

Semaine 8

10 et 11 avril 2025

2.1.4 Énergie d'une onde EM

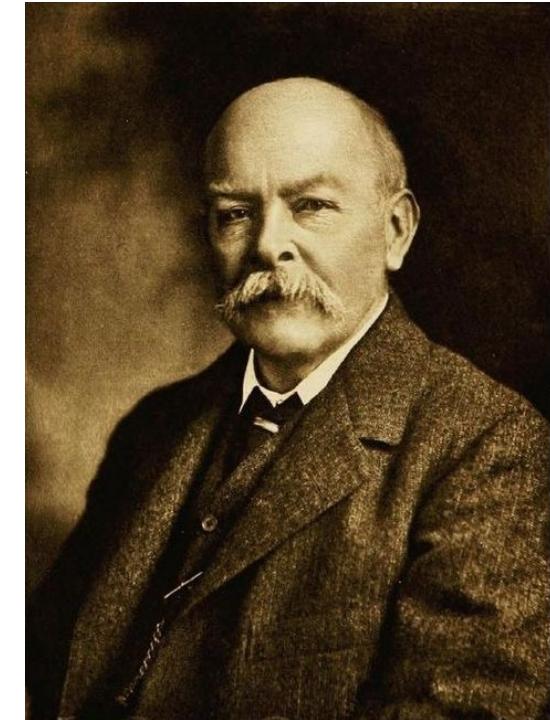
2.1.5 Quantité de mouvement d'une onde électromagnétique

2.1.6 Génération des ondes EM

 2.1.6.1 Les potentiels retardées

 2.1.6.2 Oscillateur de Hertz

Serie 8

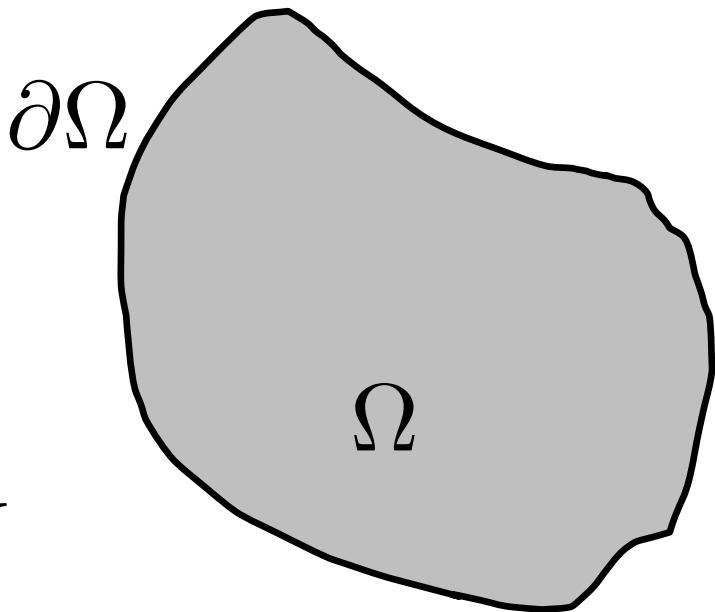


John Henry Poincaré
(1852 - 1914)

