21 mars 2025

Corrigé 5 : Ondes stationnaires

1 Ondes stationnaires dans une colonne d'eau

Un long cylindre vertical de rayon R et de longueur L, ouvert à son extrémité supérieure, est rempli d'une colonne d'eau de hauteur h. La hauteur de la colonne d'air est notée $H = L - h$. Une pompe de débit Q permet d'ajuster h. Un diapason, dont la fréquence propre est ν, est placé au sommet du cylindre. Dans un premier temps, on suppose que l'eau est un milieu opaque (qui ne permet pas la transmission d'ondes sonores).

(a) Déterminer les hauteurs de la colonne d'air H_n pour lesquelles on observe une résonance associée au n^{e} mode propre de l'onde sonore du diapason. On note u_{air} la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air.

On commence par s'intéresser aux modes propres dans la colonne d'air pour une hauteur H fixée. On exprime la fonction d'onde stationnaire à partir de l'indication,

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx+\alpha)\cos(\omega t + \phi_t), \tag{1}$$

où ϕ_t correspond à un déphasage temporel. On choisit l'origine $x = 0$ à l'interface entre l'eau et l'air, et $x = H > 0$ à l'extrémité supérieure, ouverte, du cylindre. Les conditions aux limites à imposer sont donc

— un nœud en $x = 0$ (l'eau étant considérée comme un milieu opaque), ce qui implique que $\alpha = 0$, et

— un ventre en $x = H$, puisque l'extrémité supérieure du cylindre est ouverte.

La dérivée spatiale de la fonction d'onde est nulle au ventre, ce qui donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(H,t) = \xi_0 k \cos(kH)\cos(\omega t) = 0 \implies \cos(kH) = 0. \tag{2}$$

On obtient ainsi les nombres d'onde k_n et les fréquences propres ν_n des modes :

$$k_n H = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \nu_n = \frac{k_n u}{2\pi} = \frac{(2n+1)}{4H} u_{\text{air}}, \tag{3}$$

où $n = 0, 1, 2, ...$ et u_{air} est la vitesse de propagation.

On remarque cependant que, selon les instructions de l'exercice, la fréquence ν du diapason est fixée, alors que la hauteur de la colonne d'air H est variable. On transforme donc la condition de résonance (3) afin de fixer ν pour obtenir un ensemble de hauteurs H_n pour lesquelles une onde stationnaire existe,

$$H_n = \frac{(2n+1)}{4\nu} u_{\text{air}}. \tag{4}$$

(b) À l'aide de la pompe, on fait monter le niveau d'eau. Déterminer le temps Δt séparant deux instants où le cylindre entre en résonance avec le diapason.

On a une résonance lorsque la fréquence du diapason est égale à une des fréquences propres. La distance entre deux hauteurs de liquide pour deux résonances consécutives est donc :

$$\Delta H = H_{n+1} - H_n = \frac{u_{\text{air}}}{2\nu}. \tag{5}$$

La variation de hauteur ΔH dans un temps Δt est : $\Delta H = (Q/\pi R^2)\Delta t$. Finalement :

$$\Delta t = \frac{\pi R^2 u_{\text{air}}}{2Q\nu} = 237\,\text{s}. \tag{6}$$

Dans un second temps, on ne considère plus l'eau comme étant un milieu opaque. On considère d'abord une onde progressive incidente sinusoïdale d'amplitude ξ_i^0 et de fréquence ω. À l'interface entre l'eau et l'air, l'onde incidente se décompose en une onde réfléchie, se propageant dans l'air, et une onde transmise dans l'eau.

(c) En posant les conditions de continuité de l'amplitude du déplacement et de la pression à l'interface, dériver les amplitudes ξ_r^0 et ξ_t^0 des ondes transmises et réfléchies en fonction de l'amplitude incidente ξ_i^0. On note κ_{air} et κ_{eau} les coefficients de compressibilités des milieux respectifs.

