

4 avril 2025

Corrigé 7 : Interférences et diffraction

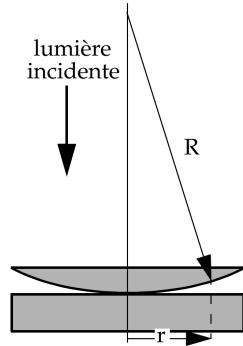
1 Anneaux de Newton

Une lentille optique plan-convexe, posée sur un miroir parfait, est illuminée par une onde monochromatique. On suppose que l'épaisseur $d(r)$ de la couche d'air sous la lentille est négligeable par rapport au rayon de courbure de la lentille R , c'est-à-dire $d \ll R$. La figure ci-contre représente la lentille plan-convexe reposant sur le miroir.

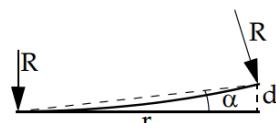
- (a) En utilisant la limite $d \ll R$, montrer que $d \approx r^2/(2R)$. Avec cette approximation, montrer les ondes réfléchies et réfractées d'une onde incidente verticale restent elles-mêmes verticales.

Comme $d \ll R$, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

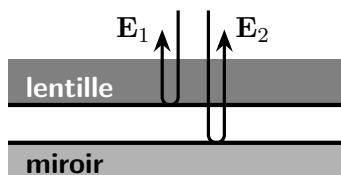
$$R^2 = r^2 + (R - d)^2 \implies 2d \approx r^2/R. \quad (1)$$



Par conséquent, on peut conclure que la surface courbe de la lentille forme un angle $\tan \alpha \approx \sqrt{d/2R}$ avec le miroir, cf. figure ci-dessous. Bien que cet angle soit non nul, on va approximer qu'il est suffisamment faible tel que les deux surfaces puissent être considérées parallèles. Ceci permet alors notamment de considérer que les réfractions et réflexions d'une onde incidente verticale restent elles-mêmes verticales, ce qui permet de simplifier la discussion des figures d'interférences pour la suite de l'exercice. Cependant, on continuera de traiter l'épaisseur $d = d(r)$ comme variable. En effet, comme discuté dans les réponses suivantes, l'observation d'interférences constructives et destructives ne requiert qu'une variation $\Delta d \sim \lambda$ de l'épaisseur entre lentille et miroir. Cette justification est similaire à celle employée dans la série 4, exercice 1 traitant des fentes de Young.



- (b) Décrire le comportement d'un faisceau incident réfléchi aux différentes interfaces. On négligera les réflexions multiples. Expliquer qualitativement pourquoi un observateur placé au-dessus de la lentille observe des interférences qui se manifestent par des anneaux concentriques alternativement sombres et clairs appelés « anneaux de Newton ».



Le raisonnement en partie (a) permet d'affirmer que l'espace entre la lentille et le miroir est une couche d'air d'épaisseur d variable. Comme illustré sur la figure ci-dessus, un rayon traversant la couche d'air et réfléchi par le miroir sera donc déphasé par rapport à un rayon réfléchi par la paroi interne de la lentille. Selon la distance parcourue à travers la couche d'air, l'interférence due à la superposition des fonctions d'ondes associées à ces deux rayons peut être constructive ou destructive. Pour un observateur situé au-dessus de l'expérience (en direction de la source lumineuse incidente et regardant le miroir à travers la lentille), ces interférences se manifestent donc par des anneaux alternativement sombres (interférences destructives) et clairs (interférences constructives).

- (c) Déterminer le rayon r_m du m^{e} anneau sombre ainsi que la loi décrivant l'augmentation du rayon entre deux anneaux sombres consécutifs.

