Physique Avancée IV — Semestre de printemps 2025

Semaine 1

20 et 21 février 2025

Introduction

1. Les ondes
    1.1 L'équation d'onde
        1.1.1 Propagation d'une perturbation
        1.1.2 L'équation d'onde (équation de d'Alembert)
            1.1.2.1 Ondes transversales sur une corde
            1.1.2.2 Propagation d'une onde de pression

Série 1

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
(1717-1783)

Bienvenue au ...

Cours de Physique Avancée IV

pour étudiants de deuxième année
en section de physique

Prof. Paolo Ricci
Swiss Plasma Center

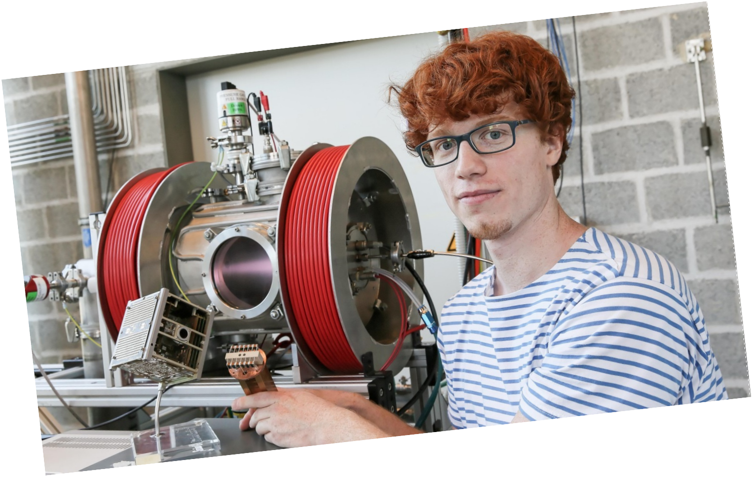
Site web du cours:

http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=16011

Moodle

Exercices - Répartition des assistants
(vendredi 9:15 - 11:00)

Salle	Assistant Principal	Assistants
GRA 330	Felicien Filleul	Pauline Leblanc, Henri Dhonte, Clara Wagner.
GRA 332	Pierrick Giroud-Garampon	Samy Conus, Juliette Spreafico, Marie Mennerat
GRB 330	Simon Vincent	Luca Baptista da Silva, Régine Gaju Musaby.



Coordination

Exercices - Répartition des assistants
(vendredi 10:15 - 12:00 - après séance préparatoire en CE6)

Salle	Assistant Principal	Assistants
GRA 330	Felicien Filleul	Pauline Leblanc, Henri Dhonte, Clara Wagner.
GRA 332	Pierrick Giroud-Garampon	Samy Conus, Juliette Spreafico, Marie Mennerat
GRB 330	Simon Vincent	Luca Baptista da Silva, Régine Gaju Musaby.

– Enoncés disponibles sur le web quelques jours avant la séance (imprimés par vous)
– Pré-corrigés disponibles sur le web après la séance
– Corrigés disponibles sur le web quelques jours après la séance
– Test à blanc: vendredi 30 mai (vendredi de l'Ascension)?

Les séries

21 février 2025

Série 1 : Introduction à l'équation d'onde

1 Onde sinusoïdale

(a) Montrer que la fonction sinusoïdale $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

en précisant l'expression de u et la relation entre k et ω.

(b) Donner la longueur d'onde λ (distance entre deux crêtes d'une onde) et la période T de $f(x,t)$. Trouver l'amplitude maximale $\max|f|$, l'amplitude moyenne $\langle f\rangle$ et l'amplitude quadratique moyenne $\langle f^2\rangle$. Déterminer la vitesse et direction de propagation de l'onde u. Dessinez cette fonction aux temps $t = 0$, $t = \pi/3\omega$ et $t = 2\pi/3\omega$.

