

2 mai 2025

## Corrigé 9 : Polarisation, réflexion et réfraction

### 1 Action d'une lame de quartz sur une onde polarisée rectiligne

On considère une lame de quartz d'épaisseur  $d$  et parallèle au plan  $Oxy$  et une onde électromagnétique polarisée rectiligne incidente de longueur  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  se propageant dans la direction  $z$  et dont l'axe de polarisation fait un angle  $\alpha_p$  avec l'axe  $x$ . La lame de quartz est un matériau biréfringent dont le tenseur diélectrique s'écrit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}.$$

On supposera que le quartz n'est pas aimanté, c.-à-d.  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$  dans le quartz.

- (a) Montrer que, dans le quartz, les nombres d'onde d'une onde polarisée rectiligne selon les axes ordinaire  $\mathbf{k}_o = k_{o,z} \mathbf{e}_z$  et extraordinaire  $\mathbf{k}_e = k_{e,z} \mathbf{e}_z$  de la lame sont donnés par

$$k_{o,z}^2 = n_o^2 k_0^2 \quad \text{et} \quad k_{e,z}^2 = n_e^2 k_0^2,$$

où on dénote respectivement  $n_o = \sqrt{\epsilon_x/\epsilon_0}$  et  $n_e = \sqrt{\epsilon_y/\epsilon_0}$ , les indices de réfraction selon les axes ordinaire et extraordinaire.

On part des équations de Maxwell dans lesquelles on impose une densité de charge et un courant électrique libres nuls,  $\rho_f = \mathbf{J}_f = 0$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

On suppose que tous ces champs sont assimilables à des ondes planes. Par exemple, pour le champ électrique,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ , avec  $\mathbf{E}_0$  un vecteur d'amplitude constant. Par substitution de cette forme dans les équations de Maxwell, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega \mu_0 \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

En rappelant que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , on peut écrire une équation uniquement en termes de  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (3)$$

En développant  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}$  et en rappelant que les champs se propagent le long de l'axe  $z$ , c.-à-d.  $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$ , on obtient une équation matricielle similaire à celle trouvée en cours :

$$k_z^2 E_z \mathbf{e}_z - k^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha_x - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y - k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

où  $\alpha_x = \omega^2 \mu_0 \epsilon_x$ ,  $\alpha_y = \omega^2 \mu_0 \epsilon_y$  et  $\alpha_0 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \omega^2/c^2$ . On remarque, d'une part, que ce système linéaire impose  $\alpha_0 E_z = 0$  selon  $z$  et qu'il n'y aura donc pas de composante du champ électrique selon  $z$  à l'intérieur du quartz,  $E_z = 0$ . D'autre part, on constate que les équations restantes selon  $x$  et  $y$  ne peuvent pas être satisfaites simultanément si  $\epsilon_x \neq \epsilon_y$ . En effet, pour la composante  $x$ , le nombre d'onde  $k_z$  satisfait l'équation suivante :

$$k_z^2 = \alpha_x = \frac{\epsilon_x \omega^2}{\epsilon_0 c^2} = n_o^2 k_0^2, \quad (5)$$

avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  le nombre d'onde de l'onde incidente se propageant dans le vide. La composante  $y$  imposera, quant à elle,

$$k_z^2 = n_e^2 k_0^2. \quad (6)$$

Cette inconsistance apparente laisse transparaître que les composantes ordinaire et extraordinaire du champ électrique se propagent à des vitesses différentes à l'intérieur du quartz. Afin de lever l'inconsistance, il est en effet nécessaire de poser

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_e = E_{0,o} e^{i(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{e}_x + E_{0,e} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{e}_y, \quad (7)$$

où  $\mathbf{E}_o$  et  $\mathbf{E}_e$  satisfont chacun la relation (4) séparément. Naturellement,  $E_0 = E_{0,o} = E_{0,e}$  en considérant les conditions aux bords à l'entrée de la lame. On obtient évidemment que  $\mathbf{k}_o = k_{o,z} \mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{k}_e = k_{e,z} \mathbf{e}_z$  avec

$$k_{o,z}^2 = n_o^2 k_0^2 \quad \text{et} \quad k_{e,z}^2 = n_e^2 k_0^2. \quad (8)$$

Cette différence de vitesses de propagation à travers le quartz va donc induire un déphasage entre les deux composantes du champ électrique.

(b) Montrer que le champ électrique  $\mathbf{E}$  à la sortie de la lame est en général polarisé elliptique,

$$\frac{E_x^2}{E^2 \cos^2 \alpha_p} + \frac{E_y^2}{E^2 \sin^2 \alpha_p} - \frac{2E_x E_y \cos \phi}{E^2 \cos \alpha_p \sin \alpha_p} = \sin^2 \phi, \quad (*)$$

où  $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_e - n_o)d$ ,  $E_x$  et  $E_y$  sont les composantes du champ électrique selon les axes  $x$  et  $y$ , et  $E = \|\mathbf{E}\|$ . Quelle quantité physique  $\phi$  représente-t-elle ?