On souhaite déterminer r_m caractérisant la position des anneaux sombres, correspondant aux interférences destructives. On écrit pour cela la fonction d'onde associée à la lumière incidente sous la forme complexe suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2)$$

On appelle \mathbf{E}_1 le rayon lumineux réfléchi par la surface intérieure de la lentille et \mathbf{E}_2 le rayon lumineux réfléchi par le miroir. La différence de chemin optique correspond donc à $2d$, puisque le rayon lumineux \mathbf{E}_2 traverse la couche d'air entre la lentille et le miroir deux fois. De plus, la réflexion pour \mathbf{E}_2 engendre un changement de signe de l'amplitude réfléchie puisque le miroir est conducteur, comme précisé par l'indication. En superposant ces deux contributions, on obtient que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_r e^{i(-kx - \omega t)} (1 - e^{2ikd}) = \dots \\ &\dots = -\mathbf{E}_r e^{-i(kx + \omega t)} e^{ikd} (e^{ikd} - e^{-ikd}) = -2i \mathbf{E}_r e^{-i(kx + \omega t)} e^{ikd} \sin(kd). \end{aligned} \quad (3)$$

On remarque, dans le résultat ci-dessus, que l'on a considéré que les ondes réfléchie et réfractée ont une amplitude similaire, \mathbf{E}_r , selon l'indication de l'énoncé. C'est évidemment une approximation : on devrait en principe évaluer les coefficients de Fresnel (voir série 5) à l'interface afin d'obtenir les amplitudes de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 séparément. On préfère ici se concentrer sur l'impact du déphasage.

D'après l'équation (3), pour obtenir une interférence destructive, il est nécessaire que la condition suivante soit satisfaite :

$$\frac{2\pi}{\lambda} d = m\pi \implies 2d = m\lambda \approx \frac{r_m^2}{R}, \quad (4)$$

où on a utilisé l'expression trouvée en (1). Ceci permet de conclure que

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}. \quad (5)$$

- (d) Quelle est l'aire séparant deux anneaux sombres ? Dépend-elle de m ?

L'aire séparant r_m et r_{m+1} est donnée par :

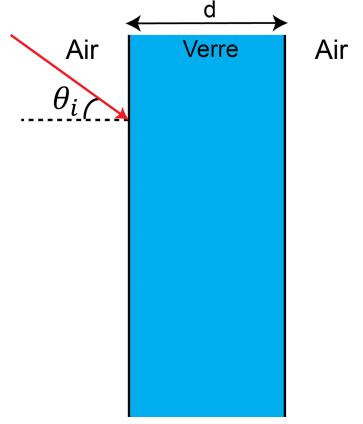
$$A_m = \pi(r_{m+1}^2 - r_m^2) = \pi\lambda R. \quad (6)$$

On remarque que A_m ne dépend pas de m et reste donc constante.

- (e) Déterminer la loi décrivant le rayon r'_m de l'interférence constructive.

La condition pour observer des interférences constructives s'observent à partir de l'expression donnée par (3). La condition s'écrit donc comme :

$$\frac{2\pi}{\lambda} d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \implies r'_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R}. \quad (7)$$

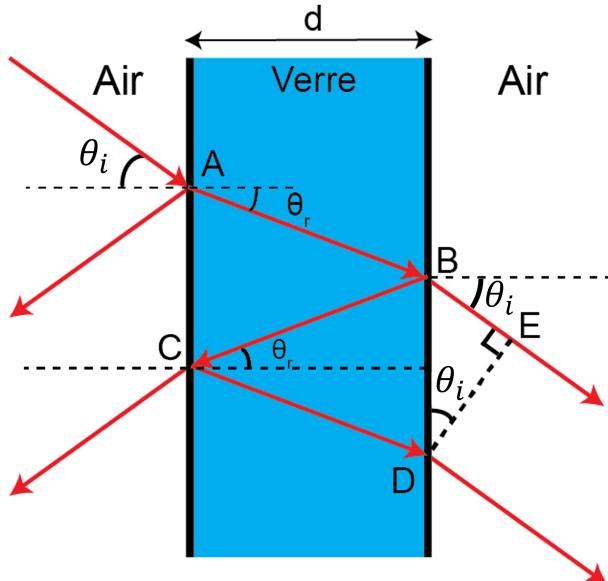


2 Interféromètre de Fabry-Perot

Un interféromètre de Fabry-Perot est un instrument optique composé de deux surfaces partiellement réfléchissantes. Il permet de laisser passer uniquement les longueurs d'onde de la lumière incidente qui sont en résonance avec la cavité optique formée par les deux surfaces. On désire caractériser la figure d'interférences de cet interféromètre en assimilant les surfaces aux deux interfaces d'une lame de verre de largeur d et d'indice de réfraction n . Pour simplifier l'analyse, on considère une onde monochromatique incidente sur la lame avec un angle incident θ_i par rapport à la normale. Le rayon incident est réfracté avec un angle θ_r .

