2 mai 2025

Série 9 : Polarisation, réflexion et réfraction

1 Action d'une lame de quartz sur une onde polarisée rectiligne

On considère une lame de quartz d'épaisseur d et parallèle au plan Oxy et une onde électromagnétique polarisée rectiligne incidente de longueur $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ se propageant dans la direction z et dont l'axe de polarisation fait un angle α_p avec l'axe x. La lame de quartz est un matériau biréfringent dont le tenseur diélectrique s'écrit

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}.$$

On supposera que le quartz n'est pas aimanté, c.-à-d. $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ dans le quartz.

(a) Montrer que, dans le quartz, les nombres d'onde d'une onde polarisée rectiligne selon les axes ordinaire $\mathbf{k}_o = k_{o,z}\,\mathbf{e}_z$ et extraordinaire $\mathbf{k}_e = k_{e,z}\,\mathbf{e}_z$ de la lame sont donnés par

$$k_{o,z}^2 = n_o^2 k_0^2 \quad \text{et} \quad k_{e,z}^2 = n_e^2 k_0^2,$$

où on dénote respectivement $n_o = \sqrt{\epsilon_x/\epsilon_0}$ et $n_e = \sqrt{\epsilon_y/\epsilon_0}$, les indices de réfraction selon les axes ordinaire et extraordinaire.

(b) Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$ à la sortie de la lame est en général polarisé elliptique,

$$\frac{E_x^2}{E^2\cos^2\alpha_p} + \frac{E_y^2}{E^2\sin^2\alpha_p} - \frac{2E_xE_y\cos\phi}{E^2\cos\alpha_p\sin\alpha_p} = \sin^2\phi, \qquad (*)$$

où $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_e - n_o)d$, E_x et E_y sont les composantes du champ électrique selon les axes x et y, et $E = \|\mathbf{E}\|$. Quelle quantité physique ϕ représente-t-elle ?

(c) Discuter les cas où $\phi = 0$, $\phi = \pi$, et $\phi = \pm\pi/2$. Comparer ces résultats avec ceux trouvés en série 8, exercice 1, question (e).

2 Filtre de Lyot

On propose une application pratique des résultats de l'exercice 1. Un filtre de Lyot est un système composé d'une lame de quartz placée entre deux polariseurs rectilignes. La lame de quartz est identique à celle de l'exercice 1 : son axe ordinaire est parallèle à $\mathbf{e}_x$ et son axe extraordinaire à $\mathbf{e}_y$. Les deux polarisateurs rectilignes sont inclinés tel que leurs axes de polarisation fassent un angle de $\pi/4$ par rapport à l'axe $\mathbf{e}_x$. On considère une onde électromagnétique plane, incidente sur le filtre de Lyot, de longueur d'onde λ_0, polarisée rectiligne selon $\mathbf{e}_x$ et se propageant dans la direction z.

(a) Exprimer l'amplitude et l'intensité du champ électrique de l'onde transmise par le filtre en fonction de $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_e - n_o)d$, où d est l'épaisseur de la lame, et n_o et n_e sont les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire. En déduire un coefficient de transmission pour l'amplitude du champ électrique, $t = E_{\text{sortie}}/E_{\text{entrée}}$. Définir t en tenant uniquement compte du quartz et du dernier polariseur, c.-à-d. en ignorant l'effet du premier polariseur.

(b) On empile N filtres de Lyot avec des lames de quartz d'épaisseurs $d_n = 2^{n-1}d$, $n = 1, \ldots, N$. En négligeant l'absorption des lames, démontrer que le coefficient de transmission total du système t est donné par :

$$|t| = \left|\frac{\sin(2^{N-1}\phi)}{2^N\sin(\phi/2)}\right|. \qquad (\dagger)$$

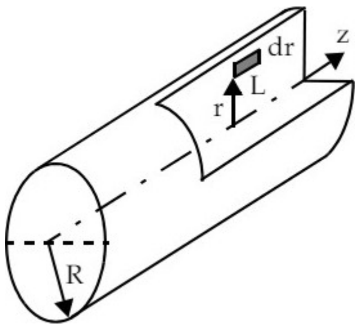
Indication :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi} = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

(c) Étudier le comportement du coefficient de transmission (†) en fonction du nombre de filtre N et montrer qu'un empilement de filtres de Lyot agit comme un filtre passe-bande étroit. Un tel type de filtre privilégie la transmission d'une fréquence spécifique et atténue le reste du spectre.

3 Effet de peau

La répartition d'un courant alternatif dans un conducteur n'est pas uniforme. Le courant alternatif génère un champ magnétique variable dans le temps, qui engendre lui-même un champ électrique et, par conséquent, un courant induit. Ce courant induit modifie le profil de courant total : on observe une densité de courant plus importante dans la périphérie d'un conducteur qu'en son centre. Cet effet est appelé « effet de peau ». On étudie ce phénomène dans le cas d'un conducteur non aimanté, de conductivité σ, cylindrique de rayon R et d'axe $\mathbf{e}_z$ parallèle au courant alternatif principal. On note $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire dans la direction radiale et on choisit $\mathbf{e}_\phi$ tel que la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ soit droite.



Indication : On considère la fréquence du courant alternatif largement inférieure à celle d'ondes électromagnétiques, ce qui permet d'affirmer que : $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t \approx \mathbf{J}$.

(a) Déterminer le champ magnétique $\mathbf{H}(r,t)$ induit par un courant $\mathbf{J}(r,t) = J(r,t)\,\mathbf{e}_z$ traversant une section circulaire Σ, normale à $\mathbf{e}_z$, de rayon r du cylindre.

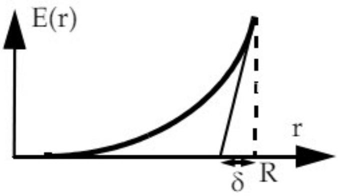
(b) Montrer qu'un courant induit circule sur le périmètre d'une surface rectangulaire $d\mathbf{S} = L\,dr\,\mathbf{e}_\phi$ (en gris foncé sur la figure ci-dessus, avec L la longueur de la surface selon l'axe z et dr sa longueur dans la direction radiale) située à un rayon r. En déduire qu'un gradient de champ électrique $\partial E/\partial r$, avec $\mathbf{E}(r,t) = E(r,t)\,\mathbf{e}_z$, s'établit tel que

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}.$$

(c) En supposant un courant alternatif de pulsation ω et que le champ électrique prend la forme $E(r,t) = E(r)e^{-i\omega t}$, montrer que la distribution radiale du champ électrique $E(r)$ satisfait

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + i\mu_0\sigma\omega E = 0, \quad \text{où } \frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega. \tag{‡}$$

On reconnait une équation différentielle de Bessel dont la solution sera exprimée en termes de $J_0(x)$ et $Y_0(x)$. Expérimentalement, on observe cependant que, lorsque l'on pénètre dans le conducteur, le champ électrique devient rapidement nul sur une distance caractéristique δ (voir figure) que l'on appelle épaisseur de peau. En général, celle-ci est telle que $\delta \ll R$ ce qui permet d'affirmer, dans l'épaisseur de peau, que



$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \gg \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}. \tag{§}$$

(d) Vérifier que la solution approchée $E(r)$, tenant compte de l'approximation (§), à l'équation (‡), trouvée au point (c), est telle que :

$$E(r,t) = E(r)e^{-i\omega t} = E_0 e^{-\beta(R-r)} e^{i[\beta(R-r)-\omega t]}, \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}.$$

Montrer que β peut être associé à un coefficient d'absorption du champ électrique. En déduire que le courant est plus important en périphérie.