

28 mars 2025

Corrigé 6 : Ondes stationnaires et diffraction

1 Figures de Chladni sur une plaque carrée

Les figures de Chladni sont des motifs élégants pouvant être observés sur une plaque en vibration. Celles-ci correspondent aux modes propres de vibration de la plaque. Quand certains de ces modes sont excités, la poudre placée sur la plaque se concentrera alors aux points correspondant aux nœuds des ondes stationnaires excitées par la vibration. On souhaite décrire un modèle simple de ces figures de Chladni. Pour ce faire, on considère une plaque rectangulaire de dimensions L_x et L_y . On va tout d'abord considérer que les vibrations respectent l'équation d'onde. La définition des conditions aux bords de la plaque n'est pas évidente. Par simplicité, on va considérer que la déformation principale de la plaque est une déformation sous forme de cisaillement. Pour ce type de déformation, la pente de la déformation doit être nulle au bord dans la direction perpendiculaire au bord, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, L_y, t) = 0, \quad x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y]. \quad (*)$$

(a) En utilisant la méthode de séparation des variables, dériver les modes propres de la plaque.

L'équation d'onde en deux dimensions est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2 \nabla^2 \psi = u^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

dont les conditions aux bords sont données par les équations (*). Les conditions initiales peuvent être écrites de manière générale comme :

$$\psi(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y). \quad (2)$$

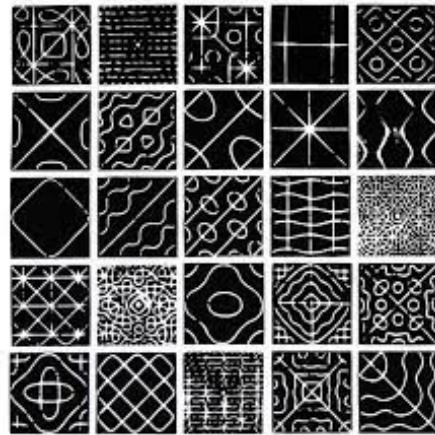
En posant que $\psi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ et en injectant cette expression dans l'équation d'onde (1), il est possible de réécrire l'équation différentielle de sorte à isoler chaque variable :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = u^2 \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right) = -u^2(k^2 + l^2) = -\omega^2. \quad (3)$$

On obtient donc trois équations différentielles pour les fonctions $X(x)$, $Y(y)$ et $T(t)$:

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ Y''(y) + l^2 Y(y) = 0, \\ T''(t) + \omega^2 T(t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Dans l'expression (4), on note que l'on a imposé $k, l, \omega \in \mathbb{R}$, tel que $-k^2, -l^2, -\omega^2 \leq 0$. Cela s'explique car une constante positive ne permet pas d'obtenir une solution compatible avec les conditions aux bords décrites en (*). En effet, considérons par exemple l'équation



$X''(x) - m^2 X(x) = 0$. La solution générale de cette équation est donnée par $X(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx}$. En utilisant les conditions aux bords (*), on observe alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) = 0 \implies X'(0) = m(A - B) = 0 \implies A = B, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, y, t) = 0 \implies X'(L_x) = mA(e^{mL_x} - e^{-mL_x}) = 2mA \sinh(mL_x) = 0. \quad (6)$$

Cette dernière égalité n'est possible que si $m = 0$, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, on résout les équations harmoniques obtenues en (4) et on obtient les formes générales suivantes :

$$\begin{cases} X(x) = A_x \sin(kx) + B_x \cos(kx), \\ Y(y) = A_y \sin(dy) + B_y \cos(dy), \\ T(t) = A_t \cos(\omega t) + B_t \sin(\omega t). \end{cases} \quad (7)$$

En suivant un raisonnement similaire à celui réalisé ci-dessus, on obtient une condition pour les coefficients A_x, B_x, A_y et B_y . On raisonne pour $X(x)$ et de même pour $Y(y)$ puisque les conditions aux bords sont similaires :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) = 0 \implies X'(0) = kA_x = 0 \implies A_x = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, y, t) = 0 \implies X'(L_x) = -kB_x \sin(kL_x) = 0. \quad (9)$$