- (a) À l'aide d'un diagramme, expliquer comment se comporte un rayon lumineux incident traversant la lame de verre. Considérer des réflexions multiples et montrer qu'un rayon entrant engendre plusieurs rayons sortants (ayant traversé la lame). Déduire la différence de phase $\Delta\phi(\theta_r)$ en fonction de θ_r entre deux rayons sortants successifs.

À chaque contact avec l'interface, le rayon est divisé en un rayon réfléchi et un rayon réfracté. Le chemin optique le plus court traversant la lame de verre est celui d'un rayon réfracté en A , puis réfracté en B . Le second plus court chemin est celui d'un rayon réfracté en A , réfléchi en B puis en C , et enfin réfracté en D . En considérant un plus grand nombre de réflexions, on peut donc supposer un nombre infini de tels chemins. Comme indiqué dans l'énoncé de la question, on commence ici par considérer uniquement les deux premiers rayons sortants, en B et D .



Pour calculer la différence de chemins optiques, δ (ci-après aussi appelée « différence de marche »), on remarque qu'il faut prendre en compte le chemin parcouru par le rayon réfléchi en B , parcourant le chemin BCD , et le rayon réfracté en B , suivant le chemin BE . Les rayons sortants sont considérés parallèles et l'observateur à une distance $L \gg \|\mathbf{BD}\| > \|\mathbf{BE}\|$, ce qui correspond à la limite de diffraction en champ lointain (Fraunhofer), voir série 4, exercice 2. Soit la fonction d'onde mesurée au point B , $\psi_B = s_B e^{-i\omega t}$ avec s_B l'amplitude de l'onde, que l'on calculera à la question (b). Les fonctions d'ondes en D et E s'écrivent alors

$$\psi_D = s_D e^{i(k'(\|\mathbf{BC}\| + \|\mathbf{CD}\|) - \omega t)} \quad \text{et} \quad \psi_E = s_E e^{i(k\|\mathbf{BE}\| - \omega t)}, \quad (8)$$

où $k' = nk$ puisque l'onde selon BCD se propage dans le verre. En prenant la somme de

ces ondes, $\psi = \psi_D + \psi_E$, on isole le déphasage des deux rayons,

$$\psi = (s_D e^{i\Delta\phi} + s_E) e^{i(k\|\mathbf{BE}\| - \omega t)}, \quad (9)$$

où on a écrit

$$\Delta\phi = k\delta = k[n(\|\mathbf{BC}\| + \|\mathbf{CD}\|) - \|\mathbf{BE}\|]. \quad (10)$$

Il faut maintenant exprimer $\|\mathbf{BC}\|$, $\|\mathbf{CD}\|$ et $\|\mathbf{BE}\|$ en fonction de θ_r et θ_i ,

$$\|\mathbf{BC}\| = \|\mathbf{CD}\| = \frac{d}{\cos\theta_r}. \quad (11)$$

On en déduit que le segment $\|\mathbf{BD}\|$ est donné par :

$$\|\mathbf{BD}\| = \frac{2d}{\cos\theta_r} \sin\theta_r = 2d \tan\theta_r. \quad (12)$$

Par conséquent, la distance parcourue par le premier rayon réfracté est donnée par :

$$\|\mathbf{BE}\| = 2d \tan\theta_r \sin\theta_i. \quad (13)$$

En utilisant les expressions ci-dessus ainsi que la loi de Snell-Descartes $\sin\theta_i = n \sin\theta_r$, on obtient donc la différence de chemin optique donnée par :

$$\delta = n\left(\frac{2d}{\cos\theta_r}\right) - 2d \tan\theta_r \sin\theta_i = 2d \frac{n - \sin\theta_r \sin\theta_i}{\cos\theta_r} = 2nd \frac{1 - \sin^2\theta_r}{\cos\theta_r} = 2nd \cos\theta_r. \quad (14)$$

La différence de phase $\Delta\phi$ est donc donnée par :

$$\Delta\phi = k\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} \cos\theta_r. \quad (15)$$

- (b) On suppose que la réflectivité de l'interface verre-air est égal à $R < 1$. Calculer l'amplitude $s_n(\Delta\phi)$ de chaque réfraction en sortie de l'interféromètre. En déduire l'amplitude totale s_{tot} en fonction de l'amplitude incidente s_i .

