

9 mai 2025

Série 10 : Relativité restreinte, contraction des longueurs et dilatation du temps

1 Invariance des équations de Maxwell (partie 1)

Dans le vide, les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} satisfont les équations d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0.$$

En définissant l'opérateur d'alembertien $\square = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, l'équation d'onde s'écrit, par exemple pour \mathbf{E} :

$$\square \mathbf{E} = 0. \quad (*)$$

On désire trouver quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante.

- On commence par considérer un référentiel \mathcal{R}' en mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe \mathbf{e}_x avec une vitesse v par rapport à un référentiel \mathcal{R} de coordonnées (t, \mathbf{x}) dans lequel l'équation $(*)$ est satisfaite. En utilisant les transformations galiléennes, réécrivez l'équation d'onde en termes des coordonnées (t', \mathbf{x}') de \mathcal{R}' .
- Conclure qu'il est impossible de transformer le champ \mathbf{E} dans \mathcal{R} en un champ \mathbf{E}' dans \mathcal{R}' de sorte que l'équation d'onde soient invariante. On considérera uniquement les transformations linéaires inversibles $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{E}' = \mathbf{C}\mathbf{E}$, indépendantes des coordonnées spatio-temporelles.

Dans la deuxième partie de cet exercice, qui sera abordée dans la série de la semaine prochaine, on montrera qu'une transformation de Lorentz laisse l'équation d'onde électromagnétique invariante.

2 Fusée relativiste

Un observateur S est sur une plateforme de longueur $D_0 = 65$ m, dans une station spatiale. Une fusée passe à une vitesse relative $u = 0.8c$ parallèle au côté de la plateforme. L'observateur S remarque qu'à un certain instant, l'avant et l'arrière de la fusée passent simultanément en face des deux extrémités de la plateforme.

- Selon S , quel intervalle de temps s'écoule-t-il entre les instants auxquels l'avant et l'arrière de la fusée passent devant lui ?
- Quelle est la longueur propre L_0 de la fusée ?
- Pour un observateur S' se situant dans la fusée, quelle est la longueur D de la plateforme ?
- Pour S' , combien de temps cela prend-il pour que l'observateur S passe d'un bout à l'autre de la fusée ?
- Selon S , les deux extrémités de la fusée s'alignent simultanément avec les deux extrémités de la plateforme. Ces deux événements sont-ils également simultanés pour S' ?

3 Cinématique relativiste

Une barre de longueur l voyage dans la direction Ox à une vitesse v par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Dans son référentiel propre \mathcal{R}' , cette barre est inclinée d'un angle θ_0 par rapport à l'axe Ox . Quelle doit être sa vitesse pour que, dans \mathcal{R} , elle ait un angle d'inclinaison $\theta = \pi/4$?