{h_T}{v_{b,T}\sin\theta_T} = \frac{d_T\tan\theta_T}{v_{b,T}\sin\theta_T} = \frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T}. \tag{39}$$

Dans le référentiel du canon, on peut procéder de la même manière en utilisant la transformée de Lorentz sur les deux événements définis précédemment. Ainsi, on trouve que le premier événement est aussi $(t'_0, x'_0) = (0, 0)$ et le deuxième est donné par $(t'_1, x'_1) = (\Delta t_C, d_C)$ avec

$$d_C = \gamma_C(d_T - v_{c,T}\Delta t_T) = \gamma_C d_T\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right), \tag{40}$$

$$\Delta t_C = \gamma_C\left(\Delta t_T - \frac{v_{c,T}}{c^2}d_T\right) = \gamma_C d_T\left(\frac{1}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}\right). \tag{41}$$

Alternativement, plutôt que de transformer le temps, on aurait pu définir Δt_C dans le référentiel du canon, $\Delta t_C = d_C/v_{b,C,x}$, en utilisant la transformation des vitesses (12) pour exprimer $v_{b,C,x}$,

$$v_{b,C,x} = \frac{v_{b,T,x} - v_{c,T}}{1 - v_{b,T,x}v_{c,T}/c^2}. \tag{42}$$

On a donc

$$\Delta t_C = \frac{d_C}{v_{b,C,x}} = \gamma_C d_T\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T,x}}\right)\frac{1 - v_{b,T,x}v_{c,T}/c^2}{v_{b,T,x} - v_{c,T}} = \cdots$$

$$\cdots = \gamma_C d_T\frac{1}{v_{b,T,x}}\left(1 - \frac{v_{b,T,x}v_{c,T}}{c^2}\right) = \gamma_C d_T\left(\frac{1}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}\right). \tag{43}$$

(b) Calculer l'angle de tir θ_C dans le référentiel du canon.

Dans le référentiel de la tour, l'angle d'inclinaison du canon est donné par l'équation (37). De manière similaire, l'angle d'inclinaison dans le référentiel du canon est donné par

$$\tan\theta_C = \frac{h_C}{d_C}. \tag{44}$$

Pour trouver les distances dans le référentiel du canon, on procède de manière similaire à la question (a). On définit les deux événements dans le référentiel de la tour $(t_0, x_0, y_0) = (0,0,0)$ et $(t_1, x_1, y_1) = (\Delta t_T, d_T, h_T)$ qui correspondent respectivement au tir du boulet et à son impact sur la tour. On utilise ensuite les transformations de Lorentz pour passer dans le référentiel du canon,

$$d_C = \gamma_C(d_T - v_{c,T}\Delta t_T) = \gamma_C d_T\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right), \tag{45}$$

où on a utilisé l'éq. (38) pour Δt_T. Ce résultat correspond bien à l'éq. (40) de la question (a). On note également que

$$h_C = h_T, \tag{46}$$

car le mouvement relatif des référentiels est perpendiculaire à l'axe y.
Ainsi, l'angle θ_C dans le référentiel du canon est donné par

$$\tan\theta_C = \frac{h_C}{d_C} = \frac{h_T}{\gamma_C d_T}\frac{1}{1 - v_{c,T}/v_{b,T,x}} = \frac{\tan\theta_T}{\gamma_C[1 - v_{c,T}/(v_{b,T}\cos\theta_T)]}. \tag{47}$$

Remarquons que le même résultat peut être obtenu en considérant la transformation des vitesses. En effet, l'angle θ_C peut également être défini de la façon suivante

$$\tan\theta_C = \frac{v_{b,C,y}}{v_{b,C,x}} \tag{48}$$

En utilisant les transformations des vitesses, on peut relier les vitesses du référentiel du canon à celles du référentiel de la tour. La transformation de $v_{b,C,x}$ a été discutée en (42). Pour la composante verticale, on procède de manière similaire à l'éq. (12) en notant que seul le temps se transforme :

$$\begin{aligned} v_{b,C,y} = \frac{dy_{b,C}}{dt_C} &= \frac{dy_{b,T}}{\gamma_C(dt_T - v_{c,T}\, dx_{b,T}/c^2)} = \cdots \\ &\cdots = \frac{dy_{b,T}/dt_T}{\gamma_C[1 - (v_{c,T}/c^2)\, dx_{b,T}/dt_T]} = \frac{v_{b,T,y}}{\gamma_C(1 - v_{b,T,x}v_{c,T}/c^2)}. \end{aligned} \tag{49}$$

Ainsi, l'angle de tir dans le référentiel du canon est donné par

$$\begin{aligned} \tan\theta_C = \frac{v_{b,C,y}}{v_{b,C,x}} &= \frac{v_{b,T,y}}{\gamma_C(1 - v_{b,T,x}v_{c,T}/c^2)}\frac{1 - v_{b,T,x}v_{c,T}/c^2}{v_{b,T,x} - v_{c,T}} = \cdots \\ &\cdots = \frac{\tan\theta_T}{\gamma_C(1 - v_{c,T}/v_{b,T,x})} = \frac{\tan\theta_T}{\gamma_C[1 - v_{c,T}/(v_{b,T}\cos\theta_T)]}. \end{aligned} \tag{50}$$

C'est bien le même résultat que celui trouvé avec la méthode des transformations de Lorentz, éq. (47).

(c) Calculer l'énergie cinétique relativiste du boulet dans le référentiel de la tour, $E_{b,T}$, et dans celui du canon, $E_{b,C}$.

Dans le référentiel de la tour, l'énergie cinétique relativiste est donnée par

$$E_{b,T} = (\gamma_{b,T} - 1)m_0c^2, \tag{51}$$

et l'énergie cinétique relativiste du boulet dans le référentiel du canon est donnée par

$$E_{b,C} = (\gamma_{b,C} - 1)m_0c^2, \tag{52}$$

où $\gamma_{b,T} = 1/\sqrt{1 - v_{b,T}^2/c^2}$ et $\gamma_{b,C} = 1/\sqrt{1 - v_{b,C}^2/c^2}$.

Nous devons donc calculer la norme de la vitesse du boulet dans le référentiel du canon. Par définition, la norme de la vitesse est donnée par $v_{b,C}^2 = v_{b,C,x}^2 + v_{b,C,y}^2$. Afin d'obtenir le résultat final en fonction des paramètres demandés, il convient de remplacer les composantes de la vitesse par leurs définitions (42) et (49). Un développement algébrique, ici élidé car présentant peu d'intérêt, donne

$$E_{b,C} = \left[\left(1 - \frac{(v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T})^2 + (v_{b,T}\sin\theta_T)^2}{(c - v_{c,T}v_{b,T}\cos\theta_T/c)^2}\right)^{-1/2} - 1\right]m_0c^2. \tag{53}$$