Au point (a), nous avons conclu qu'un nombre infini de rayons étaient réfractés par la lame de verre. L'amplitude de l'onde incidente est donné par s_i . Puisque le premier rayon traversant la lame par le chemin optique le plus court est réfracté deux fois, l'amplitude s_0 du premier rayon sortant BE est donnée par :

$$s_0 = (\sqrt{1-R})^2 s_i = (1-R)s_i, \quad (16)$$

avec $R = I_r/I_i$ la réflectivité de l'interface. On note que cette quantité diffère du coefficient de réflexion, introduit en série 5, exercice 1 sous le nom de coefficient de Fresnel. Une remarque similaire peut-être faite pour distinguer la transmittance (définie en terme d'intensités) du coefficient de transmission (défini en terme d'amplitudes). Le rayon réfracté suivant, sortant de la lame au point D et d'amplitude s_1 , est réfléchi deux fois et possède un déphasage $\Delta\phi$ par rapport à s_0 . Par récurrence, on en déduit l'expression de l'amplitude du m^{e} rayon réfracté s_m à partir de s_0 ,

$$s_1 = (\sqrt{1-R})^2 (\sqrt{R})^2 e^{i\Delta\phi} s_i = R e^{i\Delta\phi} s_0 \implies s_m = (R e^{i\Delta\phi})^m s_0. \quad (17)$$

Par conséquent, on obtient que l'amplitude totale de l'onde transmise s_{tot} s'exprime comme la somme des amplitudes des rayons réfractés.

$$s_{\text{tot}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (R e^{i\Delta\phi})^m \right) s_0 = \frac{s_0}{1 - R e^{i\Delta\phi}} = \frac{(1-R)s_i}{1 - R e^{i\Delta\phi}}. \quad (18)$$

(c) Montrer que la transmittance est donnée par :

$$T(\theta_r) = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2} \right]^{-1}.$$

L'intensité de l'onde transmise est donnée par $I_{\text{tot}} = s_{\text{tot}}^* s_{\text{tot}}$ et on obtient que :

$$I_{\text{tot}} = \frac{(1-R)^2 s_i^* s_i}{(1 - R e^{-i\Delta\phi})(1 - R e^{i\Delta\phi})} = I_0 \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi}, \quad (19)$$

où $I_0 = s_i^* s_i$ est l'intensité de l'onde incidente sur la lame de verre. Finalement, la transmittance est donnée par :

$$\begin{aligned} T(\theta_r) &= \frac{I_{\text{tot}}}{I_0} = \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2(\Delta\phi/2))} = \dots \\ \dots &= \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Delta\phi/2)} = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

(d) Donner les conditions pour avoir une transmittance maximale et dessiner la transmittance pour un angle θ_r fixe en fonction de $\Delta\phi$, puis de λ . Que remarque-t-on ? En déduire une application de l'interféromètre de Fabry-Perot.

La transmittance $T(\theta_r)$ en fonction de $\Delta\phi$ est montrée en Figure 1. On y observe des pics périodiques avec des maxima égaux à 1. On note que plus la réflectivité R est importante, plus les pics à mi-hauteur seront étroits. Les maxima s'expriment, éq. (15),

$$\frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \implies \lambda_m = \frac{2nd \cos \theta_r}{m}. \quad (21)$$

