

Corrigé de l'examen final

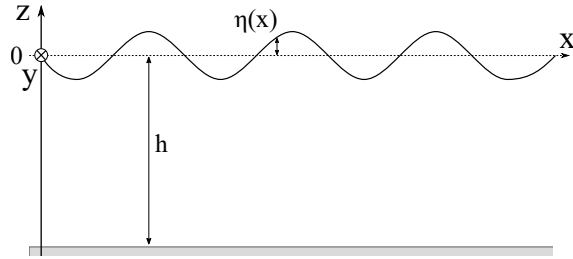
1. Origine d'un tsunami.

Lors d'un séisme ou d'un glissement de terrain du fond océanique, une perturbation se forme à la surface de l'océan, d'une hauteur de quelques dizaines de centimètres et d'une largeur pouvant atteindre plusieurs centaines de kilomètres. Nous allons voir que sous certaines conditions, cette perturbation se propage sans se disperser, et augmente en hauteur.

Pour commencer, on considère une vague sur l'océan, dont le fond est à une profondeur h . L'écart de hauteur de la surface de l'eau par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$ est définie par $z = \eta(x)$. On considère le problème invariant selon y , donc $\partial_y = 0$.

L'équation de Navier-Stokes (où l'on a négligé la viscosité) décrit l'évolution de la vitesse de l'eau :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$



avec ρ la densité de l'eau, \mathbf{u} sa vitesse, P la pression et \mathbf{g} l'accélération de la pesanteur. L'eau est traitée comme un fluide incompressible, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, et irrotationnel, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Cela permet d'introduire la fonction scalaire ϕ tel que $\mathbf{u} = \nabla \phi$. À l'équilibre, $\mathbf{u} = 0$. Sur le fond de l'océan, la vitesse verticale est nulle.

(a) Montrer que ϕ est solution de :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0.$$

Pour résoudre l'évolution d'une vague se propageant selon x , on cherche ϕ de la forme $\phi(x, z, t) = f(z)e^{i(kx - \omega t)}$. Montrer que $f(z) = \phi_0 \cosh[k(z + h)]$.

La vitesse s'écrit (avec $u_y = 0$ par invariance de ϕ selon y) : $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$

La condition d'incompressibilité donne donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Les équations considérées sont découplées en termes de dérivées spatiales et temporelles. On peut séparer les variables. Et puisque l'on veut étudier l'évolution d'une perturbation se propageant selon x , on pose $\phi(x, z, t) = f(z)e^{i(kx - \omega t)}$.

L'équation d'incompressibilité s'écrit pour ϕ :

$$f'' - k^2 f = 0 \quad (4)$$

Donc $f(z) = \phi_0 \cosh(kz + B)$, avec $(\phi_0, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme la vitesse verticale de l'eau est

nulle au niveau du fond marin :

$$v_z|_{z=-h} = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = f'(-h)e^{i(kx-\omega t)} \quad (5)$$

$$\phi_0 k \sinh(-kh + B) = 0 \quad (6)$$

$$B = kh \quad (7)$$

On obtient $f(z) = \phi_0 \cosh(k(z+h))$.

Alternativement, on peut déduire de l'équation différentielle que $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$. Puis $f'(-h) = 0$ implique que $B = Ae^{-2hk}$. Finalement :

$$f(z) = Ae^{kz} + Ae^{-kz-2kh} = Ae^{-kh}(e^{kz+kh} + e^{-kz-kh}) = \phi_0 \cosh(k(z+h)) \quad (8)$$

en posant $\phi_0 = Ae^{-kh}/2$.

- (b) En linéarisant l'équation (1) et en négligeant les produits de termes de fluctuations, montrer que la pression dans l'eau peut s'écrire $P = P_{eq} + \tilde{p}$, avec $P_{eq} = p_0 - \rho g z$ la pression à l'équilibre et $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ la variation de pression (dite "pression dynamique"). En considérant l'équilibre, justifier que p_0 est la pression atmosphérique.

On considère une petite variation de pression et de vitesse par rapport à l'équilibre : $P = P_{eq} + \tilde{p}$ et $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. En reprenant l'équation (1), où on néglige le terme non-linéaire d'ordre deux, projetée sur z :

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\rho g \quad (10)$$

$$P = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (11)$$

avec p_0 la constante d'intégration.

La pression atmosphérique est donnée par $P_{atm} = P(\eta)$.

