16 mai 2025

Corrigé 11 : Cinématique relativiste

1 Astronaute sur internet

Un astronaute à bord d'une fusée s'éloigne à une vitesse constante u de la Terre. Deux horloges mesurent le temps depuis lequel l'astronaute a quitté la Terre. On note t le temps indiqué par l'horloge terrestre et t' celui donné par l'horloge de la fusée. L'astronaute désire surfer sur internet.

(a) L'astronaute clique pour se connecter ; on appelle cet évènement A. À cet instant, son horloge de bord indique t'_A. À quelle distance de la Terre (dans le référentiel terrestre), se trouve-t-il alors ? Quel temps t_A est-il indiqué par l'horloge terrestre ? Commencer par placer les différents événements sur un diagramme espace-temps.

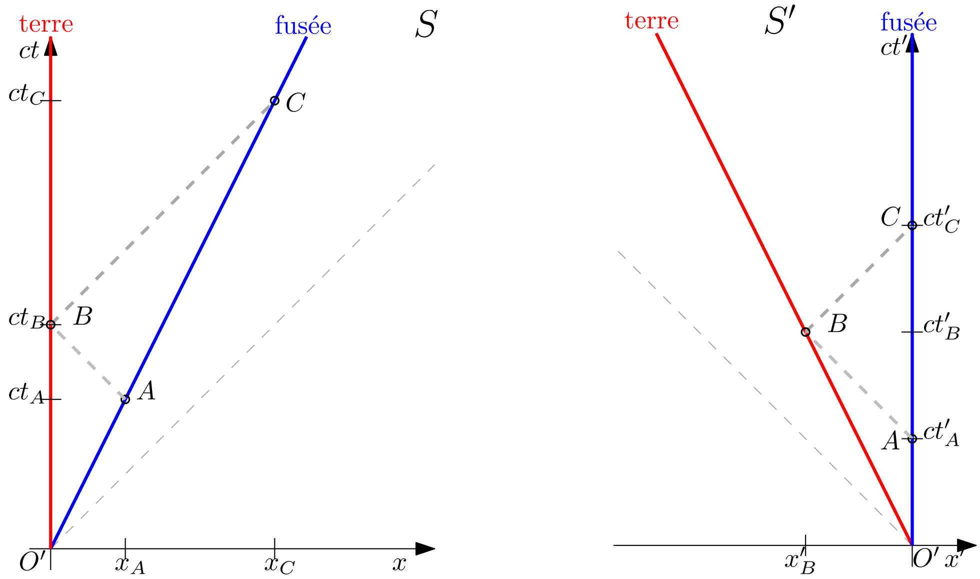

Figure 1

Soit $\mathcal{S}$ le référentiel lié à la Terre et $\mathcal{S}'$ le référentiel lié à la fusée. Les évènements dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont reliés par les transformations de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x - ut \\ t - ux/c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et, par relativité,} \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x' + ut' \\ t' + ux'/c^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Dans $\mathcal{S}$, la fusée avance à la vitesse u et la Terre est au repos. Dans $\mathcal{S}'$, la Terre se déplace à la vitesse $-u$ et la fusée est au repos. La situation est illustrée sur le diagramme espace-temps ci-dessus. L'événement A (lorsque l'astronaute clique pour se connecter) a pour coordonnées spatio-temporelles (t'_A, x'_A) dans $\mathcal{S}'$, avec $x'_A = 0$. On exprime cet évènement dans $\mathcal{S}$ grâce à l'équation (1),

$$t_A = \gamma t'_A, \qquad x_A = \gamma u t'_A = u t_A. \tag{2}$$

L'application numérique donne $\gamma = 3.2$, $x_A = 1.4 \cdot 10^{10}\,\text{m}$ et $t_A = 48.0\,\text{s}$.

(b) Le signal étant transmis par ondes radio, qu'indique l'horloge terrestre lorsque le signal est reçu sur Terre ? Qu'indique alors l'horloge de la fusée ? Vu de la fusée, à quelle distance la Terre se trouve-t-elle alors ?

