

18 avril 2025

Corrigé 8 : Propriétés de base des ondes électromagnétiques

1 Polarisation et représentation de Jones

Une onde électromagnétique polarisée se propageant dans la direction z s'écrit

$$\mathbf{E} = E_x \cos(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x + E_y \cos(kz - \omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right]. \quad (*)$$

La représentation de Jones est un formalisme vectoriel décrivant les ondes polarisées ainsi que leur évolution à travers un système d'éléments optiques linéaires. Dans ce formalisme, l'onde (*) est représentée par le vecteur de Jones, $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^2$, suivant :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

Au début d'un calcul, il est courant de normaliser le vecteur de Jones d'une onde incidente entrant dans un système optique à un vecteur unitaire, $E_x^2 + E_y^2 = 1$. Dans ce formalisme, un polariseur est représenté par une matrice de Jones, $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, opérant sur le vecteur de Jones de l'onde incidente. On remarque que cette description est analogue à celle d'un système quantique à deux niveaux (on pourrait adopter une notation bra-ket en définissant des vecteurs de base).

(a) Écrire le vecteur de Jones des ondes électromagnétiques polarisées suivantes :

1. Polarisée rectiligne parallèle à \mathbf{e}_x ,
2. Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec \mathbf{e}_x ,
3. Polarisée circulaire droite,
4. Polarisée circulaire gauche,
5. Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale deux fois plus grand que le demi-petit axe.

Afin d'aborder la question par le cas le plus simple, on substitue $\phi_x = \phi_y = 0$ dans le champ électrique (*)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x + E_y \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_y = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t), \quad (1)$$

où $\mathbf{E}_0 = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$. On obtient donc une onde polarisée rectiligne. Le vecteur de Jones associé à cette onde, équation (†), s'écrit

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où $E \in \mathbb{R}$ est la norme du champ électrique et où on a utilisé une description polaire pour les composantes de \mathbf{E} . Pour les ondes polarisées rectilignes demandées dans l'énoncé, on substitue $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$ afin d'obtenir

$$\mathbf{E}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 \propto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

On s'intéresse ensuite à la présence d'un déphasage non nul entre les composantes du vecteur \mathbf{E} , par exemple (et sans perte de généralité) lorsque $\phi_y \neq \phi_x = 0$. Ceci implique que les composantes spatiales du champ électrique évolueront dans le temps sans s'annuler

aux mêmes instants. En effet, en posant par exemple $\phi_x = 0$ et $\phi_y = \pm\pi/2$ dans l'équation d'onde (*), on obtient

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x \\ \pm i E_y \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \begin{pmatrix} E_x \cos(kz - \omega t) \\ \mp E_y \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ce qui correspond en général à une onde polarisée elliptique. Le signe \mp permet de déterminer si la polarisation est elliptique gauche ou droite. En effet, en se plaçant en $z = 0$ pour simplifier le raisonnement,

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = \begin{pmatrix} E_x \cos(\omega t) \\ \pm E_y \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

on observe que la rotation du champ électrique est antihoraire, donc polarisée elliptique gauche, pour le signe + et horaire, donc elliptique droite, pour le signe -.

En observant que l'équation (4) décrit une onde polarisée circulaire lorsque $E_x = E_y = E_0/\sqrt{2}$, on peut ainsi exprimer les vecteurs de Jones pour les ondes polarisées circulaires gauche, $\phi_y = \pi/2$, et droite, $\phi_y = -\pi/2$, en remplaçant également $\phi_x = 0$ dans le vecteur (†),

$$\mathbf{E}_3 \propto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_4 \propto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Le vecteur de Jones d'une onde polarisée elliptiquement d'excentricité $\sqrt{1/2}$ est simplement obtenu par multiplication d'une des deux composantes par un facteur deux,

$$\mathbf{E}_5 \propto \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- (b) Un polariseur rectiligne présente un axe permettant de sélectionner la composante de l'onde incidente de polarisation parallèle à cet axe. Donner la forme matricielle P_0 d'un polariseur rectiligne idéal d'axe parallèle à \mathbf{e}_x . En déduire la matrice $P(\theta)$ d'un polariseur rectiligne idéal dont l'axe forme un angle θ avec l'axe \mathbf{e}_x .

