28 février 2025

Série 2 : L'équation d'onde et sa solution

1 Onde d'Alfvén : Modèle MHD idéal

En 1942, Hannes Alfvén chercha à expliquer la formation et le mouvement des taches solaires. Il proposa la première formulation du modèle magnétohydrodynamique (MHD) qui combine les équations d'électrodynamique avec les équations provenant de la mécanique des fluides. Ce modèle prédit qu'il existe des ondes au sein des plasmas et valut à Alfvén le prix Nobel de physique en 1970. Il proposera que ces ondes sont responsables du mouvement des taches solaires et suggérera plus tard, en 1947, qu'elles pourraient expliquer les températures très élevées observées dans la couronne solaire. Dans cet exercice, on cherche à exprimer la relation entre la pulsation et le nombre d'onde, c'est-à-dire la relation de dispersion, $\omega = f(k)$ pour ces ondes en utilisant le modèle MHD :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \text{ (Continuité)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \text{ (Conserv. charge)}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \text{ (Q. de mouv.)} \qquad \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \text{ (Loi d'Ohm)}$$

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \text{ (Éq. d'état)} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \text{ (Loi d'Ampère)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ (Loi de Faraday)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ (Éq. de Maxwell-Thomson)}$$

(a) À partir des 8 équations du modèle, en éliminant la dépendance en $\mathbf{E}$ et en $\mathbf{J}$, réduire le modèle MHD aux 4 équations suivantes dans le cas du modèle MHD idéal ($\eta = 0$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad \rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

(b) À l'équilibre, on considère le plasma est au repos. Linéariser ρ, p, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{u}$ comme pour l'exercice 2 de la série 1. En approximant au plus petit ordre dans l'amplitude de perturbation, déduire que les équations dérivées au point (a) peuvent être écrites en termes de $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \qquad \rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B}_0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) \qquad \tilde{p} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\tilde{\rho} = c_s^2 \tilde{\rho}$$

On note $c_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ la vitesse du son.

Afin de simplifier ces équations, on suppose que les perturbations $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$ peuvent être exprimées avec l'Ansatz général suivant : $\tilde{A}(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$.

(c) En utilisant l'Ansatz et en éliminant la dépendance en $\tilde{p}$, reformuler les équations trouvées au point (b).

On considère des ondes d'Alfvén transverses, c'est-à-dire des ondes pour lesquelles $\tilde{\mathbf{u}} = (0, \tilde{u}_y, 0)$ $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ ainsi que $\mathbf{B_0} = B_0\hat{z}$.

(d) À partir des équations trouvées en (c), montrer que la relation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = c_A^2 k_z^2$ où $c_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho_0}$ est la vitesse d'Alfvén.

On considère désormais que $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_x, 0, \tilde{u}_z)$. Cette nouvelle hypothèse permet de prédire deux nouveaux types d'onde : les ondes d'Alfvén compressionelles et les ondes magnétosonores.

challenge

(e) Montrer que cette hypothèse permet de dériver deux relations de dispersion,

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(c_A^2 + c_s^2)k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(c_A^2 + c_s^2)^2 k^4 - c_A^2 c_s^2 k^2 k_z^2}.$$

Commenter le résultat en absence de champ magnétique B_0.

2 Ondes cylindriques

En cours, il a été vu comment dériver l'expression générale d'une onde sphérique et le calcul de diverses quantités associées comme son intensité. Dans cet exercice, on propose de dériver ces mêmes expressions, avec une approche similaire, mais dans le cas d'une onde cylindrique.

(a) En partant de l'équation d'onde générale et en utilisant la méthode de séparation des variables $\xi(\mathbf{x}, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)\cos(\omega t + \phi)$, montrer que les fonctions R, Θ, Z satisfont les propriétés suivantes :

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + [(k_r r)^2 - n^2]R = 0, \qquad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0, \qquad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0,$$

avec $\omega^2 = u^2 k^2$ où $k^2 = k_r^2 + k_z^2$ et u est la vitesse de phase de l'onde. Résoudre les équations données ci-dessus et obtenir la forme générale des solutions d'onde en coordonnées cylindrique dans le cas $k_r \neq 0$. Note : on cherche les solutions définies pour $r \in [0, \infty[$.

(b) On s'intéresse aux solutions où il n'y a pas de dépendance en θ et z. Donner la forme approchée de la solution de l'équation d'onde cylindrique pour $r \to \infty$. Discuter du sens de la propagation ainsi que de la dépendance en r de la solution trouvée.

(c) Soit $\xi(r, t)$, une onde sonore cylindrique sinusoïdale donnée par :

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0 \sin(k_r r - \omega t)}{\sqrt{r}}.$$

Montrer que l'intensité moyenne de l'onde est proportionnelle à $1/r$ et donner la signification physique de cette dépendance.

Indications

— La forme du laplacien en coordonnées cylindriques est donnée par l'expression suivante :

$$\nabla^2 f(r, \theta, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

— Les fonctions de Bessel de première espèce J_α et seconde espèce Y_α (aussi appelées fonctions de Neumann) sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}y\right) + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

— Le comportement asymptotique des fonctions $J_\alpha(x)$ et $Y_\alpha(x)$ pour $x \to 0$ est donné par

$$J_\alpha(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha,$$
$$Y_\alpha(x) \sim -\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\alpha,$$

et, pour $x \to \infty$, par

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
$$Y_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$