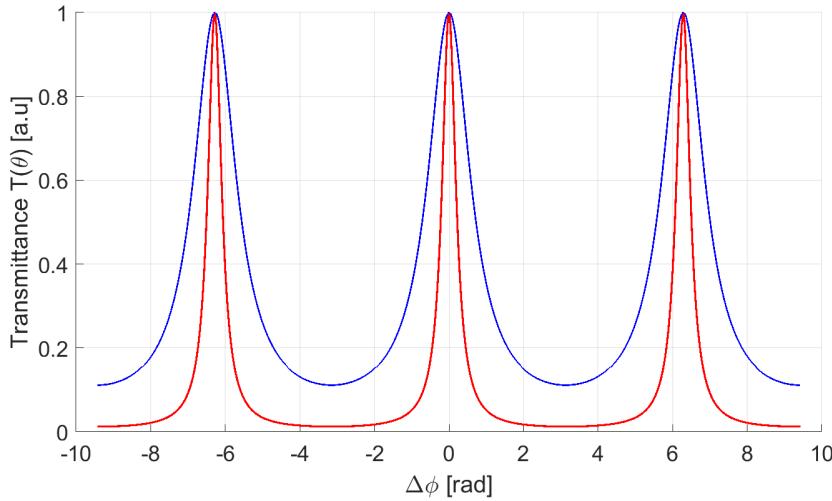


Figure 1 – Deux profils de transmittance en fonction de $\Delta\phi$. La courbe rouge est associé à une réflectivité plus élevée que dans le cas de la courbe bleue.

En utilisant l'équation (15), il est possible d'obtenir la même figure mais en fonction de λ , Fig. 2. On remarque que la distance entre les pics semble être la même. Ceci s'explique par l'argument suivant. Pour $m \gg 1$, la distance entre le pic lié à λ_m et λ_{m+1} peut s'écrire :

$$\lambda_m - \lambda_{m+1} = \Delta\lambda_m = 2nd \cos \theta_r \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{2nd \cos \theta_r}{m(m+1)} \approx \frac{2nd \cos \theta_r}{m^2}. \quad (22)$$

Pour m très grand, on a donc que la distance entre pics de transmittance est approximativement constante. En effet, si l'on compare la distance entre de séparation à la hauteur du $(m+p)^{\text{e}}$ pic avec celle du m^{e} pour $p \ll m$,

$$\Delta\lambda_{m+p} = \frac{2nd \cos \theta_r}{(m+p)(m+p+1)} = \Delta\lambda_m \frac{m(m+1)}{(m+p+1)(m+p)} \approx \Delta\lambda_m \left[1 - \frac{2p}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right]. \quad (23)$$

Cette propriété permet à l'interféromètre de Fabry-Perot de jouer un rôle de filtre optique, permettant de sélectionner seulement certaines longueurs d'onde d'un spectre lumineux ou encore de mesurer précisément des longueurs d'onde. Similairement à l'espacement des pics $\Delta\lambda_m$, on remarque que la largeur des pics à mi-hauteur $\delta\lambda_m$ reste également similaire d'un pic à l'autre. Le rapport entre la distance séparant les pics $\Delta\lambda$ et la largeur de pic $\delta\lambda$ est appelé « finesse » et caractérise la capacité de l'interféromètre à distinguer des longueurs d'onde proches.

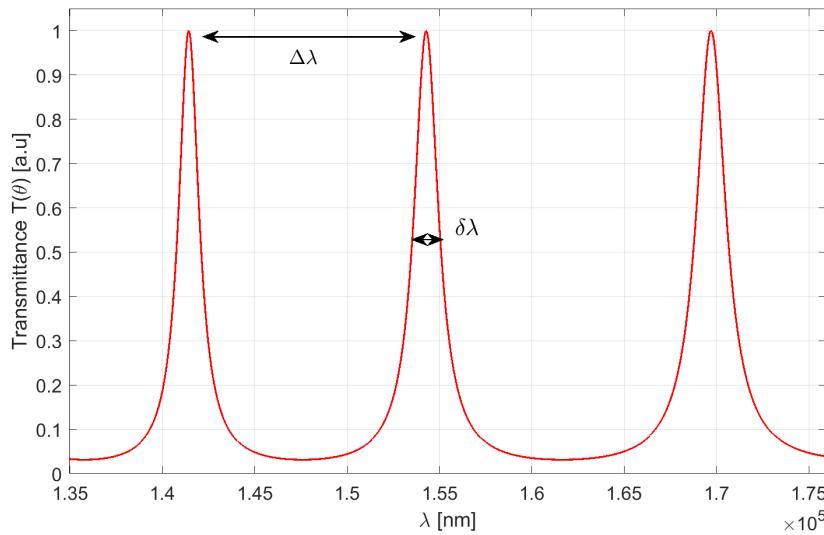


Figure 2 – Transmittance en fonction de λ .