On considère dans un premier temps le cas d'un polariseur rectiligne idéal dont l'axe est aligné sur \mathbf{e}_x . L'effet d'un tel polariseur sur une onde incidente est de ne laisser passer que la composante parallèle à \mathbf{e}_x . Sa matrice s'exprime donc

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

En considérant maintenant le cas plus général d'un polariseur dont l'axe fait un angle θ quelconque avec \mathbf{e}_x , on peut déterminer sa matrice en effectuant un changement de base à partir de la matrice P_0 . On introduit pour cela la matrice de rotation $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Cette matrice de rotation permet de passer d'une base où l'axe du polariseur est aligné sur \mathbf{e}_x à une base où l'axe du polariseur est tourné d'un angle θ par rapport à \mathbf{e}_x . La matrice du polariseur dans cette nouvelle base est obtenue par la formule de changement de base $P(\theta) = R(\theta)P_0R(\theta)^T$:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

- (c) Une onde électromagnétique incidente polarisée rectiligne parallèle à \mathbf{e}_x passe à travers du polariseur $P(\theta)$. Retrouver la loi de Malus, qui donne l'expression de l'intensité de l'onde sortante I en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente sur le polariseur et de l'angle θ :

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Quelle est l'intensité moyenne de l'onde sortante si l'onde incidente est non polarisée ?

Soit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, éq. (3), le vecteur de Jones de l'onde incidente et \mathbf{E}' celui de l'onde après avoir traversé le polariseur de matrice de Jones $P(\theta)$, éq. (10). Pour obtenir la loi de Malus, il faut utiliser le fait que $I \propto \mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{E}'$. Afin d'obtenir l'amplitude de l'onde après son passage au travers du polariseur, on multiplie la matrice de Jones associée à celui-ci avec le vecteur de Jones de l'onde incidente,

$$\mathbf{E}' = P(\theta) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

L'intensité de l'onde sortante s'obtient en calculant $\mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{E}'$. On en déduit ainsi

$$I \propto \cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \implies I = I_0 \cos^2 \theta. \quad (12)$$

Finalement, pour une onde non polarisée, la valeur moyenne de l'intensité s'obtient en prenant la valeur moyenne de $\cos^2 \theta$ sur l'ensemble des angles d'incidences $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \implies \langle I \rangle = \frac{I_0}{2}. \quad (13)$$

- (d) Le Polaroïd est un filtre rectiligne non idéal, c'est-à-dire que celui-ci a une transmittance T_1 le long de la direction privilégiée et T_2 le long de la direction perpendiculaire, où $T_2 < T_1 \leq 1$. En considérant ces hypothèses, écrire la matrice représentant le filtre Polaroïd lorsque la direction privilégiée

1. est parallèle à l'axe \mathbf{e}_x ,
2. fait un angle θ avec l'axe \mathbf{e}_x .

Démontrer la loi de Malus dans le cas du filtre Polaroïd.

L'approche pour résoudre ce problème est similaire au point (b). Dans un premier temps, on considère un filtre Polaroïd dont la direction privilégiée est parallèle à l'axe \mathbf{e}_x . Dans ce cas, le filtre Polaroïd transmet une fraction T_1 de l'intensité entrante selon la direction \mathbf{e}_x et une fraction T_2 selon la direction perpendiculaire \mathbf{e}_y . La matrice de Jones de ce polariseur doit donc satisfaire

$$\|P_0 \mathbf{e}_x\|^2 = T_1. \quad (14)$$

Afin de satisfaire cette condition, on peut donc écrire que $P_0 \mathbf{e}_x = \sqrt{T_1} \mathbf{e}_x$. Similairement, la condition pour la direction perpendiculaire s'écrit

$$\|P_0 \mathbf{e}_y\|^2 = T_2. \quad (15)$$

Ce qui permet d'écrire $P_0 \mathbf{e}_y = \sqrt{T_2} \mathbf{e}_y$. La matrice de Jones du Polaroïd est donc

$$P_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{T_2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Comme au point (b), ce raisonnement peut se généraliser pour un Polaroïd avec une direction privilégiée formant un angle θ quelconque avec l'axe \mathbf{e}_x . Il faut pour cela appliquer la formule

de changement de base $P(\theta) = R(\theta)P_0R(\theta)^T$, ce qui donne :

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1} \cos^2 \theta + \sqrt{T_2} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \\ \sin \theta \cos \theta (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) & \sqrt{T_1} \sin^2 \theta + \sqrt{T_2} \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (17)$$

En calculant l'intensité d'une onde polarisée rectiligne selon l'axe \mathbf{e}_x , on obtient alors la loi de Malus pour le Polaroid

$$I \propto \|P(\theta)E\mathbf{e}_x\|^2 \implies I = I_0(T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta). \quad (18)$$

On observe que les résultats obtenus sont équivalents à ceux trouvés au point précédent si $T_1 = 1$ et $T_2 = 0$, correspondant donc à un polariseur rectiligne idéal. On remarque également que, si $T_1 = T_2$, la matrice $P(\theta)$ est diagonale pour tout angle θ . En effet, le filtre aurait alors uniquement comme effet de modifier l'intensité de l'onde mais pas sa polarisation.