2 Onde acoustique unidimensionnelle

Dans cet exercice, on propose une dérivation alternative (par rapport au cours) de l'équation d'onde pour une onde acoustique unidimensionnelle dans un gaz. On considère les trois quantités physiques suivantes : $\rho(x,t)$ le champ de densité massique du gaz, $v(x,t)$ le champ de vitesse dans le gaz et $p(x,t)$ le champ de pression dans le gaz. Dans l'approximation des faibles perturbations, ces trois quantités peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde\rho(x,t); \qquad v(x,t) = v_0 + \tilde v(x,t); \qquad p(x,t) = p_0 + \tilde p(x,t),$$

où les termes ρ_0, v_0 et p_0 sont les valeurs constantes de la densité massique, de la vitesse et de la pression lorsque le gaz est à l'équilibre et les termes $\tilde\rho(x,t)$, $\tilde v(x,t)$ et $\tilde p(x,t)$ sont des perturbations par rapport à l'équilibre telles que $\tilde\rho(x,t) \ll \rho_0$, $|\tilde v(x,t)| \ll |v_0|$ et $\tilde p(x,t) \ll p_0$. Pour approcher ce problème, on part du modèle fluide tridimensionnel décrit par les équations de Navier-Stokes. On considère ici en particulier l'équation de conservation de la masse et le bilan de la quantité de mouvement, dans lesquelles μ est la viscosité du fluide et $\vec f$ la densité de force externe s'exerçant sur celui-ci,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v\right) = -\vec\nabla p + \mu\vec\nabla^2 v + \vec f.$$

(a) En utilisant le bilan de la quantité de mouvement, montrer que le champ de vitesse $v(x,t)$ satisfait l'équation différentielle suivante,

$$\frac{\partial\tilde v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\tilde p}{\partial x}, \qquad (\dagger)$$

en ne conservant que les termes de 1er ordre dans l'amplitude des perturbations. On néglige par ailleurs la viscosité μ du gaz et on considère également qu'aucune force externe ne s'exerce sur celui-ci. On considère le gaz comme étant au repos à l'équilibre.

(b) On considère que le gaz est sujet à une transformation adiabatique ($pV^\gamma = $ const), avec V le volume occupé par le gaz. À partir de l'équation de conservation de la masse, montrer que :

$$\frac{\partial\tilde p}{\partial t} = -\gamma p_0\frac{\partial\tilde v}{\partial x}. \qquad (\ddagger)$$

(c) En combinant les deux résultats précédents, conclure que le champ de pression p obéit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation c est donnée par $\sqrt{\gamma RT/M}$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits.

(d) Comparer la vitesse du son de l'air à 20°C avec celle de l'hélium (He). Application numérique : $M_{\text{air}} = 29$ g/mol, $M_{\text{He}} = 4.003$ g/mol, $\gamma_{\text{air}} = 1.4$, $\gamma_{\text{He}} = 1.66$, $R = 8.314$ J · mol^{-1}· K^{-1} .

3 Onde élastique dans un barreau

Dans cet exercice, on dérive l'équation d'onde qui régit la propagation d'une onde de déformation longitudinale dans un barreau élastique de longueur L. Dans un premier temps, on adopte une approche discrète où on considère un système de N masses m_i reliées une à une par des ressorts de raideur k et de longueur au repos l_0. À l'équilibre, les masses sont équidistantes et la distance entre chacune est égale à l_0. On suppose $x_i > x_{i-1}$ et que toutes les masses sont similaires $m_i = m$.

(a) Dériver l'équation du mouvement d'une masse m_i en négligeant les effets dus à la longueur finie du barreau.

(b) En prenant la limite $N \to \infty$, montrer que l'équation du mouvement trouvée en (a) se réduit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par : $u = \sqrt{T/\mu}$, où μ est la masse linéique du barreau et $T = kl_0$ correspond à la tension dans le barreau. Indication : utiliser comme variable le déplacement par rapport à la position d'équilibre.

L'équation d'onde dans un milieu élastique peut également être dérivée en adoptant le formalisme de la mécanique des corps déformables. On nomme $\xi(x,t)$ le déplacement de la section du barreau en x à l'instant t. La densité massique ρ et la section S sont considérées constantes.