À l'interface entre les deux milieux, l'onde transmise ne change pas de fréquence ω, mais uniquement de longueur d'onde, caractérisée par le nombre d'onde k. Il en découle que

$$\omega = k_{\text{air}} u_{\text{air}} = k_{\text{eau}} u_{\text{eau}}. \tag{7}$$

On pose donc la forme générale des ondes progressives pour l'onde incidente, réfléchie et transmise :

$$\text{Onde incidente :} \quad \psi_i(x,t) = \xi_i^0 \sin(k_{\text{air}}x - \omega t) \tag{8}$$

$$\text{Onde réflechie :} \quad \psi_r(x,t) = \xi_r^0 \sin(-k_{\text{air}}x - \omega t) \tag{9}$$

$$\text{Onde transmise :} \quad \psi_t(x,t) = \xi_t^0 \sin(k_{\text{eau}}x - \omega t) \tag{10}$$

Sans perte de généralité, on pose $x = 0$ la position de l'interface. Il est nécessaire d'imposer des conditions de continuité à l'interface. La première condition est celle de continuité des amplitudes, imposant que l'amplitude des ondes résultantes dans l'air $\psi_1 = \psi_i + \psi_r$ et dans l'eau $\psi_2 = \psi_t$ soient égales à l'interface :

$$\psi_1(0,t) = \xi_i^0 \sin(-\omega t) + \xi_r^0 \sin(-\omega t) = \xi_t^0 \sin(-\omega t) = \psi_2(0,t) \implies \xi_i^0 + \xi_r^0 = \xi_t^0. \tag{11}$$

La deuxième condition est la condition de continuité sur la pression. La pression est donnée par l'expression suivante (vue en cours) :

$$p(x,t) = p_0 - \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t), \tag{12}$$

où p_0 est la pression d'équilibre qui est uniforme dans l'eau et l'air. Ceci donne donc la condition suivante :

$$\kappa_{\text{air}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \kappa_{\text{eau}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \tag{13}$$

Explicitement, ceci donne une deuxième condition sur les amplitudes ξ_i^0, ξ_r^0 et ξ_t^0, valable en tout temps t :

$$\kappa_{\text{air}} k_{\text{air}} (\xi_i^0 - \xi_r^0) = \kappa_{\text{eau}} k_{\text{eau}} \xi_t^0. \tag{14}$$

En résolvant les équations (11) et (14) pour ξ_r^0 et ξ_t^0, on obtient les expressions suivantes :

$$\xi_r^0 = \frac{\kappa_{\text{eau}} k_{\text{eau}} - \kappa_{\text{air}} k_{\text{air}}}{\kappa_{\text{eau}} k_{\text{eau}} + \kappa_{\text{air}} k_{\text{air}}} \xi_i^0 = R\xi_i^0, \tag{15}$$

$$\xi_t^0 = \frac{2\kappa_{\text{air}} k_{\text{air}}}{\kappa_{\text{eau}} k_{\text{eau}} + \kappa_{\text{air}} k_{\text{air}}} \xi_i^0 = T\xi_i^0, \tag{16}$$

où R et T sont appelés « coefficients de Fresnel ».

Finalement, on s'intéresse à la possibilité d'observer des ondes stationnaires qui se développent dans l'eau et l'air.

(d) Déterminer les conditions nécessaires pour qu'une onde stationnaire soit présente dans les deux milieux en fonction des nombres d'onde k_{air} et k_{eau}, des coefficients de compressibilité κ_{air} et κ_{eau}, de H ainsi que L.

L'onde transmise à l'interface possède une longueur d'onde différente, mais une fréquence est égale à l'onde incidente. Par conséquent, par la relation d'onde dans l'air et l'eau, on trouve que les nombres d'onde k_{air} et k_{eau} doivent satisfaire la relation donnée en (7). On écrit la solution d'onde

$$\begin{aligned} \text{dans l'air :} \quad & \psi_1(x,t) = A\sin(k_{\text{air}}x + \alpha_1)\cos(\omega t + \phi_t), && (17)\\ \text{et dans l'eau :} \quad & \psi_2(x,t) = B\sin(k_{\text{eau}}x + \alpha_2)\cos(\omega t + \phi_t). && (18)\end{aligned}$$