3 Pression de radiation

On présente deux approches afin de dériver l'expression de la pression de radiation. On considère une onde électromagnétique plane progressive,

$$\mathbf{E}_i = \text{Re}[E_{0,i} e^{i(kx-\omega t)} \mathbf{e}_y] = E_{0,i} \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_y,$$

se propageant depuis $x < 0$ dans le vide et incidente sur un miroir plan, métallique et parfaitement conducteur en $x = 0$, ce qui implique donc que le champ électrique s'annule à l'interface, $\mathbf{E}(x = 0) = 0$. Ceci implique donc une onde électromagnétique réfléchie,

$$\mathbf{E}_r = \text{Re}[E_{0,r} e^{-i(kx+\omega t)} \mathbf{e}_y] = E_{0,r} \cos(kx + \omega t) \mathbf{e}_y.$$

- (a) Déterminer l'amplitude $E_{0,r}$ en fonction de $E_{0,i}$. Donner une expression pour les champs électrique et magnétique \mathbf{E}_{tot} et \mathbf{B}_{tot} résultants pour $x < 0$. Pour l'onde incidente, calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \mathbf{S}_i \rangle = \langle \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i \rangle / \mu_0$, ainsi que la densité volumique d'énergie moyenne $\langle u_{v,i} \rangle$ de l'onde électromagnétique.

Les conditions aux bords en $x = 0$ imposent que $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = 0$, soit

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = [E_{0,r} \cos(\omega t) + E_{0,i} \cos(\omega t)] \mathbf{e}_y = 0, \quad (24)$$

d'où l'on déduit que $E_{0,r} = -E_{0,i}$. On observe que le champ total \mathbf{E}_{tot} est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \text{Re}[E_{0,i}(e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(kx+\omega t)}) \mathbf{e}_y] = \dots \\ &\dots = \text{Re}[E_{0,i}e^{ikx}(-2i \sin(\omega t)) \mathbf{e}_y] = 2E_{0,i} \sin(kx) \sin(\omega t) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (25)$$

Évalué en $x = 0$, on observe effectivement que $\mathbf{E}_{\text{tot}} = 0$.

Par la loi d'induction de Faraday, il est possible de déterminer le champ magnétique \mathbf{B} à partir dans un champ électrique $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{u}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \mathbf{B} = -\int i \mathbf{k} \times \mathbf{E} dt,\quad (26)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \text{Re}\left[-i(\mathbf{k} \times \mathbf{u})E_0 \int e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} dt\right] = \text{Re}\left[\frac{E_0 k}{\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \left(\frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \times \mathbf{u}\right)\right] = \dots \\ &\dots = \frac{E_0}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \left(\frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \times \mathbf{u}\right),\end{aligned}\quad (27)$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire dans la direction de la polarisation. Dans le cas présent, $\mathbf{k} = \pm k \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{u} = \mathbf{e}_y$ et, par conséquent, on obtient les expressions suivantes pour \mathbf{B}_i et \mathbf{B}_r :

$$\mathbf{B}_i = \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_z,\quad (28)$$

$$\mathbf{B}_r = -\frac{E_{0,r}}{c} \cos(-kx - \omega t) \mathbf{e}_z = \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx + \omega t) \mathbf{e}_z.\quad (29)$$

Le champ magnétique total dans le vide \mathbf{B}_{tot} est donc donné par la superposition des champs incident et réfléchi :

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \frac{E_{0,i}}{c} (\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) \mathbf{e}_z = 2 \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \mathbf{e}_z.\quad (30)$$

Il aurait évidemment aussi été possible d'appliquer la loi de Faraday (26) à \mathbf{E}_{tot} ,

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{tot}} = 2E_{0,i}k \cos(kx) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{tot}}}{\partial t}\quad (31)$$

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = 2 \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \mathbf{e}_z,\quad (32)$$

en remplaçant $c = \omega/k$. Le champ magnétique se comporte donc comme une onde stationnaire en $x < 0$. Dans le vide, le vecteur de Poynting \mathbf{S}_i de l'onde électromagnétique incidente est donné par :

$$\mathbf{S}_i = \frac{\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_{0,i}^2}{c\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) = c\epsilon_0 E_{0,i}^2 \cos^2(kx - \omega t) \mathbf{e}_x.\quad (33)$$