- (e) Les lames à retard sont des éléments optiques introduisant une phase ϕ qui retarde la composante de l'onde incidente perpendiculaire à l'axe optique de la lame par rapport à sa composante le long de l'axe optique. Donner la forme générale d'une lame à retard si l'axe optique fait un angle θ avec \mathbf{e}_x . Que peut-on dire de ce polariseur si $\phi = \pi$? Et quand $\phi = \pi/2$?

On adopte un raisonnement similaire aux questions précédentes et on suppose d'abord que l'axe optique est le long de l'axe \mathbf{e}_x , c.-à-d. $\theta = 0$. On choisit la forme matricielle $Q(\theta = 0)$ suivante pour la lame à retard :

$$Q_\phi(\theta = 0) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Cette formulation implique un déphasage individuel de $\pm\phi/2$ des composantes perpendiculaires et parallèles au polariseur, et donc un déphasage total de ϕ . On note cependant que ce choix, éq. (19), est arbitraire à un facteur de phase près. En effet, il aurait également été possible de choisir, par exemple,

$$Q'_\phi(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

En utilisant la matrice de rotation $R(\theta)$, on obtient la forme générale de la lame à retard pour un angle θ quelconque entre l'axe optique et \mathbf{e}_x .

$$Q_\phi(\theta) = R(\theta)Q_\phi(\theta = 0)R(\theta)^T = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{i\phi} \sin^2 \theta & (1 - e^{i\phi}) \sin \theta \cos \theta \\ (1 - e^{i\phi}) \sin \theta \cos \theta & e^{i\phi} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Lorsque $\phi = \pi$, on obtient :

$$Q_{\phi=\pi}(\theta) = -i \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (22)$$

et lorsque $\theta = 0$,

$$Q_{\phi=\pi}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Par conséquent, pour une onde polarisée rectiligne, on observe que la lame induit un déphasage de $\pi/2$ aux deux composantes par rapport à l'onde incidente, ainsi qu'une inversion de la composante perpendiculaire à l'axe optique. De manière équivalente, on peut

aussi dire que l'effet de la lame est d'introduire un déphasage de $\pm\pi/2$ à chaque composante, et donc un déphasage total de π entre les deux composantes de l'onde incidente. Pour cette raison, ce type de lame à retard est appelé « lame demi-onde », car elle induit un retard d'une demi-longueur d'onde à l'une des composantes incidentes.

Lorsque $\phi = \pi/2$, la matrice de Jones (21) de la lame à retard s'écrit

$$Q_{\phi=\pi/2}(\theta) = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1-i) \sin \theta \cos \theta \\ (1-i) \sin \theta \cos \theta & i \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Pour comprendre quel est l'effet de ce polariseur, on pose $\theta = 0$ et on obtient le polariseur suivant :

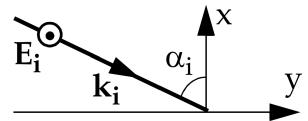
$$Q_{\phi=\pi/2}(\theta = 0) = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Cette matrice est similaire à la matrice de Jones de la lame demi-onde (23), pour laquelle on note que $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$. Une onde incidente rectiligne subira donc également un déphasage de ses composantes respectives, mais celles-ci seront déphasées de $\pi/2$, et non de π . Cette lame est donc appelée « lame quart d'onde », car le déphasage induit est équivalent à un retard d'un quart de la longueur d'onde. Un tel déphasage aura pour conséquence de transformer une onde incidente polarisée rectiligne en une onde polarisée elliptique (ou circulaire en fonction de la norme des composantes incidentes).

2 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfaitement réfléchissant

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propage dans le vide.

Elle arrive, sous un angle d'incidence α_i sur une surface plane $\Sigma = Oyz$ parfaitement réfléchissante. Le champ électrique \mathbf{E}_i est normal au plan d'incidence Oxy .



- (a) Montrer que le champ électrique \mathbf{E} , résultant de l'interférence de \mathbf{E}_i avec le champ \mathbf{E}_r de l'onde réfléchie, est une onde se propageant selon y , dont l'amplitude dépend de x .