Pour simplifier les développements, on choisit de poser $x = 0$ le fond du cylindre, et donc $x = L$ l'extrémité ouverte du cylindre ainsi que $x = L - H$ la position de l'interface. Les conditions aux limites sont :

- un nœud en $x = 0$ (fond du cylindre), ce qui donne : $\alpha_2 = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$,
- un ventre en $x = L$, car l'extrémité supérieure du cylindre est ouverte, ce qui donne $\alpha_1 + k_{\text{air}}L = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Selon l'indication, on se concentre sur les modes fondamentaux par simplicité, donc $n = m = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \text{dans l'air :} \quad & \psi_1(x,t) = A\cos(k_{\text{air}}(L - x))\cos(\omega t + \phi_t), && (19)\\ \text{dans l'eau} \quad & \psi_2(x,t) = B\sin(k_{\text{eau}}x)\cos(\omega t + \phi_t). && (20)\end{aligned}$$

À l'interface, on impose la continuité des solutions d'onde. En effet, ψ représente le déplacement infinitésimal du milieu. Puisque le déplacement de l'interface doit être le même dans les deux milieux, cela implique donc que $\psi_1(H,t) = \psi_2(H,t)$. Ceci donne l'équation suivante :

$$A\cos(k_{\text{air}}(L - H)) = B\sin(k_{\text{eau}}H). \tag{21}$$

Comme au point (c), la pression doit également être continue à l'interface. On applique de la même manière qu'en (14)

$$\kappa_{\text{air}}k_{\text{air}}A\sin(k_{\text{air}}(L - H)) = \kappa_{\text{eau}}k_{\text{eau}}B\cos(k_{\text{eau}}H). \tag{22}$$

Ces deux équations (21) et (22) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \cos(k_{\text{air}}(L-H)) & -\sin(k_{\text{eau}}H) \\ \kappa_{\text{air}}k_{\text{air}}A\sin(k_{\text{air}}(L-H)) & -\kappa_{\text{eau}}k_{\text{eau}}\cos(k_{\text{eau}}H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Pour que (A, B) donne une solution non triviale, il faut imposer que le déterminant de la matrice soit nul,

$$\kappa_{\text{air}}k_{\text{air}}\sin(k_{\text{air}}(L-H))\sin(k_{\text{eau}}H) - \kappa_{\text{eau}}k_{\text{eau}}\cos(k_{\text{air}}(L-H))\cos(k_{\text{eau}}H) = 0. \tag{24}$$

Pour montrer que cette équation est cohérente, il est intéressant de considérer le cas où les deux milieux sont les mêmes, c.-à.-d. $k = k_{\text{air}} = k_{\text{eau}}$ ainsi que $\kappa = \kappa_{\text{air}} = \kappa_{\text{eau}}$. L'équation donne

$$\begin{aligned} \kappa k\sin(k(L-H))\sin(kH) - \kappa k\cos(k(L-H))\cos(kH) = 0 && (25)\\ \cos(kL - 2kH) - \cos(kL) - \cos(kL) - \cos(kL - 2kH) = 0 && (26)\\ \cos(kL) = 0, && (27)\end{aligned}$$

ce qui est la condition pour une onde stationnaire dans une cavité semi-ouverte.

2 Timbre d'un instrument à cordes

Dans cet exercice, on propose d'étudier les vibrations d'une corde de longueur L dans les cas où elle est initialement pincée ou frappée. On considère la corde sujette à une tension T et de masse linéique μ. La corde est fixe à chacune de ses extrémités.

Pour commencer, on considère une corde pincée en son milieu, c'est-à-dire que la corde est initialement de forme triangulaire, avec le sommet situé à égale distance des extrémités fixes. Le sommet est déplacé de A par rapport à la position au repos de la corde.

(a) Déterminer la forme générale de la solution de l'équation d'onde. Identifier les modes propres du système.