La dernière égalité impose donc que $kL_x = n\pi$ pour que B_x soit non nul. Par conséquent, on a que $k_n = n\pi/L_x$ et de même, $l_m = m\pi/L_y$ où n et m sont des entiers. La fréquence angulaire ω peut être écrite en fonction de n et m , éq. (3) :

$$\omega_{n,m} = u\sqrt{k_n^2 + l_m^2} = u\pi\sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}}. \quad (10)$$

La forme générale des modes propres est donc donnée par l'expression suivante :

$$\psi_{n,m}(x, y, t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) [A_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + B_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t)], \quad (11)$$

où on a rassemblé les constantes $A_{n,m} = A_x^{(n)} A_y^{(m)} A_t^{(n,m)}$ et $B_{n,m} = A_x^{(n)} A_y^{(m)} B_t^{(n,m)}$ pour simplifier les expressions. On peut finalement distinguer les cas où $m \neq n = 0$ ou $n \neq m = 0$ et le cas où $n = m = 0$. Les cas $m \neq n = 0$, respectivement $n \neq m = 0$, correspondent aux modes dont la perturbation est constante le long l'axe x , respectivement l'axe y . Le cas particulier où $n = m = 0$ correspond au cas trivial où le mode propre correspond à une perturbation constante, c.-à-d. $\psi_{0,0}(x, y, t) = A_{0,0}$. La solution recherchée est en général formée d'une combinaison des modes propres et s'écrit :

$$\psi(x, y, t) = \frac{\psi_{0,0}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{n,m}(x, y, t) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{0,m}(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{n,m}(x, y, t). \quad (12)$$

Les facteurs $1/2$ et $1/4$ sont introduits afin que les définitions des coefficients donnés ci-dessous soient valides pour tous n et m . Ces coefficients $A_{n,m}$ et $B_{n,m}$ se calculent de la façon suivante :

$$A_{n,m} = \frac{2}{L_x} \frac{2}{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dx dy, \quad (13)$$

$$B_{n,m} = \frac{2}{L_x} \frac{2}{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y) \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dx dy. \quad (14)$$

- (b) Quels motifs de Chladni les modes propres trouvés donneraient-ils ? Commenter avec les résultats présentés ci-contre.

Les nœuds des modes propres correspondent aux points où $\psi_{n,m}(x, y, t) = 0$ pour tout temps t . En utilisant l'expression pour $\psi_{n,m}$, on en déduit que les nœuds correspondent à des lignes verticales et horizontales dont le nombre et la position dépendent de n et de m ,

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) = 0 \implies x_i = \frac{L_x}{n}\left(\frac{1}{2} + i\right), \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) = 0 \implies y_j = \frac{L_y}{m}\left(\frac{1}{2} + j\right), \quad \text{avec } j = 0, 1, \dots, m. \quad (16)$$

Ceci veut dire que les lignes nodales des modes propres trouvées en (a) correspondent à des motifs en grille. À première vue, on observe qu'il y a des différences majeures avec les figures de Chladni obtenues expérimentalement (cf. figure). Ceci est dû à deux raisons principales :

1. L'équation d'onde considérée n'est en réalité pas adéquate pour décrire la physique des vibrations d'une plaque. Il faudrait plutôt considérer une équation différentielle différente, de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = A \nabla^4 \psi.$$

2. Les conditions aux bords libres sont en réalité bien plus complexes à décrire. En effet, la forme exacte de ces conditions aux bords est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \text{pour } x = 0, L, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \text{pour } y = 0, L, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \quad \text{aux coins } x, y \in \{0, L\}. \quad (19)$$

2 Diffraction par un trou circulaire

La diffraction par un trou circulaire produit ce qu'on appelle une tâche d'Airy. Cette tâche est notamment la cause d'une limite de résolution angulaire des instruments optiques. Dans cet exercice, on souhaite décrire la figure de diffraction produite par un trou circulaire de rayon R , illuminé par une onde plane incidente de longueur $\lambda = 2\pi/k$, placé à une distance d d'un écran

- En supposant que, selon le principe de Huygens, chaque élément de surface du trou circulaire émet une onde sphérique d'amplitude ξ_0 , montrer que l'amplitude totale de l'onde sur un point P de l'écran est donnée par :

$$\xi(X, Y) = \frac{\xi_0}{d} \exp(i(kd - \omega t)) \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2d}\right) \int_{\text{trou}} \exp\left(-ik \frac{xX + yY}{d}\right) dx dy,$$

où (X, Y) et (x, y) sont, respectivement, les coordonnées du point P sur l'écran et d'un point sur la surface du trou. Faire les hypothèses $x, y, X, Y \ll d$ (approximation de Fraunhofer), $x \ll X$ et $y \ll Y$ pour dériver ce résultat.