La condition au bord à l'interface du miroir implique la continuité de la composante du champ électrique parallèle à l'interface (voir indication série 7, exercice 3b)

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{E}_{x>0} - \mathbf{E}_{x<0}) = 0,$$

avec $\mathbf{E}_{x>0} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ le champ au-dessus du miroir et $\mathbf{E}_{x<0} = 0$ le champ à l'interface et au-dessous de celle-ci. Puisque le champ électrique \mathbf{E}_i oscille dans le plan de l'interface et que Σ est parfaitement réfléchissante, on en déduit que $\mathbf{E}_r(x=0) = -\mathbf{E}_i(x=0)$. Les champs électriques s'écrivent ainsi

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) = -E_0 \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z, \quad \text{avec } \mathbf{k}_i = -k \cos \alpha_i \mathbf{e}_x + k \sin \alpha_i \mathbf{e}_y, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = E_0 \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z, \quad \text{avec } \mathbf{k}_r = k \cos \alpha_i \mathbf{e}_x + k \sin \alpha_i \mathbf{e}_y. \quad (27)$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (28)$$

on obtient donc que le champ électrique total est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = E_0 [\sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t) - \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{e}_z = \dots \\ &\dots = 2E_0 \cos(ky \sin \alpha_i - \omega t) \sin(kx \cos \alpha_i) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (29)$$

L'onde obtenue est une onde qui se propage le long de l'axe \mathbf{e}_y . Toutefois, on constate que son amplitude dépend de x . Pour y fixe, l'onde selon x a la forme d'une onde stationnaire.

(b) Déterminer les plans nodaux et les plans ventraux de \mathbf{E} .

Les plans nodaux $x = x_n$, parallèles à Oyz , sont tels que \mathbf{E} soit nul et les plans ventraux $x = x_v$ sont tels que l'amplitude de \mathbf{E} soit maximale. En substituant $k = 2\pi/\lambda$ dans (29) et en imposant les conditions à l'existence de nœuds et ventres,

$$x_{n,m} = \frac{m\lambda}{2 \cos \alpha_i} \quad \text{et} \quad x_{v,m} = \frac{(m + 1/2)\lambda}{2 \cos \alpha_i}, \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

(c) Exprimer la vitesse de phase u de \mathbf{E} en fonction de la vitesse de la lumière c et α_i .

L'expression du champ \mathbf{E} de la question (a) décrit une onde progressive selon Oy , de nombre d'onde $k_y = k \sin \alpha_i$. La vitesse de phase, correspondant à la vitesse de déplacement d'une crête de l'onde, vaut ainsi :

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \sin \alpha_i} = \frac{c}{\sin \alpha_i} > c. \quad (31)$$

La vitesse de phase de l'onde est donc forcément supérieure à la vitesse de la lumière c . On note cependant que la vitesse de phase ne correspond pas nécessairement à la vitesse de transmission de l'information (ou d'énergie). Dans le cas à l'étude, on montre dans la question suivante que la vitesse de groupe v est bien inférieure à c et correspondra à la vitesse de transmission d'information (ou énergie). On note qu'il existe également des cas pour lesquels $v > c$ sans toutefois impliquer une transmission d'information ou énergie.

(d) Exprimer, par un raisonnement mathématique puis par un raisonnement géométrique, la vitesse de groupe v de \mathbf{E} .

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de transmission de l'enveloppe d'une onde. Celle-ci correspond en général à la vitesse de transmission de l'information et de l'énergie. Elle est définie par $v = d\omega/dk_y$. On note que le choix de la variable k_y se justifie de la même manière qu'au point (c) : l'onde totale est progressive selon l'axe y . Il vient alors

$$v = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{d}{dk_y}(ck) = c \frac{d}{dk_y} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{ck_y}{k} = c \sin \alpha_i \leq c. \quad (32)$$

Dans ce cas-ci, la vitesse de groupe est donc inférieure ou égale à la vitesse de la lumière c et ne pourrait donc pas engendrer de transfert supraluminique d'information.

L'expression (32) peut également être obtenue à l'aide d'un raisonnement géométrique. On remarque que les ondes incidentes et réfléchies, considérées individuellement, se propagent à vitesse c dans la direction de leurs vecteurs d'onde respectifs, \mathbf{k}_i ou \mathbf{k}_r . La projection de cette vitesse selon la direction de propagation de \mathbf{E} , c.-à-d. Oy , est donc $c \sin(\alpha_i)$. Autrement dit, le vecteur d'onde \mathbf{k}_r « annule » la partie de l'onde incidente de \mathbf{k}_i selon x , mais « s'ajoute » à la partie selon y .