Le signal se propage par ondes radio, donc à la vitesse de la lumière c, et ceci dans tout référentiel. Le temps de parcours mesuré par l'horloge terrestre est alors $\Delta t_1 = x_A/c$. Soit l'événement B, correspondant à l'instant où le signal est reçu sur Terre, de coordonnées spatio-temporelles :

$$t_B = t_A + \Delta t_1 = t_A + \frac{x_A}{c} = t_A\left(1 + \frac{u}{c}\right) = \gamma t'_A\left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad \text{et} \quad x_B = 0. \tag{3}$$

Par les transformations de Lorentz, dans le référentiel de la fusée, l'événement B a pour coordonnées :

$$t'_B = \gamma t_B = \gamma^2 t'_A\left(1 + \frac{u}{c}\right) = \frac{t'_A}{1 - u/c} \quad \text{et} \quad x'_B = -\gamma u t_B = -u t'_B. \tag{4}$$

De manière équivalente, on aurait également pu trouver t'_B et x'_B depuis le référentiel $\mathcal{S}'$ en remarquant que l'évènement B est l'intersection de la trajectoire de la Terre à la vitesse $-u$, $x'_B = -ut'_B$, et le faisceau lumineux à la vitesse $-c$ qui part t'_A plus tard, $x'_B = -c(t'_B - t'_A)$, voir figure 1. Ainsi,

$$t'_B = \frac{x'_B}{-u} = t'_A + \frac{x'_B}{-c} \implies x'_B\left(1 - \frac{u}{c}\right) = -ut'_A, \tag{5}$$

et donc

$$x'_B = \frac{-ut'_A}{1 - u/c} = -ut'_B \quad \text{et} \quad t'_B = \frac{x'_B}{-u} = \frac{t'_A}{1 - u/c}. \tag{6}$$

L'application numérique donne $t_B = 93.7\,\text{s}$, $x'_B = -8.5 \cdot 10^{10}\,\text{m}$ et $t'_B = 300\,\text{s}$.

(c) La Terre renvoie immédiatement un signal de confirmation, également par ondes radio. Qu'indique l'horloge de la fusée lorsque l'astronaute reçoit le signal de confirmation ? Sur son horloge, combien de temps s'est-il écoulé entre l'instant où il a cliqué et l'instant où il reçoit la confirmation ?

Dans le référentiel de la fusée, le signal de confirmation est émis au temps t'_B, quand la Terre se trouve à une distance $|x'_B|$. Comme dans le point (b), les ondes radio se propagent à une vitesse c dans tout référentiel, donc aussi par rapport à la fusée. Le temps de retour mesuré par l'horloge de la fusée est alors $\Delta t'_2 = |x'_B|/c = ut'_B/c$. Soit l'événement C correspondant à l'instant auquel la fusée reçoit la confirmation :

$$t'_C = t'_B + \Delta t'_2 = t'_B\left(1 + \frac{u}{c}\right) = t'_A\frac{1 + u/c}{1 - u/c} \quad \text{et} \quad x'_C = 0. \tag{7}$$

Ainsi le temps écoulé dans la fusée entre A et C est :

$$\Delta t' = t'_C - t'_A = \frac{2u/c}{1 - u/c}t'_A \tag{8}$$

L'application numérique donne $t'_C = 585\,\text{s}$ et $\Delta t = 570\,\text{s}$.

2 Expansion de l'univers et décalage vers le rouge

L'univers est en expansion constante en raison d'une dilatation de l'espace lui-même. Il en résulte un éloignement progressif des objets célestes à grande échelle (galaxies, amas de galaxies). On montre que cette expansion entraîne un décalage vers le rouge de la lumière émise par des galaxies distantes.

On considère une seule dimension spatiale. Soit une source lumineuse s s'éloignant d'un observateur o à une vitesse $v > 0$. On associe un référentiel $\mathcal{R}$ à l'observateur, ainsi que λ_o la longueur d'onde qu'il mesure provenant de la source. Le référentiel lié à la source est noté $\mathcal{R}'$, ainsi que λ_s la longueur d'onde émise dans son propre référentiel.

(a) Exprimer la longueur d'onde λ_o mesurée par l'observateur en fonction de la longueur d'onde émise λ_s et de la vitesse relative β d'éloignement entre l'observateur et la source, $\beta = v/c$.

On propose deux solutions.