À l'équilibre, comme $\eta = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$P(\eta) = p_0 - \rho g \eta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = p_0 \quad (12)$$

- (c) Pour un élément quelconque de la surface de l'eau, une tension s'exerce sur les bords de la surface, dans la direction tangente à la surface, et perpendiculairement au bord où elle s'applique. Montrer que la force nette de tension s'exerçant sur un élément infinitésimal de surface $dxdy$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_\gamma = \gamma dxdy \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \mathbf{e}_z.$$

avec γ la tension de surface en N/m.

Indication : on considère que la surface fait de petits angles par rapport à l'horizontale.

Considérons un élément de surface $dx dy$, en notant θ l'angle entre l'horizontale et la surface. La surface est uniquement inclinée par rapport à x , donc les forces de tension selon y s'annulent, et on a :

$$\mathbf{F}_\gamma = \gamma dy (\cos(\theta(x+dx))\mathbf{e}_x + \sin(\theta(x+dx))\mathbf{e}_z - \cos(\theta(x))\mathbf{e}_x - \sin(\theta(x))\mathbf{e}_z)$$

Comme $\theta \ll 1$ on a

$$\cos(\theta(x)) \approx 1$$

$$\sin(\theta(x)) \approx \theta(x) \approx \tan(\theta(x)) = (\eta(x+dx) - \eta(x))/dx \approx \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\gamma &= \gamma dy (\sin(\theta(x+dx)) - \sin(\theta(x)))\mathbf{e}_z \\ &= \gamma dy \left(\frac{\partial \eta(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \gamma dx dy \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

- (d) En utilisant l'équilibre des forces s'appliquant sur un élément infinitésimal de la surface de l'eau, déduire la relation de dispersion des ondes de surface, dans la limite $\eta(x) \ll h$:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh).$$

Indication : pour cela justifier et utiliser que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$. Négliger également la masse de l'élément de surface.

L'équilibre des forces s'exerçant sur un élément infinitésimal dS de la surface de l'eau (donc de masse nulle) donne :

$$p_0 dS - p(\eta) dS - T dS \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

$$\rho g \eta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

On utilise ensuite le lien entre η et ϕ sur la surface, qui vient simplement du fait que la vitesse verticale de la surface s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_z|_{z=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \quad (15)$$

On dérive par rapport au temps, et avec l'équation (15) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} = 0 \quad (16)$$

Puis avec $\phi(x, z = \eta, t) = \phi_0 \cosh[k(\eta + h)] e^{i(kx - \omega t)}$:

$$-\omega^2 \cosh[k(\eta + h)] + gk \sinh[k(\eta + h)] + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \sinh[k(\eta + h)] = 0 \quad (17)$$

Comme $\eta \ll h$ on a $\eta + h \approx h$, et on en déduit la relation de dispersion.

- (e) Écrire la relation de dispersion en faisant apparaître les nombres d'onde k_h et k_c , correspondant respectivement aux longueurs d'ondes caractéristiques $\lambda_h = 2\pi h$ et $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}}$. Quelle est la signification physique associée à λ_h et à λ_c ? Estimer l'ordre de grandeur de ces longueurs d'ondes caractéristiques. Dans le cas de longueurs d'ondes beaucoup plus petites que la profondeur de l'océan ($\lambda \ll \lambda_h$), et telles que $\lambda \ll \lambda_c$, calculer les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

Indication : à l'interface air/eau $\gamma = 74 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. On considère une profondeur de l'océan de 7 km.

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh) = gk \left(1 + \frac{\gamma}{g\rho}k^2\right) \tanh(kh) \quad (18)$$

$$\omega^2 = gk \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2}\right) \tanh\left(\frac{k}{k_h}\right) \quad (19)$$

Les comportements limites $k/k_h \gg 1$ ou $k/k_h \ll 1$, selon que $\lambda \ll \lambda_h$ ou $\lambda \gg \lambda_h$, correspondent physiquement aux situations où les effets liés à la profondeur sont importants ou négligeables. Et on a ici :

$$\lambda_h = 2\pi h \approx 44 \text{ km}$$

De plus, la forme de la relation de dispersion et donc le comportement des ondes de surface dépendent fortement du terme $1 + \frac{\gamma}{g\rho}k^2$, selon que $\frac{\gamma}{g\rho}k^2 \gg 1$ ou $\frac{\gamma}{g\rho}k^2 \ll 1$. Physiquement, ces deux situations correspondent respectivement aux régimes où les effets de tension de surface dominent, ou sont négligeables, devant les effets liés à la gravité. Et on peut calculer :

$$\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}} \approx 17 \text{ mm}$$