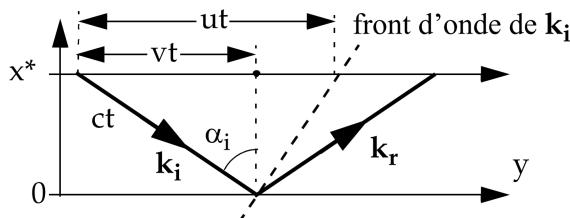


Figure 1

Lorsque le rayon de l'onde incidente parcourt une distance ct , Fig. 1, l'intersection du front d'onde avec un plan $x = x^*$ se déplace d'une distance ut . Géométriquement, il vient

$\sin \alpha_i = ct/ut$ et donc $u = c/\sin(\alpha_i)$ la vitesse de phase de l'onde \mathbf{E} selon y . La vitesse de groupe de l'onde de \mathbf{E} est la vitesse à laquelle l'énergie se propage selon y . Afin de déduire la vitesse de groupe, imaginons que l'on ne laisse passer l'onde que pendant un court instant, formant une brève impulsion. L'onde incidente selon \mathbf{k}_i transporterait l'impulsion à la vitesse c en diagonale, alors que l'onde réfléchie \mathbf{k}_r contribuerait à annuler l'impulsion de \mathbf{k}_i selon x . Les impulsions \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_r progressent chacune d'une distance vt selon y pendant le temps t . On a donc $v = c \sin \alpha_i$.

On place un second miroir plan parfait Σ' parallèle à Σ , à une distance $x = X$ de Σ . L'onde incidente subit ainsi des réflexions multiples entre Σ et Σ' .

- (e) Dans ces conditions, exprimer la vitesse de phase u en fonction de X , λ et c . Montrer ensuite que pour tout X donné, il existe une longueur d'onde λ_c et donc une fréquence de coupure f_c au-dessous de laquelle l'onde de \mathbf{E} ne se propage pas.

En plaçant un second miroir, l'onde incidente subit des réflexions multiples entre Σ et Σ' . Le miroir Σ' étant parfaitement réfléchissant, on doit à nouveau avoir un champ d'amplitude nulle à cette interface. En partant de l'expression du champ \mathbf{E} donnée par l'équation (29), voir point (a), cette condition amène que

$$kX \cos \alpha_i = m\pi \implies \cos \alpha_i = \frac{m\lambda}{2X}, \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}^*, \quad (33)$$

c'est-à-dire qu'on obtient $X = x_{n,m}$, voir la condition (30), à l'exception du fait que $m \neq 0$, pour éviter le cas $X = 0$, puisque l'on veut préserver un espace entre les miroirs Σ et Σ' . On note que pour une longueur d'onde λ et une distance X fixées, la relation (33) implique que l'angle α_i est complètement déterminé. Réciproquement, pour λ et α_i fixés, la distance X est alors déterminée par la relation (33). Autrement dit, la condition de réflexion parfaite du second miroir, imposée par (33), a pour conséquence de lier les trois paramètres α_i , λ et X de sorte qu'il ne soit possible d'en choisir que deux indépendamment. On en déduit la vitesse de phase

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \sin \alpha_i} = \frac{c}{\sqrt{1 - m^2 \lambda^2 / (2X)^2}}. \quad (34)$$

Si l'on choisit et fixe les paramètres X et α_i , on remarque que pour l'argument de la racine peut devenir négatif pour une longueur d'onde λ suffisamment grande. On obtient alors un vecteur d'onde k_y imaginaire. Dans ce cas, l'onde est évanescante et ne se propage pas. Cette valeur limite pour la longueur d'onde permet de définir la fréquence de coupure, qui est la fréquence minimale qu'une onde doit avoir pour se propager. La longueur d'onde de coupure λ_c est obtenue en imposant que l'argument à la racine dans (34) devienne négatif,

$$1 - \frac{m^2 \lambda^2}{(2X)^2} \leq 0 \implies \frac{2X}{m} \leq \lambda \implies \frac{\lambda}{2} \geq X \geq \frac{X}{m}. \quad (35)$$

Par conséquent, la longueur d'onde de coupure est $\lambda_c = 2X$, et la fréquence de coupure associée est $f_c = c/\lambda_c = c/(2X)$. Pour une longueur d'onde λ plus grande, il n'y a aucune onde qui se propage, peu importe la valeur de α et de n .

challenge

- (f) Déterminer la relation de dispersion de cette onde.

En utilisant les expressions (31) et (32) pour u et v , il est possible d'établir la forme de la relation de dispersion. En effet,

$$uv = \frac{\omega}{k_y} \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{d(\omega^2)}{d(k_y^2)} = \frac{c}{\sin \alpha_i} \cdot c \sin \alpha_i = c^2. \quad (36)$$

En intégrant en fonction de k_y^2 , on obtient que la relation de dispersion doit être de la forme

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + C, \quad (37)$$

avec C une constante d'intégration. Afin de déterminer C , on substitue la fréquence de coupure $\omega = \omega_c$ obtenue au point précédent. De plus, on remarque que

$$k_y(\omega = \omega_c) = k \sin \alpha_i = k \sqrt{1 - \frac{m^2 \lambda_c^2}{(2X)^2}} = 0 \quad (38)$$

par définition de la longueur d'onde de coupure λ_c , éq. (35). Par substitution de $k_y = 0$ et $\omega = \omega_c$ dans (37), on obtient $C = \omega_c^2$ et la relation de dispersion s'écrit donc