On note un point P sur l'écran et on suppose que chaque élément de surface $dx dy$, noté M , du trou est émetteur d'une onde sphérique d'amplitude ξ_0 (principe de Huygens). On dénote de manière générale les coordonnées du point P par (X, Y, d) et celles de l'élément

de surface M par $(x, y, 0)$. La distance entre ces deux points est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta r(x, y, X, Y) &= \|MP\| = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + d^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + X^2 + Y^2 + d^2 - 2(xX + yY)}.\end{aligned}\quad (20)$$

Puisque l'écran est considéré suffisamment loin, on a donc que $x, y, X, Y \ll d$.

$$\Delta r(x, y, X, Y) \approx d \left(1 - \frac{xX + yY}{d^2} + \frac{x^2 + X^2 + y^2 + Y^2}{2d^2} \right). \quad (21)$$

De plus, en utilisant les hypothèses $x, y, X, Y \ll d, x \ll X$ et $y \ll Y$ on a :

$$\Delta r(x, y, X, Y) \approx d \left(1 - \frac{xX + yY}{d^2} + \frac{X^2 + Y^2}{2d^2} \right). \quad (22)$$

En tenant compte de l'hypothèse que chaque élément de surface $dx dy$ est émetteur d'une onde sphérique de même amplitude ξ_0 , l'amplitude totale de l'onde au point P est donnée par l'expression suivante :

$$\xi(X, Y) = \int_{\text{trou}} \frac{\xi_0}{\Delta r} e^{i(k\Delta r(x, y, X, Y) - \omega t)} dx dy. \quad (23)$$

Par simplicité, on ne considère que le terme $\xi_0/\Delta r$ peut être approximé à l'ordre 0 par ξ_0/d afin de considérablement simplifier les calculs. Cette approximation peut être justifiée de manière similaire à celle présentée à l'exercice 1, série 4, sur les fentes de Young décalées. En remplaçant l'expression de Δr dans l'exponentielle, on trouve finalement :

$$\xi(X, Y) = \frac{\xi_0}{d} e^{i(kd - \omega t)} \exp\left(ik \frac{X^2 + Y^2}{2d}\right) \int_{\text{trou}} \exp\left(-ik \frac{xX + yY}{d}\right) dx dy. \quad (24)$$

- (b) En utilisant des coordonnées polaires, $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$, démontrer que l'expression de l'intensité moyenne est donnée par :

$$I(r) = I_0 \left(\frac{2J_1(krR/d)}{krR/d} \right)^2. \quad (\dagger)$$

Dans le cas d'un trou circulaire, il est intéressant de considérer des coordonnées polaires pour les coordonnées (x, y) et (X, Y) . On paramétrise donc P par les coordonnées (r, θ) et M par (ρ, ϕ) et on utilise le fait que $x, y, X, Y \ll d$. La distance séparant M de P , Δr , s'écrit donc :

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + y^2 + X^2 + Y^2 + d^2 - 2(xX + yY)} \quad (25)$$

$$= \sqrt{\rho^2 + r^2 + d^2 - 2(\rho r \cos \phi \cos \theta + \rho r \sin \phi \sin \theta)} \quad (26)$$

$$\approx \sqrt{d^2 - 2r\rho \cos \theta \cos \phi - 2r\rho \sin \theta \sin \phi}. \quad (27)$$

En utilisant les identités trigonométriques données dans l'énoncé, on peut simplifier l'expression :

$$\Delta r \approx d \left[1 - \frac{r\rho}{d^2} \cos(\theta - \phi) \right]. \quad (28)$$

En considérant l'intégrale sur la surface du trou circulaire, l'intégrale (23) devient :

$$\xi(r, \theta) = \frac{\xi_0}{d} e^{i(kd - \omega t)} \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left[-ik \frac{r\rho}{d} \cos(\theta - \phi)\right]. \quad (29)$$