Solution 1. On se place dans le référentiel de la source $\mathcal{R}'$. Celle-ci émet des fronts d'ondes séparés d'une longueur d'onde $\lambda_s = c\Delta T_s$, se propageant à vitesse c en direction de l'observateur, avec ΔT_s la période de l'onde. Toujours du point de vue de la source, on observe un premier front d'onde arriver à l'observateur, puis, après un temps δt_s, un second front. Pendant cet intervalle de temps, l'onde aura parcouru une distance $c\delta t_s$, alors que l'observateur aura lui parcouru une distance $v\delta t_s$. On peut donc écrire

$$c\delta t_s = \lambda_s + v\delta t_s \implies \delta t_s = \frac{\lambda_s}{c-v} = \frac{\Delta T_s}{1-\beta}. \tag{9}$$

Puisque l'observateur est en mouvement par rapport à la source, l'intervalle de temps entre l'arrivée de deux fronts d'onde, du point de vue de l'observateur dans le référentiel $\mathcal{R}$, est dilaté par rapport à $\mathcal{R}'$ et s'écrit

$$\delta t_o = \frac{\delta t_s}{\gamma} = \delta t_s\sqrt{1-\beta^2}. \tag{10}$$

En substituant l'expression (9) dans l'équation précédente, on obtient

$$\delta t_o = \Delta T_s\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{11}$$

Pour l'observateur, l'intervalle δt_o entre la réception de deux fronts d'onde correspond naturellement à la période apparente ΔT_o de l'onde qu'il reçoit, $\delta t_o = \Delta T_o = \lambda_o/c$. On peut ainsi conclure que

$$\lambda_o = \lambda_s\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{12}$$

Solution 2. Il est également possible de procéder par transformation de Lorentz. On considère les coordonnées spatio-temporelles suivantes :

Évènement dans le réf. de :	l'observateur,	la source.
Arrivée du 1^{er} front.	x_1, t_1	x_1', t_1'
Arrivée du 2^{nd} front.	x_2, t_2	x_2', t_2'

On pose arbitrairement $x_1 = x_1' = t_1 = t_1' = 0$. Puisque l'observateur ne bouge pas dans son propre référentiel $\mathcal{R}$, alors il reçoit également le second front en $x_2 = 0$, et ce après un temps $t_2 = \lambda_o/c$ en accord avec la longueur de l'onde qu'il mesure.

Les coordonnées spatio-temporelles associées à la réception du second front dans le référentiel $\mathcal{R}'$ satisfont la transformation de Lorentz, et notamment

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \gamma t_2. \tag{13}$$

Par un raisonnement similaire à la première solution, on peut affirmer que

$$ct_2' = \lambda_s + vt_2' \implies \lambda_s = c(1-\beta)\gamma t_2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda_o, \tag{14}$$

et donc

$$\lambda_o = \lambda_s \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{15}$$

ce qui est bien identique au résultat obtenu précédemment, éq. (12).

(b) Exprimer ce résultat en fonction du décalage vers le rouge (« redshift » en anglais), c'est-à-dire la variable $z = (\lambda_o - \lambda_s)/\lambda_s$. Interpréter les cas $z > 0$ et $z < 0$.

Par substitution de l'éq. (15) dans l'expression du décalage vers le rouge z donnée en énoncé, on obtient

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1. \tag{16}$$

Puisqu'on avait posé qu'un éloignement de la source et de l'observateur correspond au cas $v > 0$, on constate que ce cas implique $\beta \in]0, 1[$ et donc $z > 0$. Pour une source s'éloignant de l'observateur, les longueurs d'ondes mesurées apparaissent plus longues que la longueur d'onde émise, $\lambda_o > \lambda_s$, et se traduit par un décalage vers le rouge du spectre lumineux mesuré. Si, au contraire, la source et l'observateur se rapprochent, alors $v < 0$, $\beta \in]-1, 0[$, $z < 0$ et $\lambda_o < \lambda_s$, c'est-à-dire que les longueurs d'onde mesurées paraissent alors plus courte que celle originalement émises par la source. Le décalage du spectre lumineux se fait alors « vers le bleu ».

(c) Quelle relation obtient-on pour λ lorsque $v \ll c$?

Quand $v \ll c$, les équations (15) et (16) deviennent

$$\lambda_o \approx \lambda_s(1+\beta) = \lambda_s\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{et} \quad z \approx \beta = \frac{v}{c}. \tag{17}$$

L'équation (17) correspond à l'effet Doppler classique déjà vu en cours. On retrouve donc la limite classique de la mécanique relativiste à la mécanique galiléenne quand $\beta \ll 1$.