On commence par exprimer le champ électrique incident sur la lame de quartz,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E(\cos \alpha_p \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p \mathbf{e}_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (9)$$

avec  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{e}_z$ . Lorsque cette onde plane atteint et pénètre dans le quartz, la composante parallèle à l'interface vide-quartz doit être continue, c'est-à-dire que  $\mathbf{E}_{1,\parallel} = \mathbf{E}_{2,\parallel}$  (voir, par exemple, série 7, exercice 3). Donc, dans ce cas particulier, l'entière de l'onde incidente est transmise. En posant  $\mathbf{x} = 0$  à l'entrée de la lame de quartz, on obtient donc l'expression suivante pour le champ électrique à l'entrée de la lame :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x} = 0, t) = E(\cos \alpha_p \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

En utilisant le résultat trouvé au point (a), le champ électrique doit être décomposé en une composante ordinaire,  $\mathbf{E}_o$ , et extraordinaire,  $\mathbf{E}_e$ , qui se propageront respectivement avec  $k_{z,o} = n_o k_0$  et  $k_{z,e} = n_e k_0$ . Par conséquent, sachant que la composante ordinaire  $\mathbf{E}_o$  correspond à la composante  $x$  du champ électrique et la composante extraordinaire à la composante  $y$ , le champ électrique dans la lame de quartz peut s'écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_o(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_e(\mathbf{x}, t) = E(\cos \alpha_p e^{ik_0(n_o z - ct)} \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p e^{ik_0(n_e z - ct)} \mathbf{e}_y). \quad (11)$$

Le champ électrique  $\mathbf{E}$  à la sortie de la lame de quartz, à  $\mathbf{x} = d \mathbf{e}_z$ , s'écrit

$$\mathbf{E}(d \mathbf{e}_z, t) = E(\cos \alpha_p e^{ik_0(n_o d - ct)} \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p e^{ik_0(n_e d - ct)} \mathbf{e}_y). \quad (12)$$

Comme précédemment établi au point (a), on voit donc que les composantes  $x$  et  $y$  de l'onde après avoir traversé la lame sont déphasées. On peut mettre en évidence ce déphasage

en réécrivant l'équation (12) dans laquelle on effectue une translation temporelle suivante,  $t \mapsto t + (n_o + n_e)d/(2c)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(d \mathbf{e}_z, t) &= E(\cos \alpha_p e^{i[k_0(n_o - n_e)d/2 - \omega t]} \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p e^{i[k_0(n_e - n_o)d/2 - \omega t]} \mathbf{e}_y) = \dots \\ &\dots = E(\cos \alpha_p e^{i(-\phi/2 - \omega t)} \mathbf{e}_x + \sin \alpha_p e^{i(\phi/2 - \omega t)} \mathbf{e}_y), \end{aligned} \quad (13)$$

où on a posé  $\phi = k_0(n_e - n_o)d = (2\pi/\lambda_0)(n_e - n_o)d$  qui est donc le déphasage entre les composantes  $x$  et  $y$ . En prenant la partie réelle de l'équation (13), on obtient

$$\mathbf{E}_x = E_x \mathbf{e}_x = E \cos \alpha_p \cos(\omega t - \phi/2) \mathbf{e}_x, \quad (14)$$

$$\mathbf{E}_y = E_y \mathbf{e}_y = E \sin \alpha_p \cos(\omega t + \phi/2) \mathbf{e}_y. \quad (15)$$

En injectant ces expressions pour  $E_x$  et  $E_y$  dans l'équation de l'ellipse à démontrer, éq. (\*), on obtient, au prix d'un peu d'algèbre,

$$\cos^2\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) + \cos^2\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) - 2 \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \cos \phi = \quad (16)$$

$$= \left[ \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \right]^2 + 2 \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) (1 - \cos \phi) \quad (17)$$

$$= 4 \sin^2(\omega t) \sin^2 \frac{\phi}{2} + 2 \left[ \cos^2(\omega t) \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2(\omega t) \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] (1 - \cos \phi) \quad (18)$$

$$= 2 \sin^2(\omega t) (1 - \cos \phi) + [\cos^2(\omega t) (1 + \cos \phi) - \sin^2(\omega t) (1 - \cos \phi)] (1 - \cos \phi) \quad (19)$$

$$= 2 \sin^2(\omega t) (1 - \cos \phi) + \cos^2(\omega t) (1 - \cos^2 \phi) - \sin^2(\omega t) (1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi) \quad (20)$$

$$= 1 - \cos^2 \phi = \sin^2 \phi, \quad (21)$$

où on a utilisé les relations trigonométriques suivantes,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha), \quad (22)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha). \quad (23)$$

L'égalité (\*) étant vérifiée, ceci montre donc que, en général, le champ électrique sortant est polarisé elliptiquement.