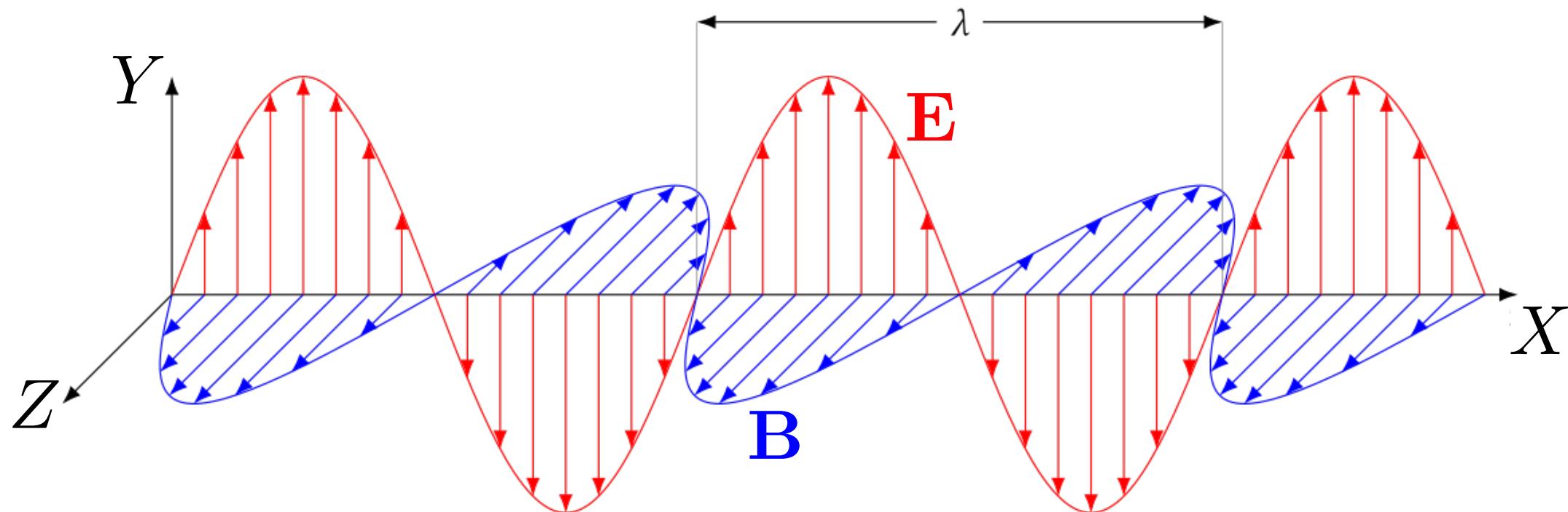
2.1.4 Énergie d'une onde EM

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w dV = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$



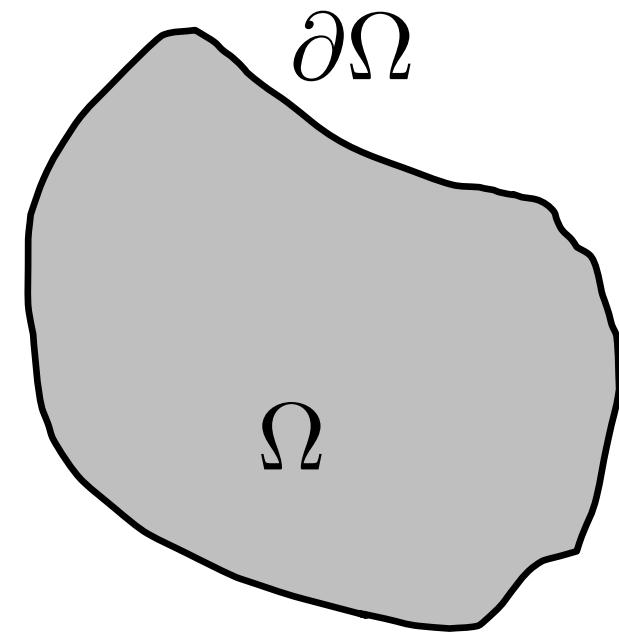
Vecteur de Poynting : $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$



2.1.4 Quantité de mouvement d'une onde EM

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \int_{\partial\Omega} \sum_{\alpha,\beta} T_{\alpha,\beta} n_{\beta} \mathbf{u}_{\alpha} dA$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad \text{densité de la quantité de mouvement de champ E.M.}$$



$$T_{\alpha\beta} = E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (E_{\gamma} D_{\gamma} + H_{\gamma} B_{\gamma}) \quad \text{tenseur des contrainte de Maxwell}$$

Système isolé: $\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0$

Potentiel vecteur et scalaire

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Condition de Lorentz: $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Potentiel vecteur et scalaire

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Condition de Lorentz: $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

2.1.6.1 Les potentiels retardées

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\Omega$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\Omega$$