L'expression obtenue en (16) pour le décalage vers le rouge est capitale en astrophysique et possède diverses applications. En effet, à partir des spectres des différentes galaxies, il est possible de mesurer le décalage vers le rouge z de celles-ci et d'obtenir leur distance à la Terre par application de la loi de Hubble, donnée par

$$v = H_0 d, \tag{18}$$

où H_0 est la constante de Hubble. Dans la limite où $z \approx v_\parallel / c$ où $v_\parallel$ est la vitesse de la galaxie dans l'axe d'observation, la distance est donnée par

$$d = \frac{cz}{H_0}. \tag{19}$$

C'est d'ailleurs pour cela que le télescope James Webb, lancé en 2021, ne mesure la lumière que dans le spectre infrarouge : afin d'observer des objets de décalage vers le rouge $z \sim 20$, époque correspondant à la formation des premières étoiles et galaxies, soit seulement 180 millions d'années après le Big Bang.

3 Physique des particules

Parmi les innombrables particules observées dans l'accélérateur du LHC au CERN, on rencontre parfois la particule nommée Λ_0. Sa durée de vie au repos est de τ_0, après quoi elle se désintègre. Les appareils de mesure la repèrent pendant $\tau = 13\tau_0/5$. Pour simplifier, on traite le problème de façon unidimensionnelle dans l'espace.

(a) Montrer que la vitesse de la particule par rapport aux appareils de mesure est de $v = 12c/13$. Quelle est la longueur L de sa trace (le chemin enregistré par le détecteur depuis son apparition jusqu'à sa désintégration) ? De quelle longueur L_0 est la trace de la particule dans son référentiel propre ?

L'existence de la particule Λ_0 semble prolongée par rapport à sa durée de vie au repos en raison de sa vitesse par rapport aux instruments de mesure. En effet, le temps s'écoule différemment que l'on soit dans le laboratoire ou dans le référentiel de la particule. Si on se place dans un référentiel dans lequel la particule est au repos (le référentiel propre), la durée de vie est de τ_0. Si on se déplace à une vitesse v par rapport à la particule (ou de façon équivalente, on observe la particule se déplacer à vitesse v), on constate une dilatation du temps donnée par

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{20}$$

On en dégage la vitesse de la particule par rapport au laboratoire,

$$v = c\sqrt{1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2}} = c\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = c\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}c. \tag{21}$$

La longueur de la trace mesurée par le détecteur est

$$L = v\tau = \frac{12}{13}c\tau. \tag{22}$$

Pour répondre à la question de la longueur du tracé dans le référentiel propre, on propose deux interprétations aboutissant à la même conclusion.

1. Du point de vue de la particule, c'est le laboratoire qui bouge à la vitesse v. Pendant le temps τ_0, ce dernier se sera déplacé de

$$L_0 = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0. \tag{23}$$

2. En partant du référentiel du laboratoire, un changement de référentiel vers le référentiel propre de la particule induit une contraction des longueurs. Si, dans le laboratoire, on mesure la distance L, alors, en utilisant les relations (20) et (22),

$$L_0 = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v\tau\frac{\tau_0}{\tau} = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0. \tag{24}$$

Finalement, on remarque qu'il aurait pu paraître judicieux d'appliquer l'identité pour la contraction des longueurs de la façon suivante :

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \tag{25}$$

ce qui est évidemment en contradiction directe avec l'équation (22) qui indique que $L = \gamma L_0$. La notation porte à confusion, mais il convient de noter que la longueur de la trace dans le laboratoire est L. Dans le référentiel du laboratoire, cette trace est « immobile » : les extrémités de la trajectoire (création et désintégration de la particule) ont des coordonnées spatiales indépendantes du temps, et on peut donc l'associer à une longueur propre (on pourrait par exemple dessiner cette trajectoire sur un papier). Cette longueur apparaît contractée dans le référentiel de la particule, en translation avec le laboratoire à vitesse v, et donc $L_0 = L/\gamma$, ce qui est bien l'identité attendue.

En revanche, les coordonnées spatio-temporelles associées aux extrémités de la trace dans le référentiel en mouvement de la particule ne sont pas immobiles dans l'espace. On ne peut donc pas appliquer la formule de contraction des longueurs directement. On pourrait par contre effectuer une transformation de Lorentz vers le référentiel du laboratoire, qui permettrait bien de retrouver $L = \gamma L_0$.