En effectuant le changement de variable $\pi/2 + z = \phi - \theta$ et en translatant les bornes d'intégrations (ce que l'on peut faire car la fonction est périodique de période 2π), on obtient une intégrale de la forme de la fonction de Bessel,

$$\begin{aligned}\xi(r, \theta) &= \frac{\xi_0}{d} e^{i(kd-\omega t)} \int_0^R d\rho \rho \int_{-\pi}^{\pi} dz \exp\left[-ik \frac{r\rho}{d} \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)\right] \\ &= \frac{\xi_0}{d} e^{i(kd-\omega t)} \int_0^R d\rho \rho \int_{-\pi}^{\pi} dz \exp\left(ik \frac{r\rho}{d} \sin z\right) \\ &= \frac{2\pi\xi_0}{d} e^{i(kd-\omega t)} \int_0^R d\rho \rho J_0\left(\frac{kr\rho}{d}\right).\end{aligned}\quad (30)$$

En faisant le changement de variable $u = kr\rho/d$ et en utilisant la relation de récurrence donnée dans l'énoncé, on a

$$\int_0^R d\rho \rho J_0\left(\frac{kr\rho}{d}\right) = \left(\frac{d}{kr}\right)^2 \int_0^{krR/d} du u J_0(u) = \frac{dR}{kr} J_1\left(\frac{krR}{d}\right). \quad (31)$$

On obtient, en l'injectant dans (30), que :

$$\xi(r, \theta) = \frac{\xi_0 A}{d} e^{i(kd-\omega t)} \frac{2J_1(krR/d)}{krR/d}. \quad (32)$$

avec $A = \pi R^2$ l'aire de la fente circulaire. On remarque notamment que le facteur 2 est rassemblé avec la fonction de Bessel puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2J_1(x)}{x} = 1, \quad (33)$$

L'intensité $I(r)$ étant proportionnelle au carré de l'amplitude $|\xi|^2$,

$$I(r) = I_0 \left(\frac{2J_1(krR/d)}{krR/d} \right)^2, \quad (34)$$

où $I_0 \propto |\xi_0 A/d|^2$ est l'intensité au centre de l'écran.

L'équation (†) ci-dessus correspond à l'intensité d'une tâche d'Airy. Cette figure de diffraction est rencontrée dans les systèmes optiques possédants une géométrie circulaire et en limite le pouvoir de résolution angulaire.

- (c) Quelle condition entre $D = 2R$, le diamètre du trou, et λ est nécessaire à l'observation d'une figure de diffraction ?

On commence par exprimer $r = \Delta r \sin \varphi \approx d \sin \varphi$. Par conséquent, l'intensité moyenne sur l'écran est donnée par :

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{2J_1(kR \sin \varphi)}{kR \sin \varphi} \right)^2. \quad (35)$$

La condition pour observer une figure de diffraction est qu'il existe un angle φ tel que $kR \sin \varphi \approx kR\varphi \geq x_1$, où x_1 est le premier zéro de la fonction J_1 . Si l'écran est trop étroit, tel qu'un point en φ tombe au-delà du bord de l'écran, on ne verra pas de figure d'interférence. On obtient que :

$$kR\varphi = \frac{\pi D}{\lambda} \varphi \geq x_1 \implies \varphi \geq \frac{x_1 \lambda}{\pi D} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (36)$$

Pour un écran suffisamment large, on aura plutôt que $kR \geq |kR \sin \varphi| = x_1$, et on obtient

alors une condition entre la taille de la fente et la longueur d'onde incidente,

$$kR = \frac{\pi D}{\lambda} \geq x_1 \implies D \geq \frac{x_1}{\pi} \lambda \approx 1.22\lambda. \quad (37)$$

Cette condition est similaire, à un facteur près, à celle trouvée pour la diffraction par une fente rectangulaire de l'exercice 2 de la série 4.

- (d) On considère deux sources séparées d'un angle $\vartheta \ll 1$ par rapport au trou, produisant chacune une tâche d'Airy sur l'écran, comme illustré sur la figure ci-dessus. Discuter des conditions sur l'angle ϑ afin que les sources soient distinguables sur l'écran, c'est-à-dire que l'on puisse distinguer leurs tâches d'Airy respectives.