On remarque que la condition initiale exhibe un profil qui ne correspond pas à la forme sinusoïdale habituelle de la solution à l'équation d'onde. En revanche, ce profil peut être décomposé en une superposition de modes propres, c'est-à-dire l'ensemble de fonctions solutions de l'équation d'onde satisfaisant aux conditions aux bords. Afin de déterminer l'évolution de la fonction d'onde totale $\psi(x,t)$, on procède par l'approche suivante,

1. On cherche une solution générale à l'équation d'onde par séparation des variables afin d'identifier les modes propres,
2. On projette la condition initiale sur la base fonctionnelle formée par les modes propres trouvés au point précédent,
3. Les coefficients obtenus par projection de la condition initiale sont insérés dans l'expression de la solution totale en tenant compte de la dépendance temporelle de chaque mode propre déterminé à l'étape 1.

On résout l'équation d'onde unidimensionnelle par séparation de variables. On utilise l'indication en écrivant $\psi_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, qu'on introduit dans l'équation d'onde afin d'obtenir des équations harmoniques, associées au n^{e} mode propre, séparées pour $X_n(x)$ et $T_n(t)$,

$$X_n''(x) + k_n^2 X_n(x) = 0, \tag{28}$$

$$T_n''(t) + u^2 k_n^2 T_n(t) = 0. \tag{29}$$

En résolvant les équations (28) et (29), on obtient les solutions de forme générale suivantes :

$$X_n(x) = A_x^{(n)} \cos(k_n x) + B_x^{(n)} \sin(k_n x), \tag{30}$$

$$T_n(t) = A_t^{(n)} \cos(k_n ut) + B_t^{(n)} \sin(k_n ut). \tag{31}$$

Les conditions aux bords fixes s'expriment

$$\psi_n(0,t) = \psi_n(L,t) = 0. \tag{32}$$

En imposant (32), on obtient des conditions sur les paramètres $A_x^{(n)}$, $B_x^{(n)}$ et k_n :

$$X_n(0) = 0 \implies A_x^{(n)} = 0, \tag{33}$$

$$X_n(L) = 0 \implies B_x^{(n)} \sin(k_n L) = 0. \tag{34}$$

Cette dernière égalité impose que $\sin(k_n L) = 0$. Par conséquent, on obtient que $k_n = n\pi/L$. Cette condition sur le nombre d'onde permet d'identifier les modes propres du système,

$$\psi_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(k_n x)\left[b_n \cos(k_n ut) + c_n \sin(k_n ut)\right], \tag{35}$$

où on a rassemblé les constantes $b_n = B_x^{(n)} A_t^{(n)}$ et $c_n = B_x^{(n)} B_t^{(n)}$. Une solution générale, satisfaisant les conditions aux bords, s'écrit donc

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x,t). \tag{36}$$

Ceci conclut la première partie du raisonnement (étape 1. de la liste en page 4).

(b) Imposer que la solution de l'équation d'onde trouvée au point (a) satisfasse les conditions initiales, en déduire que

$$\psi(x, t=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8A(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right).$$

On écrit formellement les conditions initiales et les conditions aux bords de la corde pincée. Aux conditions initiales, la corde est pincée en son centre et immobile. Ceci ce traduit par une fonction d'onde « chapeau » dont la dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \forall x \in [0, L], \qquad \text{et} \qquad \psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2Ax}{L} & \text{si } 0 \leq x \leq L/2, \\ \dfrac{2A}{L}(L-x) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{37}$$

On cherche dès à présent à déterminer les coefficients b_n et c_n de telle sorte que les conditions initiales (37) soient satisfaites, notamment,

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x), \tag{38}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n k_n u \sin(k_n x) = 0. \tag{39}$$

L'équation (39) doit être satisfaite pour n'importe quel choix de $k_n = n\pi/L$ et $x \in [0, L]$, ce qui implique en particulier que les coefficients c_n s'annulent, $c_n = 0$. Il reste donc à projeter la condition chapeau initiale (37) sur une base de fonctions sinus (38). On remarque que cette base représente un sous-ensemble de celle utilisée pour une série de Fourier, c'est-à-dire que l'expression (38) est une série de Fourier dont les coefficients associés aux termes cosinus s'annulent (voir note en fin de question). Similairement à une série de Fourier, on note que les fonctions de base sont orthogonales,