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + \omega_c^2. \quad (39)$$

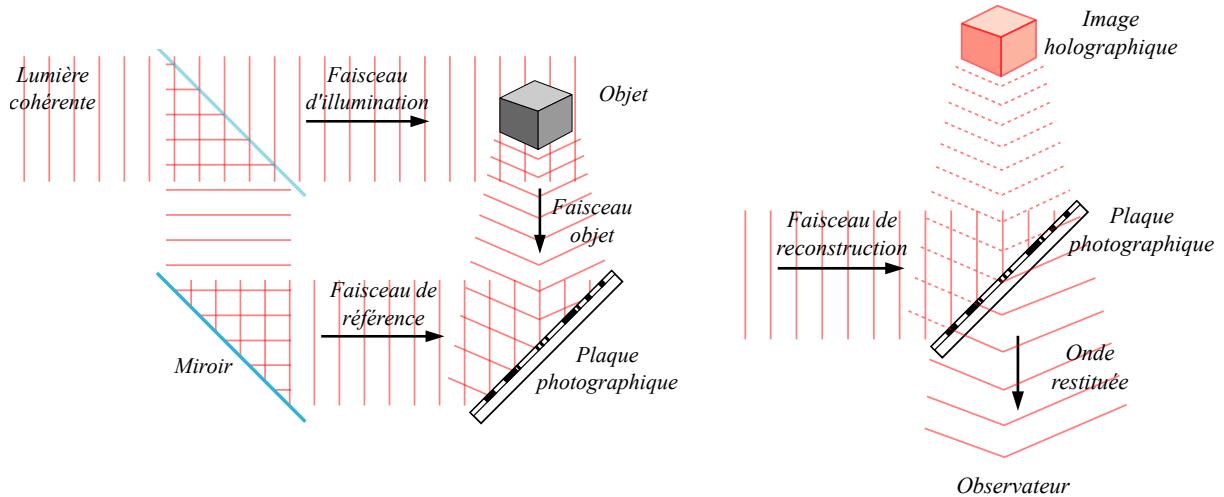
On remarque que la vitesse de groupe v trouvée en (32) peut être redérivée avec cette relation de dispersion :

$$v = \frac{d}{dk_y} \sqrt{c^2 k_y^2 + \omega_c^2} = \frac{c^2 k_y}{\sqrt{c^2 k_y^2 + \omega_c^2}} = \frac{c^2 k_y}{\omega} = c \sin \alpha_i, \quad (40)$$

où on a utilisé $c k_y / \omega = \sin \alpha_i$, éq. (31).

3 Principe de base de l'holographie

L'holographie est un procédé d'enregistrement de la lumière réfléchie par un objet. On procède par illumination d'une surface sensible, par exemple un film photographique, par une figure d'interférence entre la lumière réfléchie par l'objet (« faisceau objet ») et une source de lumière cohérente (« faisceau de référence »), typiquement un laser. Les franges d'interférences sont alors enregistrées sur cette surface et, lorsque éclairées par une source lumineuse cohérente, agissent comme un réseau de diffraction et restituent le faisceau objet, qu'un observateur percevra comme une image holographique.



Enregistrement (gauche) et lecture (droite) d'un hologramme.

On étudie la situation simplifiée suivante, voir la figure ci-contre, pour laquelle on considère deux ondes lumineuses planes, cohérentes, de mêmes longueurs d'onde λ , de mêmes intensités, polarisées linéairement et de vecteurs \mathbf{E} parallèles à l'axe z . Le vecteur d'onde \mathbf{k}_1 de la première onde est parallèle à x et le vecteur d'onde \mathbf{k}_2 de la seconde forme un angle α par rapport à x . Un film photographique est placé dans le plan $x = 0$ afin d'enregistrer les franges d'interférence.

- (a) Montrer que l'intensité, moyennée dans le temps, résultant de la superposition des deux ondes dans le plan $x = 0$ est donnée par

$$I_{\text{moy}}(y) = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}ky \sin \alpha\right),$$

avec I_0 une constante réelle à déterminer.