- (c) Discuter les cas où  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi$ , et  $\phi = \pm\pi/2$ . Comparer ces résultats avec ceux trouvés en série 8, exercice 1, question (e).

Lorsque  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ , l'équation de l'ellipse se réduit à

$$\frac{E_x^2}{E \cos^2 \alpha_p} + \frac{E_y^2}{E \sin^2 \alpha_p} \mp \frac{2E_x E_y}{E^2 \cos \alpha_p \sin \alpha_p} = 0, \quad (24)$$

ce qui peut être factorisé en

$$\left( \frac{E_x}{\cos \alpha_p} \mp \frac{E_y}{\sin \alpha_p} \right)^2 = 0. \quad (25)$$

Cette dernière équation impose une relation linéaire entre  $E_x$  et  $E_y$  :

$$E_y = \pm \tan \alpha_p E_x. \quad (26)$$

De ce résultat, on déduit que l'onde sortante de la lame de quartz est une onde polarisée rectiligne. Si  $\phi = 0$ , l'onde sortante est polarisée parallèlement à l'onde entrante. Dans le cas où  $\phi = \pi$ , la polarisation de l'onde sortante est alors symétrique à l'onde entrante

par rapport à l'axe  $x$ , auquel cas la lame de quartz se comporte donc comme une lame demi-onde  $Q_\pi$  étudiée dans la série 8, exercice 1, question (e).

Lorsque  $\phi = \pm\pi/2$ , l'équation de l'ellipse s'écrit

$$\frac{E_x^2}{E^2 \cos^2 \alpha_p} + \frac{E_y^2}{E^2 \sin^2 \alpha_p} = 1. \quad (27)$$

Il s'agit donc de l'équation d'une ellipse dont les deux axes correspondent aux axes  $x$  et  $y$ , ce qui n'était pas forcément le cas de l'équation générale démontrée en (b). La polarisation de l'onde sortante est donc elliptique. Dans le cas spécifique où  $\alpha_p = \pi/4$ , on a alors

$$\frac{E_x^2}{E^2/2} + \frac{E_y^2}{E^2/2} = 1, \quad (28)$$

et la polarisation de l'onde sortante est donc circulaire de norme  $E/\sqrt{2}$ . La lame de quartz se comporte donc comme une lame quart d'onde  $Q_{\pi/4}$ , étudiée série 8, exercice 1, question (e).

## 2 Filtre de Lyot

On propose une application pratique des résultats de l'exercice 1. Un filtre de Lyot est un système composé d'une lame de quartz placée entre deux polariseurs rectilignes. La lame de quartz est identique à celle de l'exercice 1 : son axe ordinaire est parallèle à  $\mathbf{e}_x$  et son axe extraordinaire à  $\mathbf{e}_y$ . Les deux polariseurs rectilignes sont inclinés tel que leurs axes de polarisation fassent un angle de  $\pi/4$  par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_x$ . On considère une onde électromagnétique plane, incidente sur le filtre de Lyot, de longueur d'onde  $\lambda_0$ , polarisée rectiligne selon  $\mathbf{e}_x$  et se propageant dans la direction  $z$ .

- (a) Exprimer l'amplitude et l'intensité du champ électrique de l'onde transmise par le filtre en fonction de  $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_e - n_o)d$ , où  $d$  est l'épaisseur de la lame, et  $n_o$  et  $n_e$  sont les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire. En déduire un coefficient de transmission pour l'amplitude du champ électrique,  $t = E_{\text{sortie}}/E_{\text{entrée}}$ . Définir  $t$  en tenant uniquement compte du quartz et du dernier polariseur, c.-à-d. en ignorant l'effet du premier polariseur.

Le champ électrique incident sur le premier polariseur est donné par

$$\mathbf{E}_0(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

On remarque que la notation en vecteur colonne se réfère au vecteur de Jones de l'onde incidente, voir série 8, exercice 1. On note, respectivement,  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{E}_3$  l'onde après avoir traversé le premier polariseur  $P(\pi/4)$ , la lame de quartz et le deuxième polariseur  $P(\pi/4)$ . On rappelle que la matrice des polariseurs s'écrit

$$P(\pi/4) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

et le vecteur d'onde  $\mathbf{E}_1$  est donc donné par

$$\mathbf{E}_1 = P(\pi/4) \mathbf{E}_0 = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{E'}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

où  $E' = E/\sqrt{2}$  est l'amplitude de l'onde après le premier polariseur.