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx = \delta_{nm}. \tag{40}$$

Cette propriété peut être exploitée afin de déterminer les coefficients b_n : par multiplication de l'éq. (38) par $(2/L)\sin(\pi n x/L)$ suivi d'une intégration entre $x = 0$ et L, on obtient :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x,0) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx. \tag{41}$$

On substitue l'expression de la fonction chapeau pour poursuivre l'intégration,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2A}{L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2A}{L}(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{42}$$

$$= \frac{4A}{L^2}\left[\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^{L/2} y \sin\left(\frac{n\pi}{L}(L-y)\right) dy\right] \qquad (\text{avec } y = L - x) \tag{43}$$

$$= \frac{4A}{L^2}(1-(-1)^n)\int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{44}$$

$$= 4A(1-(-1)^n)\int_0^{1/2} z \sin(n\pi z)\, dz \qquad (\text{avec } z = x/L). \tag{45}$$

Entre l'équation (43) et (44), on a substitué

$$\sin\left(n\pi - \frac{n\pi y}{L}\right) = (-1)^n \sin\left(-\frac{n\pi y}{L}\right) = -(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \tag{46}$$

On remarque que les coefficients b_n tels que n soit pair s'annulent, $b_{2m} = 0$. Ce résultat est effectivement attendu en remarquant que la condition initiale est une fonction paire sur l'intervalle d'intégration (autour de $x = L/2$), alors que les fonctions de bases pour $n = 2m$ sont impaires. On évalue l'intégrale restante pour le cas où $n = 2m + 1$ est impair en procédant par parties,

$$\int_0^{1/2} z \sin(n\pi z)\, dz = -\frac{z}{n\pi} \cos(n\pi z)\Big|_{z=0}^{z=1/2} + \int_0^{1/2} \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi z)\, dz = \cdots$$
$$\cdots = 0 + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi z)\Big|_{z=0}^{z=1/2} = \frac{\sin(m\pi + \pi/2)}{((2m+1)\pi)^2} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}. \quad (47)$$

On a donc, pour le cas impair, que le coefficient b_{2m+1} est donné par

$$b_{2m+1} = \frac{8A(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}. \quad (48)$$

Ce dernier résultat conclut la deuxième partie du raisonnement proposé en page 4 (étape 2).

Note sur les séries de Fourier. On remarque que si le coefficient A_x n'était pas contraint à être nul, éq. (33), l'équation (38) aurait pris la forme

$$\psi(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (49)$$

qui est la forme générale de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle périodique $x \in [0, L]$ Le facteur $1/2$ est introduit afin que la définition des coefficients a_n donnés ci-dessous soit valide pour tout n. Les coefficients satisfont

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (50)$$

La base de fonctions trigonométriques est orthogonale, c.-à-d. que les relations (40), et (51) sont satisfaites :

$$\frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}, \qquad \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (51)$$

(c) Dériver l'évolution temporelle du déplacement de la corde. Quelle est l'intensité de l'onde sur la corde en fonction du temps ?

On substitue les coefficients b_n et $c_n = 0$ dérivés ci-dessus dans la solution générale de l'équation d'onde (36) pour finalement obtenir

$$\psi(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8A(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi u t}{L}\right) \quad (52)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(t) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right). \quad (53)$$

On calcule l'intensité de l'onde sur l'intervalle $[0, L]$, définie comme :

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^L |\psi(x,t)|^2\, dx. \quad (54)$$

En utilisant l'orthogonalité des modes sinusoïdaux, comme donné en (40), il est possible de montrer que, par substitution de (53),

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^L |\psi(x,t)|^2\,dx \tag{55}$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^L \beta_m(t)\beta_n(t)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)dx \tag{56}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m(t)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(t). \tag{57}$$

L'intensité de chaque harmonique $I_m(t)$ est donnée par :

$$I_m(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{8A}{(2m+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi ut}{L}\right)\right]^2. \tag{58}$$

(d) Refaire les points (a)–(c) en considérant une corde pincée au $1/3$ de sa longueur.