(c) Comme première étape, en écrivant la loi de Newton pour une section du barreau, dériver l'équation suivante :

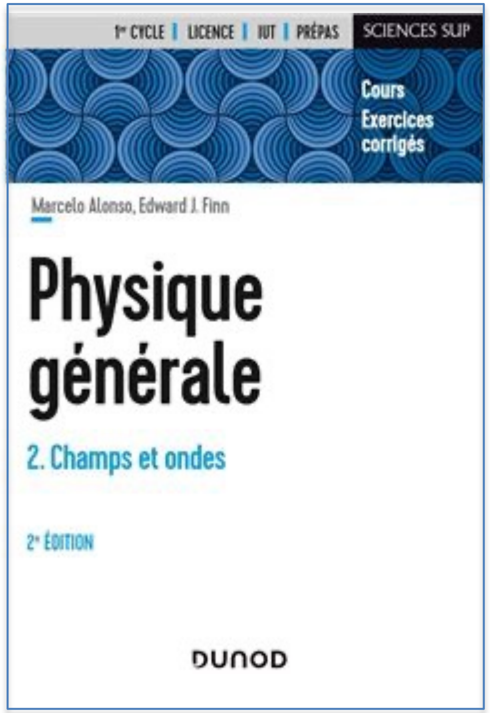
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

où $\sigma(x,t)$ est la contrainte au point x à l'instant t, qui est définie dans cet exercice comme $\sigma = F/S$ avec F la force appliquée sur la section en x.

(d) En mécanique des corps déformables, on appelle la déformation $\varepsilon = \Delta l/l$ la variation relative de la longueur d'un élément infinitésimal du barreau. Dans le cas d'un régime élastique, la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ décrit la relation entre contrainte et déformation. E est le module de Young qui caractérise l'élasticité du matériau. En utilisant la loi de Hooke, démontrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par $c = \sqrt{E/\rho}$. Comparer cette expression de la vitesse de propagation avec celle trouvée en (b).

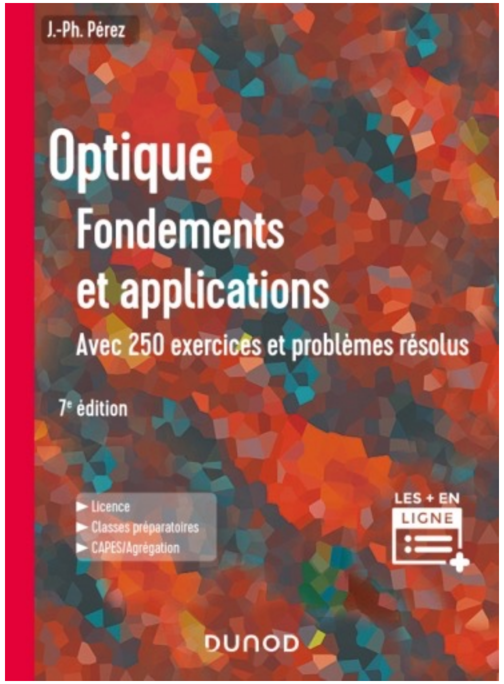
Pierre Wets
Responsable Expériences

Bibliographie



M. Alonso and E.J. Finn,
Physique générale - Tome 1 (relativité) et 2, 2e édition, Dunod

J.Ph. Perez, Optique - Fondements et application,
7e édition, Dunod

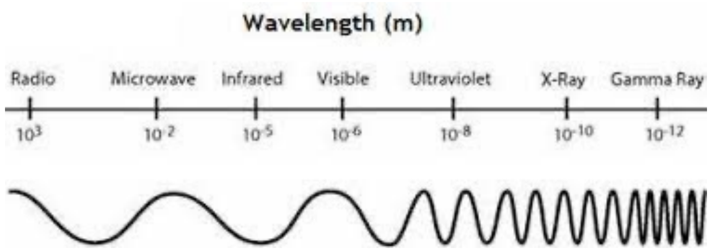


Buts du cours

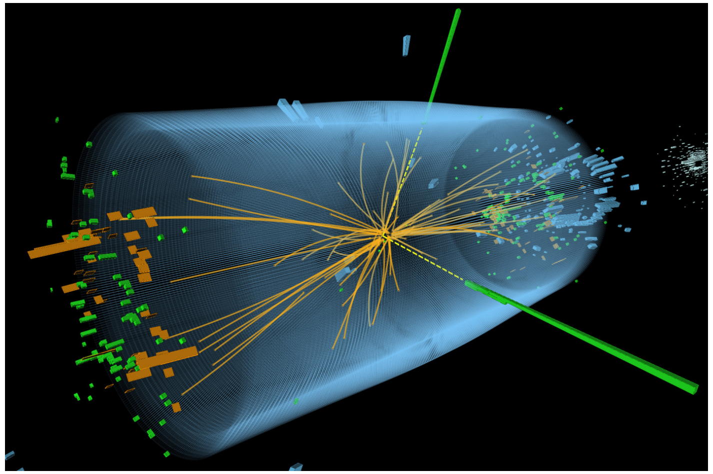
Attendre une compréhension fondamentale de:

- la dynamique ondulatoire

- phénomènes de base lies aux ondes électromagnétiques



- dynamique à vitesse proche de c



Organisation du cours

1. Les ondes

1.1 L'équation d'onde
1.2 Propriétés de base des ondes
1.3 Superposition d'onde
1.4 Interaction ondes-milieu de propagation

2. Ondes électromagnétiques

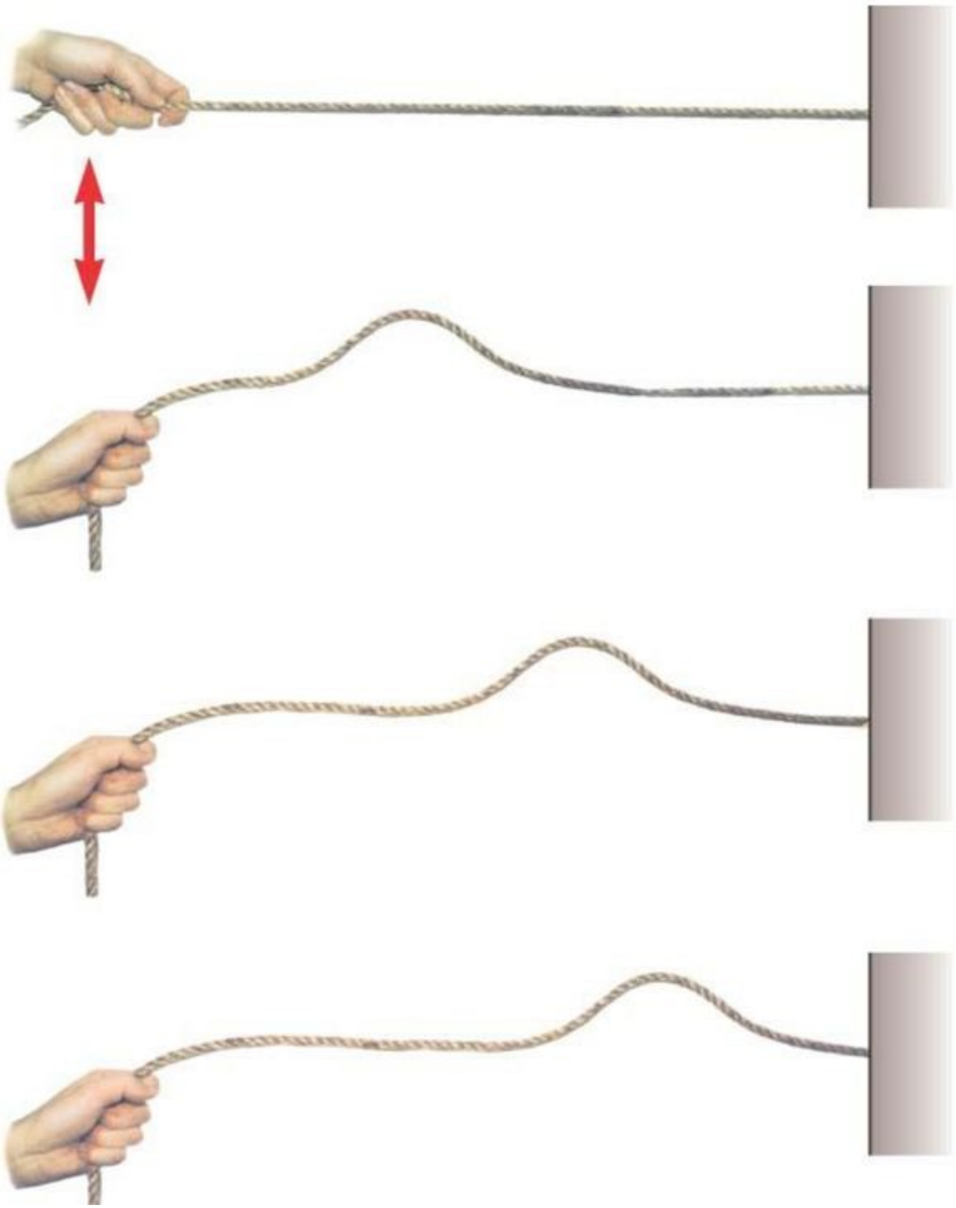
2.1 Propriétés de base des ondes électromagnétiques
2.2 Propagation des ondes électromagnétiques dans la matière
2.3 Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques

3. La relativité restreinte

3.1 Introduction
3.2 Cinématique relativiste
3.3 Dynamique relativiste

1. Les ondes

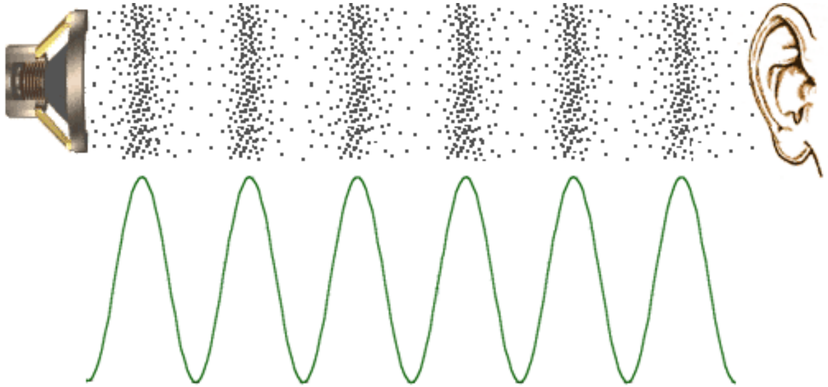
1.1.1 Propagation d'une perturbation

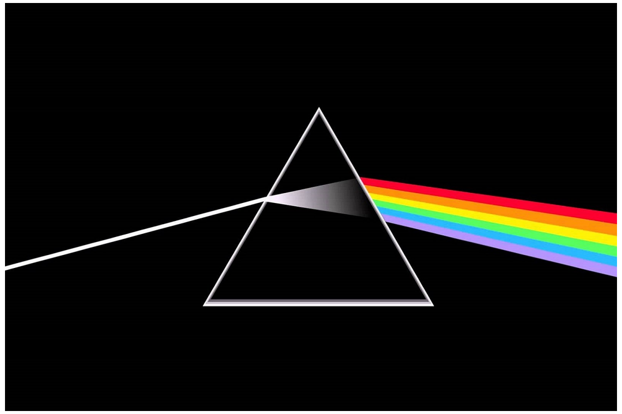


$$\xi(x,t) = f(x \pm vt)$$

1.1.2 L’équation d’onde (de d’Alembert)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$





21 février 2025

Série 1 : Introduction à l'équation d'onde

1 Onde sinusoïdale

(a) Montrer que la fonction sinusoïdale $f(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

en précisant l'expression de u et la relation entre k et ω.

(b) Donner la longueur d'onde λ (distance entre deux crêtes d'une onde) et la période T de $f(x,t)$. Trouver l'amplitude maximale $\max|f|$, l'amplitude moyenne $\langle f\rangle$ et l'amplitude quadratique moyenne $\langle f^2\rangle$. Déterminer la vitesse et direction de propagation de l'onde u. Dessinez cette fonction aux temps $t=0$, $t=\pi/3\omega$ et $t=2\pi/3\omega$.

2 Onde acoustique unidimensionnelle

Dans cet exercice, on propose une dérivation alternative (par rapport au cours) de l'équation d'onde pour une onde acoustique unidimensionnelle dans un gaz. On considère les trois quantités physiques suivantes : $\rho(x,t)$ le champ de densité massique du gaz, $v(x,t)$ le champ de vitesse dans le gaz et $p(x,t)$ le champ de pression dans le gaz. Dans l'approximation des faibles perturbations, ces trois quantités peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde\rho(x,t); \qquad v(x,t) = v_0 + \tilde v(x,t); \qquad p(x,t) = p_0 + \tilde p(x,t),$$