La lame de quartz décrite dans la consigne correspond à celle étudiée dans l'exercice 1, et on peut par conséquent répéter le raisonnement qui y est présenté. On y a conclu que le

quartz se comportait comme une lame à retard. Par inspection de l'équation (13), on lui associe donc la matrice de Jones suivante,

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

ce qui permet donc de calculer le champ électrique  $\mathbf{E}_2$  après avoir traversé la lame de quartz,

$$\mathbf{E}_2 = Q_\phi \mathbf{E}_1 = \frac{E'}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Finalement, la traversée du dernier polariseur, de manière similaire à l'éq. (31), donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 = P(\pi/4) \mathbf{E}_2 &= \frac{E'}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = \dots \\ &\dots = E' \frac{e^{-i\phi/2} + e^{i\phi/2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E' \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (34)$$

c'est-à-dire, sans notation de Jones,

$$\mathbf{E}_3(z_3, t) = E' \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{-i\omega t} \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad (35)$$

avec la position  $z_3 = d$  située derrière le dernier polariseur. Le coefficient de transmission, donné par  $t = E_3/E_1$ , satisfait donc

$$|t| = \left| \cos \frac{\phi}{2} \right|. \quad (36)$$

L'intensité de l'onde sortante est donnée par  $I_3 = \mathbf{E}_3^* \cdot \mathbf{E}_3$ . On appelle  $I_1 = E'^2$  qui correspond à l'intensité de l'onde après le premier polariseur. On a donc

$$I_3 = \mathbf{E}_3^* \cdot \mathbf{E}_3 = I_1 |t|^2 = I_1 \frac{1 + \cos \phi}{2}. \quad (37)$$

- (b) On empile  $N$  filtres de Lyot avec des lames de quartz d'épaisseurs  $d_n = 2^{n-1}d$ ,  $n = 1, \dots, N$ . En négligeant l'absorption des lames, démontrer que le coefficient de transmission total du système  $t$  est donné par :

$$|t| = \left| \frac{\sin(2^{N-1}\phi)}{2^N \sin(\phi/2)} \right|. \quad (\dagger)$$

Le coefficient de transmission pour le  $n^e$  système s'écrit

$$t_n = \cos\left(\frac{2^{n-1}\phi}{2}\right) = \cos(2^{n-2}\phi). \quad (38)$$

Par conséquent, le coefficient de transmission total du système entier s'écrit

$$t = \prod_{n=1}^N t_n = \cos(\phi/2) \cos(\phi) \cos(2\phi) \dots \cos(2^{N-2}\phi). \quad (39)$$

On note en particulier qu'entre deux plaques de quartz, deux polariseurs se retrouvent montés en série. On peut traiter ce bloc de deux polariseurs comme un seul et unique

élément optique. En effet, l'onde reçue par le second polariseur est polarisée parallèlement à l'axe principal du premier polariseur (et donc aussi du second), et celle-ci est donc intégralement transmise. Pour montrer que le coefficient de transmission (39) correspond à celui de l'énoncé, on procède par récurrence. On vérifie d'abord que, pour le cas  $N = 1$ , on ait bien une correspondance entre ce coefficient de transmission et celui proposé par l'énoncé (†) :

$$t_1 = \cos \frac{\phi}{2} = \frac{e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}}{2} \frac{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \frac{i}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{\sin \phi}{2 \sin(\phi/2)}, \quad (40)$$

dont la valeur absolue correspond effectivement à l'expression (†) de l'énoncé pour  $N = 1$ . On démontre désormais la récurrence. On suppose que pour  $N$  systèmes, le coefficient de transmission est donné par l'expression de la consigne. Alors pour  $N + 1$  systèmes, on a

$$\begin{aligned} t_{N+1} &= t_N \cos(2^{N-1}\phi) = \frac{\sin(2^{N-1}\phi)}{2^N \sin(\phi/2)} \cos(2^{N-1}\phi) = \dots \\ &= \frac{1}{2^N \sin(\phi/2)} \frac{e^{2^{N-1}i\phi} - e^{-2^{N-1}i\phi}}{2i} \frac{e^{2^{N-1}i\phi} + e^{-2^{N-1}i\phi}}{2} = \dots \\ &= \frac{1}{2^{N+1} \sin(\phi/2)} \frac{e^{2^N i\phi} - e^{-2^N i\phi}}{2i} = \frac{\sin(2^N \phi)}{2^{N+1} \sin(\phi/2)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Le module de l'expression ci-dessus correspond donc au coefficient de transmission (†) pour  $N + 1$  systèmes, ce qui conclut la preuve.