On remarque que le vecteur de Poynting pointe donc dans la direction de propagation de l'onde électromagnétique plane. En prenant la moyenne temporelle, on a $\langle \mathbf{S}_i \rangle = (c\epsilon_0 E_{0,i}^2/2) \mathbf{e}_x$. Cette solution peut être simplifiée en considérant la densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique incidente. En effet, celle-ci est donnée par

$$u_{v,i} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \|\mathbf{E}_i\|^2 + \frac{\|\mathbf{B}_i\|^2}{\mu_0} \right).\quad (34)$$

En prenant la moyenne temporelle, on obtient que

$$\langle u_{v,i} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{0,i}^2,\quad (35)$$

et la moyenne du vecteur de Poynting peut donc s'écrire :

$$\langle \mathbf{S}_i \rangle = c \langle u_{v,i} \rangle \mathbf{e}_x.\quad (36)$$

(b) Déterminer la charge surfacique σ et le courant surfacique \mathbf{J}_s en $x = 0$.

Pour trouver la charge surfacique σ en $x = 0$, il suffit d'utiliser la loi de Gauss, étant donné que $\mathbf{E}_{\text{métal}}$ est nul et que le champ électrique dans le vide \mathbf{E}_{vide} est parallèle à la surface plane, ceci montre que $\sigma = 0$ par la condition $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_{\perp} = \sigma$. Pour le courant surfacique \mathbf{J}_s , il faut utiliser la condition $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{\parallel} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{t}$. Comme le miroir est un conducteur parfait, $\mathbf{B}_{\text{métal}} = 0$ pour $x > 0$. En utilisant l'identité vectorielle $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, on a :

$$-\mathbf{H}_{\parallel} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \times -\mathbf{H}_{\parallel}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{J}_s, \quad (37)$$

et donc

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times -\mathbf{H}_{\parallel}, \quad (38)$$

et comme $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}/\mu_0 = \mathbf{B}_{\text{tot}}(x = 0)/\mu_0$, avec l'équation (30), on a

$$\mathbf{J}_s = -2 \frac{E_{0,i}}{c\mu_0} \cos(\omega t) (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z) = 2c\epsilon_0 E_{0,i} \cos(\omega t) \mathbf{e}_y. \quad (39)$$

(c) L'expression de la force résultante est donnée par :

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\sigma \mathbf{E}_{\text{tot}} + \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_{\text{tot}}) dS, \quad (*)$$

où dS est un petit élément de surface. Donner une explication pour le facteur $1/2$. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,i} \rangle$ de l'onde incidente, puis de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,\text{tot}} \rangle$ de l'onde totale.

On remarque tout d'abord que, comme discuté en question (b), $\sigma = 0$ dans l'équation (*). Le champ électromagnétique exerce sur une surface dS du miroir une force dont l'expression est, en notation réelle :

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_{\text{tot}} dS. \quad (40)$$

L'origine du facteur $1/2$ est expliquée intuitivement. Il n'est en effet pas cohérent de supposer que la partie réfléchie du champ magnétique \mathbf{B}_r générée par la densité de courant \mathbf{J}_s puisse exercer une force sur cette même densité de courant. On ne prend donc pas en compte le champ magnétique créé par cette surface, d'où le facteur $1/2$. L'élément de force $d\mathbf{F}$ s'exprime donc comme, éqs. (30) et (39),

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} 4\epsilon_0 E_{0,i}^2 \cos^2(\omega t) dS \mathbf{e}_x. \quad (41)$$

En prenant la valeur moyenne de $d\mathbf{F}$, on obtient donc que :

$$\langle d\mathbf{F} \rangle = \epsilon_0 E_{0,i}^2 dS \mathbf{e}_x. \quad (42)$$

La pression de radiation $\langle P \rangle$ est donc finalement donnée par :

$$\langle P \rangle = \frac{\langle d\mathbf{F} \rangle}{dS} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 E_{0,i}^2 = 2\langle u_{v,i} \rangle, \quad (43)$$

avec $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ le vecteur unitaire normal à la surface. On peut également exprimer la pression en fonction du vecteur de Poynting de l'onde incidente, équation (36),

$$\langle P \rangle = 2 \frac{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \mathbf{e}_x}{c}. \quad (44)$$

On note que le facteur 2 dans les équations (43) et (44) ci-dessus est attendu en raison de la réflexion de l'onde incidente sur le miroir. Si, au contraire, la surface était telle que l'onde avait été parfaitement absorbée, ce facteur serait absent. En notant que l'amplitude des champs totaux est deux fois plus grande que les amplitudes incidentes, équations (25) et (30), on peut affirmer que $\langle u_{v,\text{tot}} \rangle = 4\langle u_{v,i} \rangle$. La pression de radiation s'écrit donc

$$\langle P \rangle = \frac{\langle u_{v,\text{tot}} \rangle}{2}. \quad (45)$$

Dans un second temps, l'expression de la pression de radiation peut également être dérivée en considérant la nature corpusculaire de la lumière.