On s'intéresse désormais à caractériser le pouvoir de résolution angulaire d'un instrument optique. Pour ce faire, on considère désormais deux sources lumineuses incidentes sur la fente, séparées d'un angle $\vartheta \ll 1$. Les tâches d'Airy produites sur l'écran par ces deux sources sont donc séparées d'une distance $\delta = \Delta r \sin \vartheta \approx d\vartheta$ à leurs pics, Fig. 1.

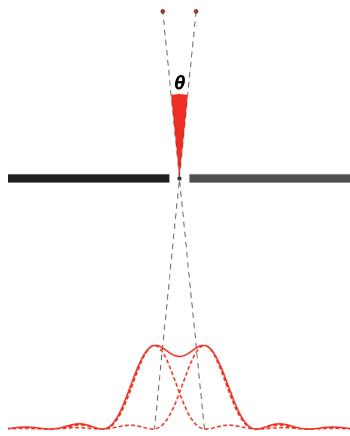


Figure 1 – Deux sources séparées d'un angle ϑ produisent chacune une tâche d'Airy. L'intensité observée sur l'écran correspond à la somme de ces deux tâches. Le pouvoir de résolution angulaire est caractérisé par la capacité à distinguer les deux tâches.

Plusieurs critères existent afin de définir le pouvoir de résolution angulaire d'un instrument optique. Ils se résument à définir une limite de séparation angulaire minimale ϑ_{crit} entre les deux sources. Le critère de Rayleigh consiste à dire que la distance minimale entre deux sommets d'une tâche d'Airy doit être de la valeur du premier point d'annulation. Cela donne donc que $kR \sin \vartheta_{\text{crit}} \approx kR\vartheta_{\text{crit}} = x_1$. On inverse cette relation pour obtenir $\vartheta_{\text{crit}} = 1.22\lambda/D$. Deux sources peuvent donc être distinguées si leur séparation angulaire ϑ est suffisante,

$$\vartheta \geq \vartheta_{\text{crit}} = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (\text{critère de Rayleigh}). \quad (38)$$

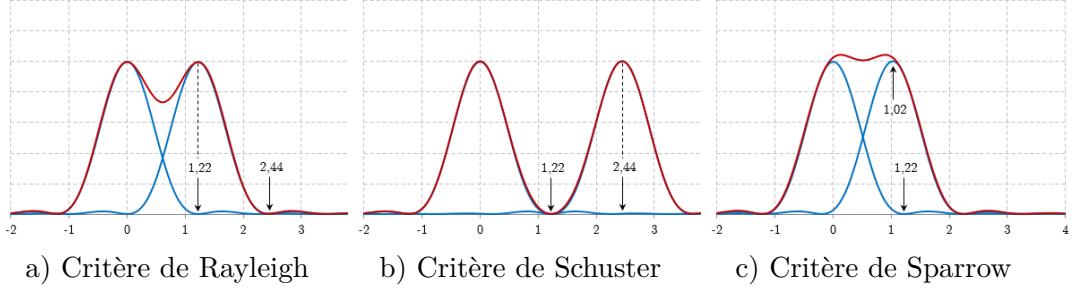
Un deuxième critère, le critère de Schuster, consiste simplement à dire que le premier point d'annulation des deux tâches doivent coïncider, cela revient donc à multiplier par deux le critère de Rayleigh, c'est-à-dire :

$$\vartheta \geq \vartheta_{\text{crit}} = 2.44 \frac{\lambda}{D}, \quad (\text{critère de Schuster}). \quad (39)$$

Finalement, le critère de Sparrow stipule que le premier point d'inflexion des deux tâches d'Airy coïncide,

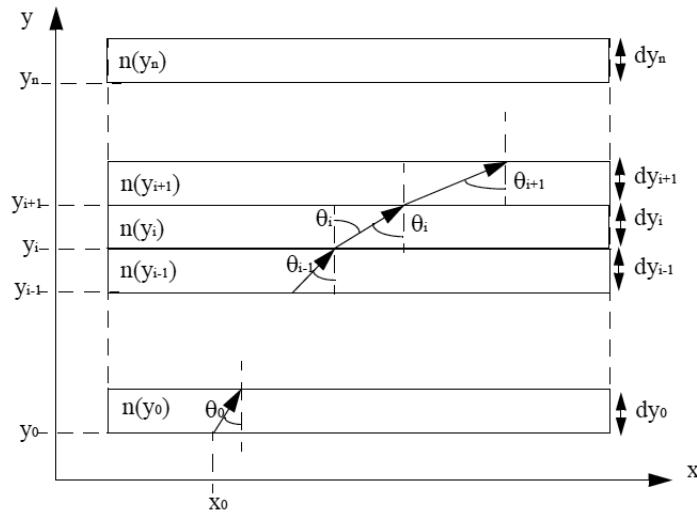
$$\vartheta \geq \vartheta_{\text{crit}} = 1.02 \frac{\lambda}{D}, \quad (\text{critère de Sparrow}). \quad (40)$$