(b) On détecte deux particules Λ_0 créées au même moment et au même endroit. Elles se déplacent avec des vitesses de normes égales à $v = 12c/13$, mais de directions opposées. Quelle est la vitesse u de l'une par rapport à l'autre ? Est-ce qu'elles se désintègrent en même temps dans le référentiel du laboratoire ? Et dans le référentiel de l'une des particules ? Justifier les réponses par des calculs.

Un raisonnement classique suggère que la vitesse relative entre les deux particules est $u = 2v > c$. Évidemment, une vitesse plus élevée que celle de la lumière est contraire au deuxième postulat de la relativité. La loi de composition de vitesses est modifiée comme ceci

$$u = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 13}{169 + 144} c = \frac{312}{313} c \tag{26}$$

et la vitesse relative reste donc inférieure à celle de la lumière.

La simultanéité est une notion relative. Plaçons l'origine de l'espace-temps à l'endroit et au moment où ces deux particules sont créées. Dans le référentiel du laboratoire, elles ont la même vitesse en norme. La manière dont le temps s'écoule dans le laboratoire par rapport à leur référentiel propre est la même. Elles se désintègrent donc au même moment τ et à la même distance L d'un côté et de l'autre de l'origine.

Par contre, dans le référentiel propre de l'une des particules (peu importe laquelle), il n'y a plus cette symétrie : l'une est au repos (nommons cette particule A) et l'autre (particule B) se déplace à la vitesse u. Par un raisonnement identique à la question (a), il y a à nouveau dilatation du temps propre de B par rapport à A,

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{313\tau_0}{\sqrt{313^2 - 312^2}} = \frac{313\tau_0}{25} > \tau_0. \tag{27}$$

Ainsi, la particule A se désintègre avant la particule B dans le référentiel propre de A. Si on échange A et B, l'affirmation précédente est aussi vraie. Même si cela paraît paradoxal, c'est le principe même de la relativité.

Alternativement, on peut répondre à cette question en utilisant les transformations de Lorentz pour passer du référentiel du laboratoire au référentiel propre de la particule A (qui, supposons, voyage dans la direction positive de l'axe des x). Remarquons d'abord que l'on garde la même origine de l'espace-temps, c'est-à-dire que l'évènement correspondant à la production de B garde les coordonnées spatio-temporelles $(t, x) = (0, 0)$. Ensuite, on sait que B disparaît à $x = -L$ et $t = \tau$. Par transformation de Lorentz et en utilisant les équations (20) et (22), et on obtient

$$\tau' = \gamma\left(\tau + \frac{vL}{c}\right) = \tau_0 \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \tau_0 \frac{13^2 + 12^2}{13^2 - 12^2} = \tau_0 \frac{313}{25} > \tau_0. \tag{28}$$

L'équivalence entre ces deux approches, éqs. (27) et (28), peut être montrée en remplaçant u par son expression en (26) dans (27),

$$\tau' = \tau_0 \left[1 - \frac{4v^2/c^2}{(1 + v^2/c^2)^2}\right]^{-1/2} = \tau_0 \left[\frac{(1 - v^2/c^2)^2}{(1 + v^2/c^2)^2}\right]^{-1/2} = \tau_0 \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}. \tag{29}$$

4 Simultanéité

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, deux événements 1 et 2 ont lieu en $(x_1, t_1) = (x_0, x_0/c)$ et $(x_2, t_2) = (2x_0, x_0/(2c))$. Quelle est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel les deux événements ont lieu simultanément ? Déterminer l'instant correspondant.

La correspondance entre les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_j' \\ t_j' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x_j - \beta c t_j \\ t_j - \beta x_j / c \end{pmatrix}, \tag{30}$$

où $j = 1, 2$, $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. On veut que les deux événements soient simultanés dans $\mathcal{R}'$, ce qui signifie que $t_1' = t_2'$. Ainsi,

$$\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2} \implies v = -\frac{c}{2}. \tag{31}$$

Le fait que $v < 0$ signifie que le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace dans le sens négatif le long de l'axe x du référentiel $\mathcal{R}$. L'instant cherché est

$$t_1' = t_2' = \sqrt{3}\frac{x_0}{c}. \tag{32}$$

5 Invariance des équations de Maxwell (partie 2)

On aborde la seconde partie du problème débuté en série 10, exercice 1.