où les termes ρ_0, v_0 et p_0 sont les valeurs constantes de la densité massique, de la vitesse et de la pression lorsque le gaz est à l'équilibre et les termes $\tilde\rho(x,t)$, $\tilde v(x,t)$ et $\tilde p(x,t)$ sont des perturbations par rapport à l'équilibre telles que $\tilde\rho(x,t) \ll \rho_0$, $|\tilde v(x,t)| \ll |v_0|$ et $\tilde p(x,t) \ll p_0$. Pour approcher ce problème, on part du modèle fluide tridimensionnel décrit par les équations de Navier-Stokes. On considère ici en particulier l'équation de conservation de la masse et le bilan de la quantité de mouvement, dans lesquelles μ est la viscosité du fluide et $\vec f$ la densité de force externe s'exerçant sur celui-ci,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v\right) = -\vec\nabla p + \mu\vec\nabla^2 v + \vec f.$$

(a) En utilisant le bilan de la quantité de mouvement, montrer que le champ de vitesse $v(x,t)$ satisfait l'équation différentielle suivante,

$$\frac{\partial \tilde v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde p}{\partial x}, \qquad (\dagger)$$

en ne conservant que les termes de 1er ordre dans l'amplitude des perturbations. On néglige par ailleurs la viscosité μ du gaz et on considère également qu'aucune force externe ne s'exerce sur celui-ci. On considère le gaz comme étant au repos à l'équilibre.

(b) On considère que le gaz est sujet à une transformation adiabatique ($pV^\gamma = \text{const}$), avec V le volume occupé par le gaz. À partir de l'équation de conservation de la masse, montrer que :

$$\frac{\partial \tilde p}{\partial t} = -\gamma p_0 \frac{\partial \tilde v}{\partial x}. \qquad (\ddagger)$$

Série 1

(c) En combinant les deux résultats précédents, conclure que le champ de pression p obéit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation c est donnée par $\sqrt{\gamma RT/M}$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits.

(d) Comparer la vitesse du son de l'air à 20°C avec celle de l'hélium (He). Application numérique : $M_{\text{air}} = 29$ g/mol, $M_{\text{He}} = 4.003$ g/mol, $\gamma_{\text{air}} = 1.4$, $\gamma_{\text{He}} = 1.66$, $R = 8.314$ J · mol^{-1}· K^{-1} .

3 Onde élastique dans un barreau

Dans cet exercice, on dérive l'équation d'onde qui régit la propagation d'une onde de déformation longitudinale dans un barreau élastique de longueur L. Dans un premier temps, on adopte une approche discrète où on considère un système de N masses m_i reliées une à une par des ressorts de raideur k et de longueur au repos l_0. À l'équilibre, les masses sont équidistantes et la distance entre chacune est égale à l_0. On suppose $x_i > x_{i-1}$ et que toutes les masses sont similaires $m_i = m$.

(a) Dériver l'équation du mouvement d'une masse m_i en négligeant les effets dus à la longueur finie du barreau.

(b) En prenant la limite $N\to\infty$, montrer que l'équation du mouvement trouvée en (a) se réduit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par : $u = \sqrt{T/\mu}$, où μ est la masse linéique du barreau et $T = kl_0$ correspond à la tension dans le barreau. Indication : utiliser comme variable le déplacement par rapport à la position d'équilibre.

L'équation d'onde dans un milieu élastique peut également être dérivée en adoptant le formalisme de la mécanique des corps déformables. On nomme $\xi(x,t)$ le déplacement de la section du barreau en x à l'instant t. La densité massique ρ et la section S sont considérées constantes.

(c) Comme première étape, en écrivant la loi de Newton pour une section du barreau, dériver l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

où $\sigma(x,t)$ est la contrainte au point x à l'instant t, qui est définie dans cet exercice comme $\sigma = F/S$ avec F la force appliquée sur la section en x.

(d) En mécanique des corps déformables, on appelle la déformation $\varepsilon = \Delta l/l$ la variation relative de la longueur d'un élément infinitésimal du barreau. Dans le cas d'un régime élastique, la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ décrit la relation entre contrainte et déformation. E est le module de Young qui caractérise l'élasticité du matériau. En utilisant la loi de Hooke, démontrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par $c = \sqrt{E/\rho}$. Comparer cette expression de la vitesse de propagation avec celle trouvée en (b).