La figure ci-dessous illustre la différence entre ces trois critères.



3 Trajectoire dans un milieu non homogène (revisité)

On considère une situation analogue à l'exercice 3, série 4. Un milieu non homogène possède un indice de réfraction variable $n(y)$ le long de la direction y . Comme illustré sur la figure, un rayon de lumière entre dans le milieu. On note θ l'angle entre la trajectoire du rayon et l'axe y .



(a) Montrer que l'équation de la trajectoire du rayon est :

$$x = x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy'}{\sqrt{n^2(y')/C^2 - 1}}, \quad (\ddagger)$$

où C est une constante à déterminer.

On divise le milieu en couches N infinitésimales d'épaisseur dy_i , $i = 0, \dots, N$. À chacune de ces couches correspond un indice de réfraction constant $n(y_i)$. On définit θ_i l'angle du rayon lumineux dans la couche dy_i . En accord avec la loi de Snell-Descartes pour la réfraction, on peut alors écrire :

$$n(y_i) \sin \theta_i = C, \quad i = 0, \dots, N. \quad (41)$$

De plus :

$$\frac{dx_i}{dy_i} = \tan \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{C/n(y_i)}{\sqrt{1 - C^2/n(y_i)^2}}. \quad (42)$$

En passant à la limite :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{n(y)^2/C^2 - 1}}.$$

En intégrant de y_0 jusqu'à y quelconque :

$$x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy'}{\sqrt{n(y')^2/C^2 - 1}}. \quad (43)$$

(b) On souhaite calculer la trajectoire de la lumière pour un milieu où l'indice de réfraction est linéaire, c.-à-d. $n(y) = n_0 + ay$. On suppose le point de départ en $x_0 = y_0 = 0$ et que la lumière est initialement parallèle à l'axe x . Donner une expression de la trajectoire $y(x)$. Calculer le rayon de courbure au point $x_0 = y_0 = 0$. Comparer ce résultat à celui de l'exercice 3, série 4.

Indications : $d \cosh^{-1}(x)/dx = 1/\sqrt{x^2 - 1}$. La formule du rayon de courbure pour une trajectoire $y(x)$ est donnée par :

$$\rho(x) = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{y''(x)}. \quad (\S)$$

On détermine la constante C en utilisant les conditions initiales. Puisque la lumière est parallèle à l'axe x , en $y = 0$, on a que $C = n_0$. On note que, bien que le rayon soit initialement perpendiculaire au gradient d'indice de réfraction $n(y)$, sa trajectoire subira toutefois une déviation par le principe de Huygens (voir série 4, exercice 3). Par conséquent, en utilisant l'expression (43) et l'indice de réfraction donné par $n(y) = n_0 + ay$ dans laquelle on impose $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} x(y) &= \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{(n_0 + ay')^2/n_0^2 - 1}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + ay/n_0)^2 - 1}} = \dots \\ \dots &= \frac{n_0}{a} \int_1^{1+ay/n_0} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{n_0}{a} \cosh^{-1}(z) \Big|_1^{1+ay/n_0} = \frac{n_0}{a} \cosh^{-1}\left(1 + \frac{ay}{n_0}\right), \end{aligned} \quad (44)$$

où on a changé de variable pour simplifier l'intégration, $z = 1 + ay/n_0$. La trajectoire $y(x)$ du rayon lumineux est donc donnée par :

$$y(x) = \frac{n_0}{a} \left(\cosh\left(\frac{ax}{n_0}\right) - 1 \right). \quad (45)$$

En utilisant l'expression (45) de $y(x)$ et l'expression du rayon de courbure (§) donnée en indication, on obtient :

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{ax}{n_0}\right), \quad y''(x) = \frac{a}{n_0} \cosh\left(\frac{ax}{n_0}\right) \implies \rho(x) = \frac{n_0}{a} \frac{(1 + \sinh^2(ax/n_0))^{3/2}}{\cosh(ax/n_0)}. \quad (46)$$

Évalué en $x = 0$, le rayon de courbure donne $\rho(0) = n_0/a$. Cette solution est égale à celle obtenue en exercice 3, série 4, où le rayon de l'arc de cercle est donnée par $R(x) = n(x)/a$.