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$

Série 8

Série 8 : Propriétés de base des ondes électromagnétiques

1 Polarisation et représentation de Jones

Une onde électromagnétique polarisée se propageant dans la direction z s'écrit

$$\mathbf{E} = E_x \cos(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x + E_y \cos(kz - \omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y = \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right]. \quad (*)$$

La représentation de Jones est un formalisme vectoriel décrivant les ondes polarisées ainsi que leur évolution à travers un système d'éléments optiques linéaires. Dans ce formalisme, l'onde (*) est représentée par le vecteur de Jones, $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^2$, suivant :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \quad (\dagger)$$

Au début d'un calcul, il est courant de normaliser le vecteur de Jones d'une onde incidente entrant dans un système optique à un vecteur unitaire, $E_x^2 + E_y^2 = 1$. Dans ce formalisme, un polariseur est représenté par une matrice de Jones, $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, opérant sur le vecteur de Jones de l'onde incidente. On remarque que cette description est analogue à celle d'un système quantique à deux niveaux (on pourrait adopter une notation bra-ket en définissant des vecteurs de base).

(a) Écrire le vecteur de Jones des ondes électromagnétiques polarisées suivantes :

1. Polarisée rectiligne parallèle à \mathbf{e}_x ,
 2. Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec \mathbf{e}_x ,
 3. Polarisée circulaire droite,
 4. Polarisée circulaire gauche,
 5. Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale deux fois plus grand que le demi-petit axe.
- (b) Un polariseur rectiligne présente un axe permettant de sélectionner la composante de l'onde incidente de polarisation parallèle à cet axe. Donner la forme matricielle P_0 d'un polariseur rectiligne idéal d'axe parallèle à \mathbf{e}_x . En déduire la matrice $P(\theta)$ d'un polariseur rectiligne idéal dont l'axe forme un angle θ avec l'axe \mathbf{e}_x .
- (c) Une onde électromagnétique incidente polarisée rectiligne parallèle à \mathbf{e}_x passe à travers du polariseur $P(\theta)$. Retrouver la loi de Malus, qui donne l'expression de l'intensité de l'onde sortante I en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente sur le polariseur et de l'angle θ :

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Quelle est l'intensité moyenne de l'onde sortante si l'onde incidente est non polarisée ?

Indication : L'intensité d'une onde est donnée par $I \propto \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}$.

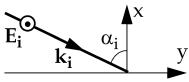
- (d) Le Polaroïd est un filtre rectiligne non idéal, c'est-à-dire que celui-ci a une transmittance T_1 le long de la direction privilégiée et T_2 le long de la direction perpendiculaire, où $T_2 < T_1 \leq 1$. En considérant ces hypothèses, écrire la matrice représentant le filtre Polaroïd lorsque la direction privilégiée
1. est parallèle à l'axe \mathbf{e}_x ,
 2. fait un angle θ avec l'axe \mathbf{e}_x .

Dériver la loi de Malus dans le cas du filtre Polaroïd.

- (e) Les lames à retard sont des éléments optiques introduisant une phase ϕ qui retarde la composante de l'onde incidente perpendiculaire à l'axe optique de la lame par rapport à sa composante le long de l'axe optique. Donner la forme générale d'une lame à retard si l'axe optique fait un angle θ avec \mathbf{e}_x . Que peut-on dire de ce polariseur si $\phi = \pi$? Et quand $\phi = \pi/2$?

2 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfaitement réfléchissant

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propage dans le vide. Elle arrive, sous un angle d'incidence α_i sur une surface plane $\Sigma = Oyz$ parfaitement réfléchissante. Le champ électrique \mathbf{E}_i est normal au plan d'incidence Oxy .