L'expression des champs électriques des deux ondes incidentes s'écrit comme :

$$\mathbf{E}_1 = E \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z, \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_1 = k \mathbf{e}_x, \quad (41)$$

$$\mathbf{E}_2 = E \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z, \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_2 = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y). \quad (42)$$

L'onde résultante, polarisée dans la direction \mathbf{e}_z , est donnée par la somme des ondes incidentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E[\sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t) + \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{e}_z = \dots \\ &\dots = 2E \sin\left(kx \frac{1 + \cos \alpha}{2} + ky \frac{\sin \alpha}{2} - \omega t\right) \cos\left(kx \frac{1 - \cos \alpha}{2} - ky \frac{\sin \alpha}{2}\right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (43)$$

On s'intéresse à l'intensité moyenne de l'onde dans le plan $x = 0$. L'intensité totale instantanée est donnée par

$$I(y, t) = \mathbf{E}^*(x = 0) \cdot \mathbf{E}(x = 0) = 4E^2 \sin^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha - \omega t\right) \cos^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha\right), \quad (44)$$

et la moyenne de $I_{\text{moy}}(y)$ sur une période est donc

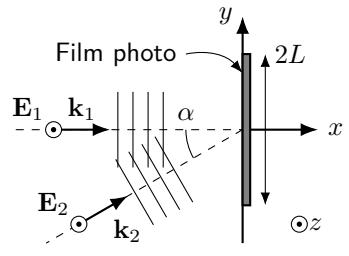
$$I_{\text{moy}}(y) = 2E^2 \cos^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha\right). \quad (45)$$

Dans le plan $x = 0$, on place un film photographique de largeur $2L$ dont le noircissement est proportionnel à l'intensité $I(y)$ incidente sur celui-ci. Une fois ce film exposé et noirci, on l'éclaire avec une onde incidente de vecteur d'onde \mathbf{k}_1 . On suppose que l'amplitude $E(y)$ du champ électrique transmis à travers le film est donnée par le profil de noircissement déterminé en (a),

$$E(y) \propto 1 - \frac{I_{\text{moy}}(y)}{I_0}.$$

- (b) Déterminer le profil d'intensité diffractée. En déduire que seuls des rayons diffractés par le film photo pour $x > 0$ dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pm\alpha$ ne sont pas atténusés, comme attendu pour une image holographique.

Par application du principe de Huygens, on admet que chaque élément de longueur infinitésimale dy du film émet une onde sphérique. Puisque le noircissement du film est proportionnel à $I_{\text{moy}}(y)$, éq. (45), alors les amplitudes des sources sphériques associées au principe de



Huygens seront proportionnelle à

$$E(y) \propto 1 - \frac{I_{\text{moy}}(y)}{I_0} = \sin^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha\right). \quad (46)$$

Soit un point P , non contenu dans le plan du film, à une distance r du centre de celui-ci. On indique θ l'angle entre l'axe x et le vecteur reliant le centre du film au point P , c'est-à-dire $(x_P, y_P) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. L'amplitude totale du champ électrique au point P est donnée par l'intégrale suivante :

$$E(r, \theta) = \int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{ky}{2} \sin \alpha\right) \frac{A}{r - y \sin \theta} e^{i[k(r - y \sin \theta) - \omega t]} dy, \quad (47)$$

où A est une constante de proportionnalité. Le terme $r - y \sin \theta$ apparaît pour les mêmes raisons que discutées en série 4, exercice 2 (diffraction de Fraunhofer). On note que, lors de l'intégration, le terme $A/(r - y \sin \theta)$ varie peu car $L \ll r$. Cependant, le terme de phase $iky \sin \theta$ présentera des variations d'ordre $\mathcal{O}(1)$ puisque $\lambda \ll L$. Cette justification est identique à celle employée dans la série 4, exercice 1 sur les fentes de Young et permet d'extraire la dépendance inverse à r de l'intégrale. On introduit également $k' = -k \sin \theta$ et $\delta k' = k \sin \alpha$ dans l'éq. (47) afin d'alléger la notation et on obtient donc

$$E(r, \theta) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{\delta k' y}{2}\right) e^{-ik' y} dy. \quad (48)$$

On réécrit ensuite

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \implies \sin^2 x = \frac{2 - e^{2ix} - e^{-2ix}}{4}, \quad (49)$$

que l'on insère dans (48),

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L \left(2 - e^{i\delta k' y} - e^{-i\delta k' y}\right) e^{-ik' y} dy = \dots \\ &\dots = \frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L \left(2e^{-ik' y} - e^{-ik'_+ y} - e^{-ik'_- y}\right) dy, \end{aligned} \quad (50)$$

où on a posé $k''_{\pm} = k' \pm \delta k'$. En intégrant, on obtient l'expression finale pour l'amplitude totale de l'onde :