Le phénomène de mirages est également dû à un indice de réfraction inhomogène dans les couches atmosphériques. L'indice de réfraction dépend de la pression, de la température et de l'humidité. Pour simplifier, on considère que l'indice de réfraction est donné par la relation $n(y) = n_0\sqrt{1 + ay}$.

(c) Démontrer la forme générale de la trajectoire $y(x)$ d'un rayon lumineux qui entre dans le milieu en $x_0 = y_0 = 0$ avec un angle $\theta_0 \in]0, \pi[$.

On définit θ_0 l'angle initial du rayon lumineux par rapport à l'axe y . En posant, éq. (41), que $C = n(y) \sin(\theta(y)) = n_0 \sin(\theta_0)$ et en utilisant l'éq. (43), on obtient donc l'intégrale suivante avec $x_0 = y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \left(\frac{1 + ay'}{\sin^2 \theta_0} - 1 \right)^{-1/2} dy' = \int_0^y \left(\cot^2 \theta_0 + \frac{ay'}{\sin^2 \theta_0} \right)^{-1/2} dy' = \dots \\ \dots &= \frac{2 \sin^2 \theta_0}{a} \left(\sqrt{\cot^2 \theta_0 + \frac{ay}{\sin^2 \theta_0}} - \cot \theta_0 \right), \end{aligned} \quad (47)$$

avec la fonction cotangente $\cot \theta = 1/\tan \theta$. En exprimant (47) en fonction de x , on obtient

alors la forme générale de l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux pour un indice de réfraction $n(y) = n_0\sqrt{1+ay}$:

$$y(x) = a \left(\frac{x}{2 \sin \theta_0} \right)^2 + x \cot \theta_0. \quad (48)$$

La trajectoire observée est donc parabolique.

- (d) En quoi cette trajectoire permet-elle d'expliquer le phénomène de mirage ? Considérer pour cela une source lumineuse en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ qu'un observateur regarde depuis $(x, y) = (L, 0)$. Discuter l'influence du signe du paramètre a sur le type de mirage observé.

On note tout d'abord que l'indice de réfraction de l'air peut être approximé comme $n = 1 + \delta(p/p_{\text{atm}})/(T/T_{\text{atm}})$, où $\delta \ll 1$ est une constante positive. Un milieu chaud aura donc un indice de réfraction plus faible qu'un milieu froid.

Associons x à la direction horizontale et y à la direction verticale par rapport au sol. Le signe de a , c'est-à-dire la pente du profil d'indice de réfraction, détermine l'orientation de la parabole. Si n augmente avec l'altitude (sol chaud, air froid), alors a est positif et la parabole est convexe. Inversement, quand n diminue avec l'altitude (sol froid, air chaud), a est négatif et la parabole est concave. On distingue donc deux types de mirages : le mirage supérieur ($a < 0$) et inférieur ($a > 0$).

Dans le cas où n augmente avec l'altitude, le chemin optique entre la source lumineuse et l'observateur est une parabole convexe. L'observateur percevra donc une image de la source comme si celle-ci était située au-dessous de sa position réelle. Ces mirages inférieurs, aussi appelés mirages « chauds », sont par exemple observés sur les routes lors de fortes températures : on a typiquement l'impression de voir des « flaques » bleutées (le ciel) sur la route. Les mirages supérieurs se forment lorsque le chemin optique est une parabole concave (lorsque n diminue avec l'altitude) et sont communément observés dans les régions polaires où le sol gèle et peut être plus froid que l'air au-dessus de celui-ci. L'observateur percevra alors des mirages situés au-dessus de la position réelle de la source.