Une preuve directe est également possible et proposée ci-dessous. Le cosinus dans l'équation (39) est remplacé par sa forme exponentielle afin d'obtenir

$$t = \prod_{n=1}^N \cos(2^{n-2}\phi) = \prod_{n=0}^{N-1} \cos(2^{n-1}\phi) = \frac{1}{2^N} \left[ \prod_{n=0}^{N-1} e^{-2^{n-1}i\phi} \right] \left[ \prod_{n=0}^{N-1} (1 + e^{2^n i\phi}) \right]. \quad (42)$$

On réarrange le premier produit en une série géométrique,

$$\prod_{n=0}^{N-1} e^{-2^{n-1}i\phi} = \exp \left[ -\frac{i\phi}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 2^n \right] = \exp \left[ -\frac{i\phi}{2} \cdot \frac{1 - 2^N}{1 - 2} \right] = \frac{e^{i\phi/2}}{e^{2^{N-1}i\phi}}. \quad (43)$$

On évalue désormais le second produit de l'équation (42), pour lequel on utilise l'expression algébrique suivante,

$$\prod_{n=1}^N (1 + x_n) = 1 + \sum_{n=1}^N x_n + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n < m}}^N x_n x_m + \sum_{\substack{n,m,p=1 \\ n < m < p}}^N x_n x_m x_p + \dots + \prod_{n=1}^N x_n. \quad (44)$$

En remplaçant  $x_n = e^{2^{n-1}i\phi}$ , on obtient

$$\prod_{n=1}^N (1 + x_n) = e^{0i\phi} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{2^n i\phi} + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n < m}}^{N-1} e^{(2^n + 2^m)i\phi} + \dots + \exp \left[ \sum_{n=0}^{N-1} 2^n i\phi \right]. \quad (45)$$

L'expression ci-dessus correspond donc à une somme de termes exponentiels  $e^{in\phi}$ , dont les indices  $n$  sont donnés par les intervalles d'entier couverts par les limites des différentes sommes. Le premier terme, commun pour tout  $N$ , correspond à l'élément  $n = 0$ . Le second terme inclut toutes les puissances de 2 jusqu'à  $2^{N-1}$ . Le troisième terme inclut la somme de deux puissances de 2,  $2^n + 2^m$  pour  $n < m$ , et ainsi de suite. Si l'on considère l'ensemble

des sommes, on peut en fait remarquer que tous les entiers entre 0 et  $2^N - 1$  apparaîtront. Il est plus simple d'arriver à ce constat si l'on adopte une représentation binaire pour les puissances de 2. Prenons le cas simple où  $N = 3$ , le produit donné en (45) s'écrit explicitement comme suit :

$$\prod_{n=1}^3 (1 + x_n) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3. \quad (46)$$

En remplaçant les valeurs de  $x_n = e^{2^{n-1}i\phi}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , chaque terme peut être explicité :

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2^0 i\phi}, & x_2 &= e^{2^1 i\phi}, & x_3 &= e^{2^2 i\phi}, \\ x_1x_2 &= e^{(2^0+2^2)i\phi}, & x_1x_3 &= e^{(2^0+2^2)i\phi}, & x_2x_3 &= e^{(2^1+2^2)i\phi}, \\ x_1x_2x_3 &= e^{(2^0+2^1+2^2)i\phi}. \end{aligned} \quad (47)$$

Chaque terme est associé à une représentation binaire à 3 chiffres :

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{(001)_2 i\phi}, & x_2 &= e^{(010)_2 i\phi}, & x_3 &= e^{(100)_2 i\phi}, \\ x_1x_2 &= e^{(011)_2 i\phi}, & x_1x_3 &= e^{(101)_2 i\phi}, & x_2x_3 &= e^{(110)_2 i\phi}, \\ x_1x_2x_3 &= e^{(111)_2 i\phi}, \end{aligned} \quad (48)$$

où la notation  $(\cdot)_2$  dénote un nombre en notation binaire. On note que le terme  $(000)_2$  est également inclus dans l'expression (46) puisque  $1 = e^{(000)_2 i\phi}$ . Le produit (44) devient donc la somme de toutes les exponentielles entre 1 jusqu'à  $e^{(2^N-1)i\phi}$ . On obtient donc la série géométrique suivante,

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} e^{in\phi} = \frac{e^{2^N i\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{e^{2^N i\phi} \sin(2^{N-1}\phi)}{e^{i\phi/2} \sin(\phi/2)}. \quad (49)$$

Afin de conclure, on substitue les résultats des développements (43) et (49) dans l'équation (42),

$$t = \frac{1}{2^N} \frac{e^{i\phi/2}}{e^{2^N i\phi}} \frac{e^{2^N i\phi} \sin(2^{N-1}\phi)}{e^{i\phi/2} \sin(\phi/2)} = \frac{\sin(2^{N-1}\phi)}{2^N \sin(\phi/2)}, \quad (50)$$

et on retrouve ainsi l'expression (†) proposée en énoncé.