- (d) En utilisant la relation de l'énergie d'un photon $E_\gamma = c\|\mathbf{p}_\gamma\|$, déterminer l'expression de la pression de radiation $\langle P \rangle$ produite en fonction de la puissance émise P_w et de la distance r de la surface considérée par rapport à la source.

Chaque photon incident possède une quantité de mouvement initiale \mathbf{p}_γ . Après réflexion sur le miroir parfait, sa quantité de mouvement sera donnée par $-\mathbf{p}_\gamma$. Par conséquent, la quantité de mouvement transmise par un photon est donnée par $\Delta p_\gamma = 2p_\gamma = 2E_\gamma/c$.

On estime la force exercée sur un élément de surface dS . Le nombre de photons incidents sur dS pendant un intervalle de temps dt est proportionnel au flux de photons incidents, $dN_\gamma = \Gamma dS dt$, avec $[\Gamma] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$. Chaque photon transférant Δp_γ à la surface, on peut ainsi exprimer la différence de quantité de mouvement de celle-ci,

$$dp = \Delta p_\gamma dN_\gamma = \frac{2E_\gamma}{c} \Gamma dS dt = \frac{2\Gamma_E}{c} dS dt, \quad (46)$$

avec $\Gamma_E = E_\gamma \Gamma$ le flux d'énergie associé aux photons incidents. La force infinitésimale dF exercée sur la surface dS est donc

$$dF = \frac{dp}{dt} = \frac{2\Gamma_E}{c} dS, \quad (47)$$

ce qui permet de conclure que la pression de radiation est

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{2\Gamma_E}{c}. \quad (48)$$

Le flux d'énergie Γ_E provenant d'une source homogène ponctuelle de puissance émettrice P_w s'écrit

$$\Gamma_E = \frac{P_w}{4\pi r^2}, \quad (49)$$

ce qui est substitué dans l'équation (48),

$$\langle P \rangle = \frac{P_w}{2\pi r^2 c}. \quad (50)$$

On note que dans cette description, on a une équivalence entre moyenne et valeur instantanée des champs, c.-à-d. $P \equiv \langle P \rangle$. Cette expression peut être ramenée à celle trouvée au point (c), éq. (43) en remarquant que la puissance moyenne émise par la source est liée à la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \mathbf{e}_x = \langle P_w \rangle / (4\pi r^2)$. Par conséquent, on obtient donc

$$\langle P \rangle = 2 \frac{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \mathbf{e}_x}{c} = \epsilon_0 E_{0,i}^2. \quad (51)$$

- (e) Déterminer le rayon limite R_{lim} d'une sphère métallique pour lequel celle-ci pourrait être éjectée du système solaire, en tenant compte de la pression de radiation. On suppose que le Soleil émet un rayonnement d'une puissance P_w . La section efficace de la sphère est donnée par πR^2 .

La sphère métallique est soumise à deux forces :

- la force de gravité : $\mathbf{F}_g = -(GMm/r^2)\mathbf{e}_x$, où M est la masse du Soleil et m la masse de la sphère,
- la force produite par la pression de radiation : $\mathbf{F}_p = (P_w R^2 / 2r^2 c) \mathbf{e}_x$, où R est le rayon de la sphère.

La 2^e loi de Newton donne :

$$ma = \frac{P_w}{2\pi r^2 c} \pi R^2 - \frac{GMm}{r^2}. \quad (52)$$

Pour que la sphère soit éjectée du système solaire, il faut donc que $a > 0$, ce qui permet de poser une condition sur son rayon limite $R > R_{\text{lim}}$,

$$\frac{P_w R^2}{2r^2 c} - \frac{GMm}{r^2} > 0 \implies R_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2GcMm}{P_w}}. \quad (53)$$