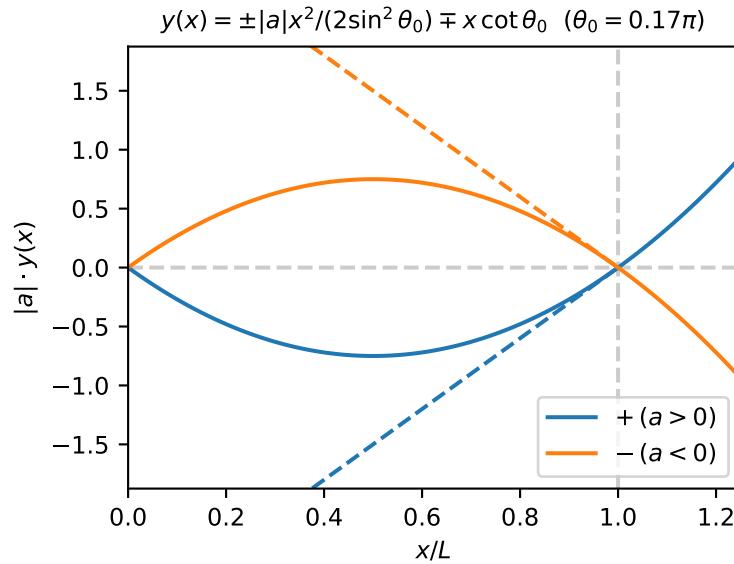


Figure 2 – Illustration des trajectoires suivies par deux rayons passant simultanément par $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x, y) = (L, 0)$. Les rayons lumineux (traits plein) suivent des paraboles données par l'équation (48). L'observateur oriente son regard le long des trajectoires en traitillé, d'où la dénomination de mirages inférieurs ($a > 0$, regard vers le sol) et supérieurs

$(a < 0$, regard vers le ciel).

challenge

- (e) Le principe de Fermat affirme que la trajectoire suivie par la lumière entre deux points A et B est telle que le temps de trajet soit minimal. Montrer que minimiser le chemin optique L_{AB} est équivalent à minimiser le temps de trajet,

$$L_{AB} = \int_A^B n \, ds,$$

où n est l'indice de réfraction du milieu. En dériver l'équation (‡) pour la trajectoire.

La distance ds parcourue sur la trajectoire par la lumière en un temps dt est donnée par :

$$ds = v \, dt = \frac{c}{n} \, dt. \quad (49)$$

Par conséquent, le temps de trajet T_{AB} nécessaire est donné par :

$$T_{AB} = \int_A^B \frac{n \, ds}{c} = \frac{1}{c} \int_A^B n \, ds = \frac{1}{c} L_{AB}. \quad (50)$$

Il est donc justifié d'affirmer que minimiser le temps de trajet revient à minimiser le chemin optique.

On cherche désormais à montrer l'équivalence entre la minimisation de (50) et l'équation (‡). L'intégrale donnée en (50) est une intégrale curviligne qui, dans le cas où la trajectoire est paramétrisée par $x(y)$, et en utilisant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy$, s'écrit :

$$L_{AB} = \int_A^B n(y) \sqrt{1 + x'(y)^2} \, dy = \int_A^B \mathcal{L}(y, x(y), x'(y)) \, dy. \quad (51)$$

Afin de minimiser la quantité L_{AB} , on applique l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \implies \frac{d}{dx} \left(\frac{n(y)x'(y)}{\sqrt{1 + x'(y)^2}} \right) = 0. \quad (52)$$

En intégrant (52) et en introduisant une constante C ,

$$\frac{n(y)x'(y)}{\sqrt{1 + x'(y)^2}} = C \implies (n^2(y) - C^2)x'(y)^2 = C^2 \implies x(y) = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}}. \quad (53)$$

La dernière expression correspond exactement au résultat trouvé en point (a). De plus, la constante C est également analogue. En effet, on remarque que $x'(y) = dx/dy = \tan \theta(y)$. De fait, cela donne que :

$$C = \frac{n(y)x'(y)}{\sqrt{1 + x'(y)^2}} = n(y) \frac{\tan \theta(y)}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta(y)}} = n(y) \sin \theta(y). \quad (54)$$

Ceci redonne donc le résultat précédemment obtenu par la loi de Snell-Descartes, éq. (41), et permet de conclure sur l'équivalence des deux méthodes.