À titre de rappel, on désire déterminer quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'alembertien $\Box = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, on a montré que l'équation d'onde n'est pas invariante sous les transformations de Galilée et donc que les transformations galiléennes ne sont pas adaptées pour l'électromagnétisme. Ci-dessous, on dérive la transformation cherchée et on l'identifie aux transformations de Lorentz.

Par convention, on choisit d'exprimer les coordonnées spatio-temporelles à l'aide des quadrivecteurs suivants, $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)^T = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ et on écrit l'opérateur d'alembertien $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \nabla^2$.

(c) Exprimer l'opérateur $\Box$ sous forme matricielle. Plus précisément, on demande d'exprimer $\Box$ à l'aide de l'opérateur $\mathbf{D} = (\partial_{x_0}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^T$ et d'une matrice diagonale $\boldsymbol{G}$ qu'il faudra préciser.

Afin d'obtenir un opérateur de forme d'alembertienne $\Box$, il faut donc multiplier $\mathbf{D}^T\boldsymbol{G}\mathbf{D}$ où $\boldsymbol{G}$ est une matrice qu'il faut définir. Si $\boldsymbol{G}$ était la matrice identité, on obtiendrait alors un laplacien généralisé $D^2 = \sum_{i=0}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$. Pour obtenir le changement de signe sur les dérivées secondes spatiales observé dans l'opérateur d'alembertien, il faut introduire une matrice $\boldsymbol{G}$, appelée « métrique de Minkowski », dont l'expression est donnée par :

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

et l'opérateur $\Box$ s'écrit donc :

$$\Box = \mathbf{D}^T\boldsymbol{G}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \partial_{x_0} & \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_0} \\ \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} = \partial_{x_0}^2 - \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2. \tag{34}$$

(d) Soit une matrice $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ décrivant le changement de coordonnées $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}$. Démontrer que celle-ci doit satisfaire la relation

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda} \tag{$*$}$$

pour que l'équation d'onde soit invariante pour cette transformation.

Le but de cette partie est de trouver quelles relations doivent satisfaire les matrices de transformation $\boldsymbol{\Lambda}$ afin que l'opérateur $\Box = \mathbf{D}^T \boldsymbol{G} \mathbf{D}$ soit invariant pour ce type de transformation. On cherche à exprimer l'opérateur $\mathbf{D}$ par rapport aux coordonnées du référentiel $\mathcal{R}'$. On développe $\mathbf{D} = \boldsymbol{J}\mathbf{D}'$, où la matrice $\boldsymbol{J}$ est la matrice jacobienne associée à la transformation, donnée par :

$$\boldsymbol{J} = \{\partial x_i'/\partial x_j\}_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \tag{35}$$

Sachant que $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}$, on constate que $\boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}$ dans le cas des transformations linéaires. Par conséquent, l'opérateur $\mathbf{D}$ transforme comme :

$$\mathbf{D}' = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{D}. \tag{36}$$

En utilisant les résultats trouvés en (34) et (36), il est possible d'écrire $\Box'$

$$\Box' = \mathbf{D}'^T \boldsymbol{G} \mathbf{D}' = (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{D})^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{D}) = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{G} \mathbf{D} = \Box\,. \tag{37}$$

Par conséquent, en imposant que $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda}$, on obtient que $\Box' = \Box$. Ceci permet à l'équation d'onde d'être invariante si l'on suppose que $\mathbf{E}' = \boldsymbol{P}(\delta)\mathbf{E}$ comme vu au point (b).

(e) Soit la matrice

$$\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta) = \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & -\beta\gamma & \multirow{2}{*}{$\mathbf{0}_2$} \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}_2} & \boldsymbol{I}_2 \end{array}\right),$$

avec $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Montrer que $\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)$ correspond à une transformation de Lorentz entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Vérifier que $\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)$ satisfait la relation ($*$).