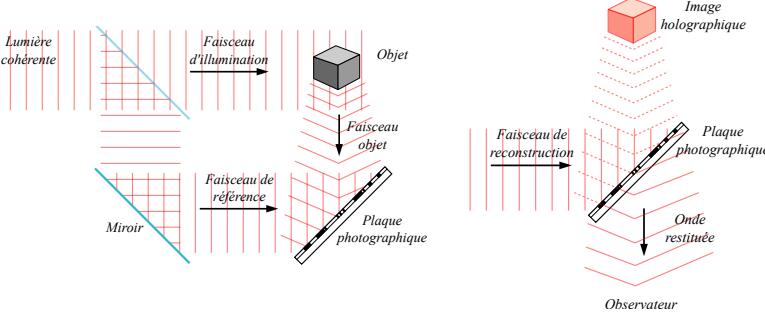
- (a) Montrer que le champ électrique \mathbf{E} , résultant de l'interférence de \mathbf{E}_i avec le champ \mathbf{E}_r de l'onde réfléchie, est une onde se propageant selon y , dont l'amplitude dépend de x .
- (b) Déterminer les plans nodaux et les plans ventraux de \mathbf{E} .
- (c) Exprimer la vitesse de phase u de \mathbf{E} en fonction de la vitesse de la lumière c et α_i .
- (d) Exprimer, par un raisonnement mathématique puis par un raisonnement géométrique, la vitesse de groupe v de \mathbf{E} .

On place un second miroir plan parfait Σ' parallèle à Σ , à une distance X de Σ . L'onde incidente subit ainsi des réflexions multiples entre Σ et Σ' .

- (e) Dans ces conditions, exprimer la vitesse de phase u en fonction de X , λ et c . Montrer ensuite que pour tout X donné, il existe une longueur d'onde λ_c et donc une fréquence de coupure f_c au-dessous de laquelle l'onde de \mathbf{E} ne se propage pas.
- (f) Déterminer la relation de dispersion de cette onde.

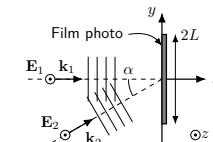
3 Principe de base de l'holographie

L'holographie est un procédé d'enregistrement de l'amplitude et de la phase d'une onde incidente, en général, de la lumière réfléchie par un objet. Puisqu'il n'existe pas de moyen direct permettant d'enregistrer la phase d'une onde, on procède par illumination d'une surface sensible, par exemple un film photographique, par une figure d'interférence entre la lumière réfléchie par l'objet et une source de lumière cohérente, typiquement un laser. Les franges d'interférences sont alors enregistrées sur cette surface et, lorsque éclairées par une source lumineuse cohérente, agissent comme un réseau de diffraction et restituent l'amplitude et la phase de l'onde originale, soit une image holographique.



Enregistrement (gauche) et lecture (droite) d'un hologramme.

On étudie la situation simplifiée suivante, voir la figure ci-après, pour laquelle on considère deux ondes lumineuses planes, cohérentes, de mêmes longueurs d'onde λ , de mêmes intensités, polarisées linéairement et de vecteurs \mathbf{E} parallèles à l'axe z . Le vecteur d'onde \mathbf{k}_1 de la première onde est parallèle à x et le vecteur d'onde \mathbf{k}_2 de la seconde forme un angle α par rapport à x . Un film photographique est placé dans le plan $x = 0$ afin d'enregistrer les franges d'interférence.



- (a) Montrer que l'intensité, moyennée dans le temps, résultant de la superposition des deux ondes dans le plan $x = 0$ est donnée par

$$I_{\text{moy}}(y) = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} ky \sin \alpha \right),$$

avec I_0 une constante réelle à déterminer.

Dans le plan $x = 0$, on place un film photographique de largeur $2L$ dont le noircissement est proportionnel à l'intensité $I(y)$ incidente sur celui-ci. Une fois ce film exposé et noirci, on l'éclaire avec une onde incidente de vecteur d'onde \mathbf{k}_1 .

- (b) Déterminer le profil d'intensité diffracté. En déduire que seuls des rayons diffractés par le film photo pour $x > 0$ dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pm \alpha$ ne sont pas atténusés.

Indication : Montrer que l'amplitude du champ électrique transmis à travers le film est proportionnelle à $\sin^2(ky \sin(\alpha)/2)$. Calculer l'intensité diffractée en un point $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ suffisamment loin du film, $r \gg L$. Appliquer le principe de Huygens au film.