Le raisonnement reste identique à celui du point (c). Il faut cependant adapter l'intégrale (42)–(45) associée au calcul des coefficients b_n aux nouvelles conditions initiales décrites par l'énoncé :

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \frac{3A}{L}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{3}, \\ \frac{3A}{2L}(L-x) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{59}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \forall x \in [0,L]. \tag{60}$$

On note que la condition (60) implique à nouveau $c_n = 0$, cf. éq. (39). Pour b_n,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{61}$$

$$= \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/3}\frac{3A}{L}x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{L/3}^{L}\frac{3A}{2L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \tag{62}$$

$$= 6A\left[\int_0^{1/3} z\sin(n\pi z)\,dz - \frac{(-1)^n}{2}\int_0^{2/3} y\sin(n\pi y)\,dy\right] \quad \text{avec } y = 1-z;\ z = x/L \tag{63}$$

$$= 6A\left(\left[-\frac{z\cos(n\pi z)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi z)}{n^2\pi^2}\right]_{z=0}^{z=1/3} - \frac{(-1)^n}{2}\left[-\frac{y\cos(n\pi y)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi y)}{n^2\pi^2}\right]_{y=0}^{y=2/3}\right) \tag{64}$$

$$= 6A\left[\frac{\sin(n\pi/3) - (n\pi/3)\cos(n\pi/3)}{n^2\pi^2} - (-1)^n\frac{\sin(2\pi n/3) - (2\pi n/3)\cos(2\pi n/3)}{2n^2\pi^2}\right]. \tag{65}$$

Entre (62) et (63), on a utilisé que

$$\sin(n\pi(1-y)) = \sin(n\pi - n\pi y) = -(-1)^n\sin(n\pi y). \tag{66}$$

L'amplitude sera donc donnée par

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ut}{L}\right). \tag{67}$$

On remarque des différences majeures par rapport au résultat trouvé en (c). En effet, lorsque la corde était initialement pincée au milieu, par symétrie, les coefficients b_{2m} étaient nuls par parité : la fonction $\sin(2m\pi x/L)$ était impaire par rapport au point $x = L/2$ alors que $\psi(x, 0)$ était paire. Or, dans le cas de la corde pincée au 1/3 de la longueur, ces coefficients sont non nuls et des ondes stationnaires antisymétriques contribuent donc aux vibrations de la corde.

On aimerait également étudier le cas d'une corde frappée plutôt que pincée, comme pour un piano par exemple. Initialement, la corde est supposée être à sa position d'équilibre, mais sur un intervalle de longueur a centré en $L/2$, une vitesse initiale v_0 est donnée aux éléments de la corde. Cette condition se traduit en

$$\psi(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{si } x \in [(L-a)/2, (L+a)/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Dériver l'évolution temporelle de la corde frappée.

Similairement aux points précédents, on détermine les coefficients de Fourier b_n et c_n. On considère pose à nouveau les équations (38) et (39),

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) = 0, \tag{68}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n k_n u \sin(k_n x). \tag{69}$$

Comme $\psi(x, 0) = 0$, tous les coefficients b_n sont cette fois nuls. Il suffit donc de déterminer les coefficients c_n en projetant la condition initiale $(\partial\psi/\partial t)(x, 0)$ sur la base de fonctions sinus. Une approche similaire à celle aboutissant à l'équation (41) donne donc

$$c_n = \frac{2}{L}\frac{1}{uk_n}\int_0^L \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{70}$$

$$= \frac{2v_0}{n\pi u}\int_{(L-a)/2}^{(L+a)/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{71}$$

$$= \frac{2v_0}{n\pi u}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x=(L-a)/2}^{x=(L+a)/2} \tag{72}$$

$$= -\frac{2v_0 L}{n^2\pi^2 u}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi a}{2L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi a}{2L}\right)\right] \tag{73}$$

$$= \frac{4v_0 L}{n^2\pi^2 u}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{2L}\right). \tag{74}$$

On a donc à nouveau une annulation des coefficients pairs $c_{2m} = 0$ en raison de la parité de la fonction projetée sur la base sinus, alors que