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \left(2 \frac{e^{ik'L} - e^{-ik'L}}{ik'} - \frac{e^{ik'_+'' L} - e^{-ik'_+'' L}}{ik''_+} - \frac{e^{ik''_- L} - e^{-ik''_- L}}{ik''_-}\right) = \dots \\ &\dots = \frac{AL}{2r} e^{i(kr - \omega t)} [2 \operatorname{sinc}(k'L) - \operatorname{sinc}(k''_+ L) - \operatorname{sinc}(k''_- L)], \end{aligned} \quad (51)$$

où on rappelle l'expression de la fonction sinus cardinal, $\operatorname{sinc} x = (\sin x)/x$. L'intensité de l'onde est donnée par $I(r, \theta) = E^*(r, \theta)E(r, \theta)$. On regroupe les termes provenant de la mise au carré de (51) à l'aide de deux contributions différentes, $I(r, \theta) \propto R(r, \theta) + C(r, \theta)$, où on définit

$$R(r, \theta) = 4 \operatorname{sinc}^2(k'L) + \operatorname{sinc}^2(k''_+ L) + \operatorname{sinc}^2(k''_- L), \quad (52)$$

$$C(r, \theta) = \operatorname{sinc}(k''_+ L) \operatorname{sinc}(k''_- L) - 2 \operatorname{sinc}(k'L) \operatorname{sinc}(k''_+ L) - 2 \operatorname{sinc}(k'L) \operatorname{sinc}(k''_- L). \quad (53)$$

Pour peu que $k' \neq k''_{\pm}$, on peut montrer que les termes « croisés » $C(r, \theta)$ sont négligeables par rapport à $R(r, \theta)$. On remarque tout d'abord que lorsque l'on s'écarte du maximum

de la fonction sinc, la norme de celle-ci chute rapidement. Par exemple, les maxima de $\text{sinc}(k'L)$ sont donnés par $k'L = kL \sin \theta = n\pi$, avec le pic principal en $\theta = 0$. Les pics suivants seront atteints lorsque $\sin \theta = n\lambda/(2L) \ll 1$. Il suffit donc d'un faible écart $\delta\theta$ avec le pic principal avant que la norme de la fonction sinc devienne négligeable. Une conclusion similaire peut être tirée pour les termes $\text{sinc}(k''_{\pm}L)$ dont les maxima se situent en $\theta = \pm\alpha$. Ainsi, pour peu que $k' \neq k''_{\pm}$, c'est-à-dire pour peu que $\sin \alpha$ soit suffisamment grand, on peut négliger les termes croisés apparaissant dans $C(r, \theta)$ pour le reste du raisonnement.

Ceci qui permet d'affirmer que

$$I(r, \theta) \approx \left(\frac{AL}{2r} \right)^2 R(r, \theta)^2 \propto 4 \text{sinc}^2(k'L) + \text{sinc}^2(k''_{+}L) + \text{sinc}^2(k''_{-}L). \quad (54)$$

L'intensité résultante $I(r, \theta)$ a donc trois maxima en $k'L = kL \sin \theta = 0$, c'est-à-dire en $\theta = 0$, ainsi qu'en $k''_{\pm}L = kL(\sin \theta \pm \sin \alpha) = 0$, c'est-à-dire en $\theta = \pm\alpha$. Dès que l'on s'écarte de ces maxima, l'intensité chute très vite pour les raisons évoquées précédemment. L'intensité aura donc l'allure donnée dans la figure 2.

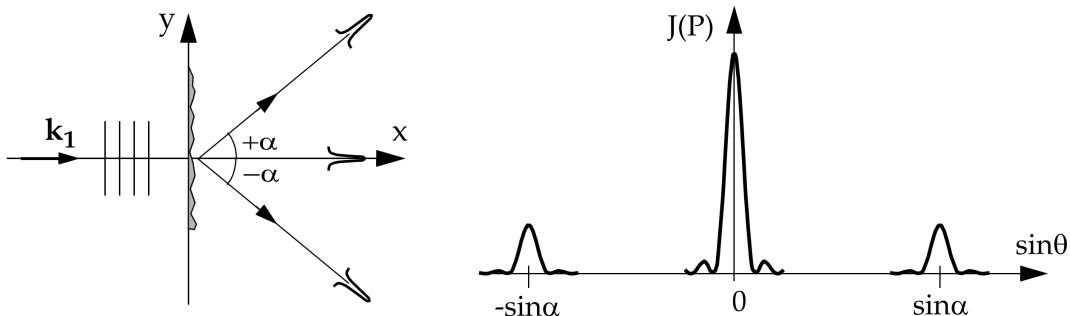


Figure 2 : À gauche : Illustration de la lecture du film holographique. En illuminant le film à l'aide de la source cohérente utilisée lors de l'enregistrement, le film agit comme un réseau de diffraction et restitue l'onde de vecteur \mathbf{k}_2 qui illuminait le film lors de l'enregistrement de l'hologramme. À droite : Un graphe de l'intensité $I(r, \theta)$, éq. (54).