La matrice $\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)$ est associée à un changement de coordonnées entre les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ introduits en série 10. Pour rappel, le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace selon $\mathbf{e}_x$ avec une vitesse relative $v = \beta c$ par rapport à $\mathcal{R}$. On développe

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma x_0 - \beta\gamma x_1 \\ \gamma x_1 - \beta\gamma x_0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - \beta x/c) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{38}$$

ce qui correspond bien à une transformation de Lorentz le long de l'axe des x. Bien entendu, on peut également écrire les matrices associées à une transformation similaire le long des axes y et z,

$$\boldsymbol{\Lambda}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda}_z(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Ensuite, on vérifie que le changement de coordonnées donné par $\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)$ satisfait bien la relation ($*$). Par calcul direct, on obtient que :

$$\boldsymbol{\Lambda}_x(\beta)^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\Lambda}_x(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}, \tag{40}$$

où on a utilisé le fait que $\gamma^2(1-\beta^2)=1$, ce qui conclut la démonstration.

challenge

(f) Démontrer que les matrices $\mathbf{\Lambda}$ satisfaisant $(*)$ forment un groupe. Montrer que les rotations spatiales appartiennent également à ce groupe.

On commence par montrer que les matrices $\mathbf{\Lambda}$ forment un groupe. L'associativité découle du fait que les matrices carrées forment une algèbre et n'est pas à prouver. Il faut donc prouver la loi de composition interne, l'existence de l'élément neutre et l'existence de l'inverse :

$$\begin{aligned}
\text{Composition interne :}\quad & (\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)^T\boldsymbol{G}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{\Lambda}_2)=\mathbf{\Lambda}_2^T(\mathbf{\Lambda}_1^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda}_1)\mathbf{\Lambda}_2=\mathbf{\Lambda}_2^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda}_2=\boldsymbol{G}, && (41)\\
\text{Élément neutre :}\quad & \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G},\ \text{donc } \boldsymbol{I} \text{ appartient au groupe}, && (42)\\
\text{Inverse :}\quad & (\mathbf{\Lambda}^{-1})^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda}^{-1}=(\mathbf{\Lambda}^{-1})^T(\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Lambda}^{-1}=\boldsymbol{G}, \text{ donc si } \mathbf{\Lambda} && (43)\\
& \text{appartient au groupe, alors } \mathbf{\Lambda}^{-1} \text{ également.}
\end{aligned}$$

On en conclut que les matrices $\mathbf{\Lambda}$ forment effectivement un groupe.

Les matrices $\mathbf{\Lambda}$ satisfaisant la relation $(*)$ appartiennent au groupe $O(1,3)$, où $(1,3)$ est la « signature » de la métrique $\boldsymbol{G}$, parfois aussi notée $(3,1)$ ou encore $(-+++)$. Si $\boldsymbol{G}$ avait été la matrice identité, alors la relation deviendrait $\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{\Lambda}=\boldsymbol{I}$ et correspondrait aux matrices dites « orthogonales », dont le groupe est $O(3)$.

Les matrices de Lorentz, plus spécifiquement, appartiennent à un sous-groupe de $O(1,3)$, appelé « groupe orthogonal spécial orthochrone » $SO(1,3)^+$. Ce groupe contient les matrices satisfaisant également $\det(\mathbf{\Lambda})=1$ et $\Lambda_{00}\geq 1$. On remarque que les matrices de translation $\mathbf{\Lambda}_i(\beta)$, définies à la question (e), appartiennent au groupe $SO(1,3)^+$.

Les matrices de rotations spatiales peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_x(\theta)]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\qquad \mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_y(\theta)]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_z(\theta)]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{44}$$

où la notation $\boldsymbol{R}_i(\theta)$ fait référence aux matrices de rotation en trois dimensions, appartenant au groupe spécial orthogonal dans $\mathbb{R}^{3\times3}$, noté $SO(3)$. Ce groupe réunit toutes les matrices $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ telles que $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ avec $\det\boldsymbol{R}=1$. Les matrices ci-dessus sont par blocs et satisfont la relation $\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda}=\boldsymbol{G}$. On peut le vérifier pour la première matrice de rotation :

$$\mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_x(\theta)]^T\boldsymbol{G}\mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_x(\theta)]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-\cos^2\theta-\sin^2\theta&0\\0&0&0&-\cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}=\boldsymbol{G}.\tag{45}$$

On en conclut que les rotations spatiales sont des transformations qui laissent également les équations de Maxwell invariantes. On note que les matrices de rotation $\mathbf{\Lambda}[\boldsymbol{R}_i(\theta)]$, comme les matrices de translation $\mathbf{\Lambda}_i(\beta)$, appartiennent au groupe $SO(1,3)^+$.