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{4v_0 L}{(2m+1)^2\pi^2 u}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi a}{2L}\right). \tag{75}$$

Par conséquent, l'évolution temporelle de la corde frappée est donnée par :

$$\psi(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{4v_0 L}{(2m+1)^2\pi^2 u}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi a}{2L}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi u t}{L}\right). \tag{76}$$

3 Corde dans un milieu visqueux

On considère une corde de longueur L et de masse linéique μ dans un milieu visqueux. Les bords de la corde sont considérés comme étant fixes. Chaque élément infinitésimal de corde dx est soumis à une force de frottement infinitésimale $dF = -\lambda v\, dx$, où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement par unité de longueur. La corde est soumise à une tension T. La vitesse de propagation de la perturbation est notée u.

(a) Montrer que l'équation d'onde, en tenant compte des frottements, s'écrit :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

L'équation d'onde unidimensionnelle sans frottements est donnée par :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Cette équation peut s'obtenir à l'aide d'une approche Newtonienne, où l'interaction d'un point avec son voisinage est due à la tension, à laquelle on ajoute la contribution de la force de frottement. Puisque $F = -\lambda v$, la force de frottement s'écrit donc $F = -\lambda(\partial\psi/\partial t)$. Par conséquent, la 2$^{\text{e}}$ loi de Newton pour la corde est donnée par :

$$\mu\, dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \sum_i F_i = -\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t}\, dx + T_y(x+dx) + T_y(x). \tag{77}$$

Comme vu en cours, la tension T est de norme constante en tout point de la corde et la composante verticale s'écrit $T_y(x) = T\sin(\theta(x)) \approx T\theta(x) = T(\partial\psi/\partial x)$. En divisant par $\mu\, dx$, on obtient le résultat souhaité, sachant que $u^2 = T/\mu$ pour la corde :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{u^2}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(x)\right) \approx u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{78}$$

(b) En utilisant la méthode de séparation de variables, dériver les modes propres d'une corde dans un milieu visqueux. Discuter de l'évolution temporelle des différents régimes observés pour ces modes propres.

On utilise la méthode de séparation de variables en posant $\psi(x,t) = X(x)T(t)$. En injectant cette expression dans l'équation d'onde amortie et en choisissant k^2 comme solution de l'équation, on obtient :

$$\frac{1}{u^2T(t)}\left(T''(t) + \frac{\lambda}{\mu}T'(t)\right) = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \text{const.} \tag{79}$$

Ceci donne deux équations différentielles linéaires pour $X(x)$ et $T(t)$:

$$X''(x) + k^2X(x) = 0, \tag{80}$$

$$T''(t) + \frac{\lambda}{\mu}T'(t) + k^2u^2T(t) = 0. \tag{81}$$

L'équation (80) correspond à l'équation harmonique dont la forme générale est donnée par :

$$X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx). \tag{82}$$

Les conditions aux bords fixes imposent que :

$$X(0) = 0 \implies B = 0, \tag{83}$$

$$X(L) = 0 \implies A\sin(kL) = 0. \tag{84}$$

L'équation (83) impose donc que $kL = n\pi$, ce qui implique que la partie spatiale de ψ est donnée par : $X(x) = A\sin(k_n x)$ avec $k_n = n\pi/L$.

Pour la partie temporelle, on observe que l'équation (81) admet les solutions de la forme $T(t) = Ae^{at}$. En appliquant cet Ansatz, on obtient que a obéit à la relation suivante :

$$a^2 + \frac{\lambda}{\mu}a + u^2k^2 = 0, \tag{85}$$

et donc

$$a = -\frac{\lambda}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} - k^2u^2} = -\Lambda \pm \sqrt{\Delta}. \tag{86}$$