- (c) Étudier le comportement du coefficient de transmission (†) en fonction du nombre de filtre  $N$  et montrer qu'un empilement de filtres de Lyot agit comme un filtre passe-bande étroit. Un tel type de filtre privilégie la transmission d'une fréquence spécifique et atténue le reste du spectre.

On inspecte graphiquement l'effet d'un filtre de Lyot à plusieurs plaques à la figure 1 en y représentant l'intensité transmise  $|t_N|^2$ , éq. (†), pour différentes valeurs de  $N$ . L'intensité transmise est étudiée en fonction du déphasage  $\phi$  et de la longueur d'onde incidente  $\lambda$ . On a notamment choisi  $d = 2$  mm,  $n_o = 1.544$  et  $n_e = 1.553$ . Lorsque plusieurs filtres,  $N > 1$ , sont montés en série, le système agit tel un filtre passe-bande étroit : plusieurs pics se forment et privilégient la transmission de certaines fréquences par rapport au reste du spectre. On qualifie le filtre d'« étroit » puisque la largeur d'un pic de transmission est nettement inférieure à la distance séparant deux pics de transmission.

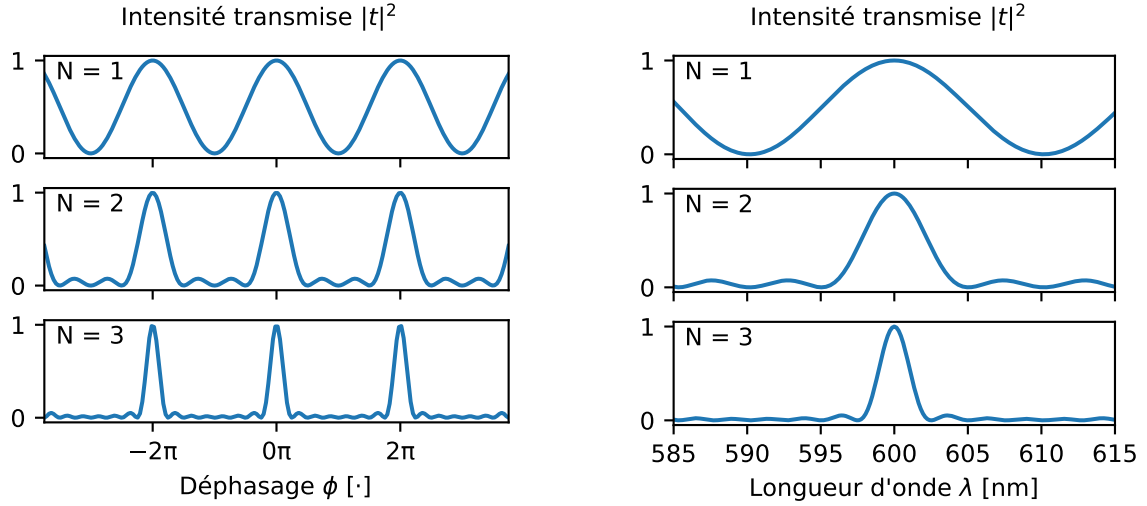
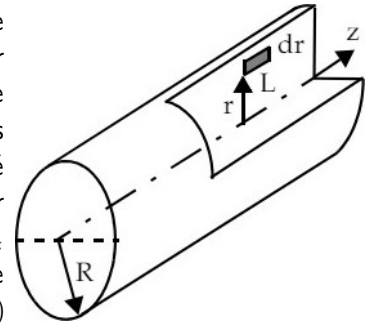


Figure 1

### 3 Effet de peau

La répartition d'un courant alternatif dans un conducteur n'est pas uniforme. Le courant alternatif génère un champ magnétique variable dans le temps, qui engendre lui-même un champ électrique et, par conséquent, un courant induit. Ce courant induit modifie le profil de courant total : on observe une densité de courant plus importante dans la périphérie d'un conducteur qu'en son centre. Cet effet est appelé « effet de peau ». On étudie ce phénomène dans le cas d'un conducteur non aimanté, de conductivité  $\sigma$ , cylindrique de rayon  $R$  et d'axe  $\mathbf{e}_z$  parallèle au courant alternatif principal. On note  $\mathbf{e}_r$  le vecteur unitaire dans la direction radiale et on choisit  $\mathbf{e}_\phi$  tel que la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$  soit droite.



- (a) Déterminer le champ magnétique  $\mathbf{H}(r, t)$  induit par un courant  $\mathbf{J}(r, t) = J(r, t) \mathbf{e}_z$  traversant une section circulaire  $\Sigma$ , normale à  $\mathbf{e}_z$ , de rayon  $r$  du cylindre.