La forme générale pour $T(t)$ est donc donnée par :

$$T(t) = e^{-\Lambda t}(Ae^{\sqrt{\Delta}t} + Be^{-\sqrt{\Delta}t}) \tag{87}$$

On peut distinguer trois cas particuliers : $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\Delta} \in i\mathbb{R}$ et $\sqrt{\Delta} = 0$. La notation $i\mathbb{R}$ dénote l'ensemble des nombres purement imaginaires, c.-à-d. les nombres complexes dont la partie réelle est nulle. Les cas $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{\Delta} \in i\mathbb{R}$ correspondent respectivement aux régimes sur-critiques et sous-critiques comme vu pour l'équation de l'oscillateur harmonique amorti. Pour le cas $\sqrt{\Delta} = 0$, il faut procéder plus méthodiquement. En effet, $a_1 = a_2 = -\Lambda$, ce qui implique que les deux solutions trouvées précédemment sont égales. Pour trouver la seconde solution, on utilise la méthode de la variation de la constante. En posant $T(t) = A(t)e^{-\Lambda t}$, on peut montrer que le terme $A(t)$ doit satisfaire $A''(t) = 0$, ce qui implique que $A(t) = A + Bt$. Le cas $\sqrt{\Delta} = 0$ est appelé régime critique et la partie temporelle est donnée par $T(t) = e^{-\Lambda t}(A + Bt)$. Finalement, les modes propres peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\sqrt{\Delta_n} \in \mathbb{R} \text{ (sur-critique) :} \quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(Ae^{\sqrt{\Delta_n}t} + Be^{-\sqrt{\Delta_n}t}), \tag{88}$$

$$\sqrt{\Delta_n} = 0 \text{ (critique) :} \quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(A + Bt), \tag{89}$$

$$\sqrt{\Delta_n} \in i\mathbb{R} \text{ (sous-critique) :} \quad \psi_n(x,t) = e^{-\Lambda t}\sin(k_n x)(Ae^{i|\sqrt{\Delta_n}|t} + Be^{-i|\sqrt{\Delta_n}|t}), \tag{90}$$

où $\Delta_n = \Lambda^2 - k_n^2u^2$.

(c) Obtenir la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

On rappelle l'expression de la transformée de Fourier d'une fonction $\psi(x,t)$

$$\mathcal{F}(\psi(x,t)) = \tilde{\psi}(k,\omega) = \int dx \int dt\, \psi(x,t)e^{-i(kx-\omega t)}. \tag{91}$$

Les propriétés de la transformée de Fourier implique que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = -i\omega\mathcal{F}(\psi), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = -\omega^2\mathcal{F}(\psi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = -k^2\mathcal{F}(\psi). \tag{92}$$

Ces propriétés peuvent être trouvées en utilisant l'intégration par parties et en considérant qu'aux limites $t \to +\infty$ et $x \to \pm\infty$, la fonction d'onde s'annule $\psi(x,t) \to 0$. En considérant la transformée de Fourier de l'équation d'onde amortie, on obtient :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} - u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) = 0 \implies \left(-\omega^2 - i\frac{\lambda}{\mu}\omega + u^2k^2\right)\tilde{\psi}(k,\omega) = 0. \tag{93}$$

Puisque $\tilde{\psi}(k,\omega)$ est non nul pour une solution non triviale, on obtient donc que la relation de dispersion peut être écrite comme suit :

$$u^2k^2 = \omega^2 + i\frac{\lambda}{\mu}\omega. \tag{94}$$

On remarque que cette relation de dispersion est très similaire à la relation de dispersion pour un milieu sans dissipation $\omega^2 = u^2k^2$. Le terme complexe $i\lambda\omega/\mu$ implique donc une décroissance exponentielle dans le temps.

(d) En considérant $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$, que peut-on dire sur l'évolution temporelle d'un paquet d'onde ?

En résolvant (94) pour la variable ω, on obtient que :

$$\omega = -i\frac{\lambda}{2\mu} \pm \sqrt{u^2k^2 - \frac{\lambda^2}{4\mu^2}}. \tag{95}$$

Cette expression est analogue à (86). Cela veut donc dire que pour certaines valeurs du nombre d'onde k, ω peut être purement imaginaire, c.-à-d. $\omega \in i\mathbb{R}$, ce qui correspondrait à un amortissement sur-critique de ces solutions d'onde. Ce résultat coïncide donc avec les modes de Fourier trouvés en (88).