Le courant circulant dans un cylindre de rayon  $r$  peut être décrit par la somme des densités de courant  $\mathbf{J}(r', t) = J(r', t) \mathbf{e}_z$  circulant dans des couronnes cylindriques situées en  $r' < r$  et d'épaisseurs  $dr'$ . Par conséquent, le champ magnétique  $\mathbf{H}(r, t) = H(r, t) \mathbf{e}_\phi$  est donné par la loi d'Ampère en sommant toutes ces contributions. Soit une section de rayon  $r$  du cylindre,  $\Sigma$ , de périmètre  $\partial\Sigma$ , on note  $d\Sigma = d\Sigma \mathbf{e}_z$  un élément de surface de  $\Sigma$  et on applique le théorème de Stokes,

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\Sigma \approx \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\Sigma, \quad (51)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\Sigma \implies H(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r J(r', t) 2\pi r' dr'. \quad (52)$$

Dans l'équation (51), on a négligé le courant de déplacement  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  puisque la fréquence d'oscillation du champ électrique, c.-à-d. la fréquence du courant alternatif, sera typiquement basse comparée à celle d'ondes électromagnétiques.

- (b) Montrer qu'un courant induit circule sur le périmètre d'une surface rectangulaire  $d\mathbf{S} = L dr \mathbf{e}_\phi$  (en gris foncé sur la figure ci-dessus, avec  $L$  la longueur de la surface selon l'axe  $z$  et  $dr$  sa longueur dans la direction radiale) située à un rayon  $r$ . En déduire qu'un gradient de champ



électrique  $\partial E/\partial r$ , avec  $\mathbf{E}(r, t) = E(r, t) \mathbf{e}_z$ , s'établit tel que

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Le flux de champ d'induction magnétique  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  traversant la surface  $d\mathbf{S} = L dr \mathbf{e}_\phi$  dépend du temps et génère donc une force électromotrice  $d\epsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . On intègre la loi de Lenz-Faraday et on applique à nouveau le théorème de Stokes,

$$\int_{dS} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}' = - \int_{dS} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}', \quad (53)$$

$$d\epsilon = \oint_{\text{ADCB}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = - \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} L dr. \quad (54)$$

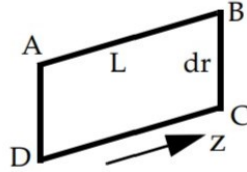
On remarque que pour la surface  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_\phi$  choisie, le théorème de Stokes est appliqué sur le bord selon l'orientation  $\partial d\mathbf{S} = \text{ADCB}$ . Puisque  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z$ , la tension induite peut s'écrire

$$d\epsilon = [E(r) - E(r + dr)]L \approx - \frac{\partial E}{\partial r} L dr. \quad (55)$$

À partir des équations (54) et (55), c'est-à-dire en appliquant la loi de Lenz-Faraday, il est possible d'exprimer  $\partial E/\partial r$  en fonction de  $\partial H/\partial t$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (56)$$

ce qui indique donc qu'une augmentation de  $B$  dans le temps implique que  $d\epsilon < 0$  et vice-versa.



- (c) En supposant un courant alternatif de pulsation  $\omega$  et que le champ électrique prend la forme  $E(r, t) = E(r)e^{-i\omega t}$ , montrer que la distribution radiale du champ électrique  $E(r)$  satisfait

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + i\mu_0 \sigma \omega E = 0, \quad \text{où } \frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega. \quad (\ddagger)$$

En substituant l'expression de  $H(r, t)$  trouvée en (52) dans l'équation (56), on peut exprimer le gradient radial de champ électrique à l'aide de la densité de courant  $J(r, t)$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_0^r \frac{\partial J}{\partial t}(r', t) 2\pi r' dr'. \quad (57)$$

En multipliant les deux côtés de l'équation (57) par  $r$  puis en dérivant par  $r$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \frac{\partial E}{\partial r} + r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \mu_0 r \frac{\partial J}{\partial t} = \mu_0 \sigma r \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (58)$$

En divisant par  $r$  et en considérant  $E(r, t) = E(r)e^{-i\omega t}$ , on obtient donc l'équation donnée dans l'énoncé :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + i\mu_0 \sigma \omega E = 0. \quad (59)$$

On remarque que cette équation différentielle correspond à une équation de Bessel, dont la forme générale est donnée par

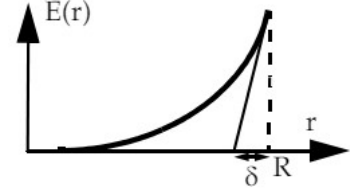
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y = 0. \quad (60)$$

On peut assimiler l'équation (59) à l'équation de Bessel d'ordre  $n = 0$  en choisissant  $y = E$  et  $x = \sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r$ . Le champ électrique s'écrit donc

$$E(r) = AJ_0(\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r) + BY_0(\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r), \quad (61)$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et seconde espèce. À première vue, ce résultat paraît contredire l'observation faite précédemment, éq. (55), que le champ électrique augmente en fonction du rayon. Les fonctions de Bessel  $J_0(x)$  et  $Y_0(x)$  tendent en effet vers zéro pour des arguments  $x \rightarrow \infty$  réels, ce qui pourrait sembler contradictoire puisque l'on cherche à montrer une augmentation de l'amplitude avec le rayon. On souligne ici cependant que les arguments fournis à ces fonctions en (61) ont une partie imaginaire non nulle et, de ce fait, permettent de retrouver le comportement attendu pour  $E$ .

On reconnaît une équation différentielle de Bessel dont la solution sera exprimée en termes de  $J_0(x)$  et  $Y_0(x)$ . Expérimentalement, on observe cependant que, lorsque l'on pénètre dans le conducteur, le champ électrique devient rapidement nul sur une distance caractéristique  $\delta$  (voir figure) que l'on appelle épaisseur de peau. En général, celle-ci est telle que  $\delta \ll R$  ce qui permet d'affirmer, dans l'épaisseur de peau, que



$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r}. \quad (\S)$$

- (d) Vérifier que la solution approchée  $E(r)$ , tenant compte de l'approximation (§), à l'équation (‡), trouvée au point (c), est telle que :

$$E(r, t) = E(r)e^{-i\omega t} = E_0 e^{-\beta(R-r)} e^{i[\beta(R-r) - \omega t]}, \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}.$$

Montrer que  $\beta$  peut être associé à un coefficient d'absorption du champ électrique. En déduire que le courant est plus important en périphérie.

En tenant compte de l'indication, on a que l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + i\mu_0\sigma\omega E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \kappa^2 E = 0. \quad (62)$$

On développe la racine complexe,

$$\kappa = \sqrt{-i\mu_0\sigma\omega} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}(1 - i) = \pm\beta(1 - i). \quad (63)$$

L'équation différentielle (62) peut donc se résoudre par :

$$E(r) = A_+ e^{\beta(1-i)(R-r)} + A_- e^{-\beta(1-i)(R-r)}. \quad (64)$$

On sélectionne uniquement la solution où  $E(r)$  diminue lorsqu'on rentre dans le conducteur, c.-à-d. lorsque  $r$  diminue, et on pose donc  $A_+ = 0$ . Avec  $A = A_-$ , on obtient alors

$$E(r) = A e^{(-1+i)\beta(R-r)} = A e^{-\beta(R-r) + i\beta(R-r)}. \quad (65)$$

Le terme  $\beta$  peut être assimilé à la partie imaginaire de l'indice de réfraction vu en cours. On rappelle

$$\text{Im}(n) = n'' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}}, \quad (66)$$

ce qui permet d'associer  $\beta$  à un coefficient d'absorption,

$$\beta = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0c^2}} = \frac{\omega}{c}n''. \quad (67)$$

Finalement, on substitue l'expression (65) dans l'expression pour  $E(r, t)$ ,

$$E(r, t) = E(r)e^{-i\omega t} = E_0e^{-\beta(R-r)}e^{i[\beta(R-r)-\omega t]}, \quad (68)$$

où on a posé  $A = E_0$ . Le champ électrique dans le conducteur se comporte donc comme une onde se propageant depuis le bord du cylindre vers l'intérieur de celui-ci, dont l'amplitude est absorbée sur une longueur caractéristique  $\delta = 1/\beta$ . Soit l'amplitude du champ électrique  $\xi(r) = E_0e^{-\beta(R-r)}$ , on constate que celle-ci diminue lorsque l'onde pénètre dans le cylindre,  $\xi(r+dr) < \xi(r)$ . Par conséquent, le courant induit (ou pour être précis, l'amplitude du profil de courant électrique induit) est plus important en périphérie, c.-à-d.  $|J_{\text{ind}}(r+dr)| > |J_{\text{ind}}(r)|$ , ce qui conclut la réponse à cette question.

À titre informatif, on vérifie, a posteriori, que l'approximation (§) est justifiée en considérant uniquement l'amplitude du champ électrique,

$$\xi(r) = E_0e^{-(R-r)/\delta}, \quad (69)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{E_0}{r\delta}e^{-(R-r)/\delta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} = \frac{E_0}{\delta^2}e^{-(R-r)/\delta}. \quad (70)$$

Dans la mesure où on s'intéresse principalement à la région proche de la périphérie du conducteur,  $r \sim R$ , le rapport de ces deux termes est effectivement faible,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\right)^{-1} = \frac{\delta}{r} \sim \frac{\delta}{R} \ll 1. \quad (71)$$

On note par contre que pour  $r \rightarrow 0$ , le terme  $(1/r)\partial\xi/\partial r$  diverge et, par conséquent, cette approximation n'est plus valide.