Dans le cas où $\lambda \ll \lambda_h$, on a $kh \gg 1$ donc $\tanh(kh) \approx 1$. La relation de dispersion devient :

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{\gamma}{g\rho}k^2\right) gk \quad (20)$$

- Pour les ondes capillaires, $\lambda \ll \lambda_c$ donc $\frac{\gamma}{g\rho}k^2 \gg 1$:

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{\rho}k^3 \quad (21)$$

Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} \quad (22)$$

Remarque (non demandé dans l'examen) :

- Pour les ondes de gravité, $\lambda \gg \lambda_c$ donc $\frac{\gamma}{g\rho}k^2 \ll 1$:

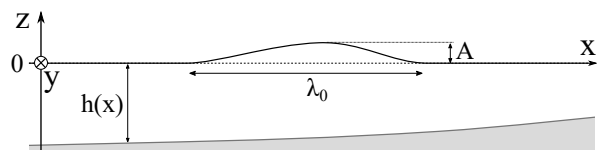
$$\omega^2 \approx gk \quad (23)$$

Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{k^{3/2}} \quad (24)$$

On considère maintenant des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que la profondeur de l'océan, $\lambda \gg \lambda_h$, ainsi que $\lambda \gg \lambda_c$. De plus, on considère une perturbation de la surface de l'eau d'une amplitude $\max[\eta(x)] = A$ et de largeur λ_0 , qui se propage selon x . Cette vague peut être exprimée comme une superposition d'ondes harmoniques de nombres d'ondes $k \in [0, \frac{2\pi}{\lambda_0}]$.

Comme précédemment, l'amplitude reste petite devant la profondeur, $A \ll h$. La profondeur varie selon x , mais suffisamment lentement pour considérer qu'on a localement sur la largeur de la perturbation $h(x) \approx h$, de sorte que les développements précédents restent valides.



(f) Montrer qu'au premier ordre en kh , la vitesse de groupe de la perturbation est $v_g = \sqrt{gh}$.

En considérant $\lambda \gg \lambda_c$, la relation de dispersion devient :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (25)$$

Et avec de plus $\lambda \gg \lambda_h$, c'est à dire $kh \ll 1$:

$$\omega^2 = ghk^2 \quad (26)$$

$$\omega = \sqrt{ghk} \quad (27)$$

Donc la vitesse de groupe de la perturbation est $v_g = \sqrt{gh}$.

(g) L'énergie mécanique de la vague, par unité de volume, est donnée en moyenne par $e_m = \frac{\rho g A^2}{8h}$. En négligeant les effets de dissipation (due à la viscosité, aux frottements avec le fond de l'océan, etc...), et en s'appuyant sur des considérations de conservation, montrer que la hauteur et la largeur de la perturbation évoluent comme :

$$A \propto h^{-1/4} \quad \lambda_0 \propto \sqrt{h}.$$

La vague se propage selon x , à une vitesse $v_g = \sqrt{gh}$. Considérons une largeur b de la perturbation selon la direction y . Le flux d'énergie total de la vague est donc donné par :

$$\begin{aligned} F_E &= (\text{énergie sur une surface } yOz) \cdot (\text{vitesse de la vague}) \\ &= e_m h b \sqrt{gh} \\ &= \frac{\rho g^{3/2}}{8} A^2 b \sqrt{h} \end{aligned}$$

Si on considère la largeur de la vague selon y constante ($b = cst$, ce qui est le cas dans notre résolution), on obtient bien $A \propto h^{-1/4}$. Cette relation est appelée loi de Green.

Remarque : nous venons aussi de montrer que de manière plus générale, $F_E = cst$ permet d'obtenir $A \cdot b^{1/2} \cdot h^{1/4} = cst$.

L'énergie mécanique moyenne totale est :

$$E = e_m h b \lambda_0 = cst \quad (28)$$

$$\frac{\rho g A^2}{8} b \lambda_0 = cst \quad (29)$$

En utilisant de plus la loi de Green, on en déduit $\lambda_0 \propto A^{-2} \propto h^{1/2}$.

- (h) Suite à un séisme au niveau du fond marin à une profondeur de 7 km, une perturbation de largeur 350 km et de hauteur 60 cm se forme à la surface de l'océan. Quelle est l'ordre de grandeur de sa vitesse ? Arrivant proche des côtes, où la profondeur de l'eau est réduite à 2 m, que sont devenues la vitesse, hauteur et largeur de cette perturbation ?

Sa vitesse est $v_g = \sqrt{gh} = 262 \text{ m/s}$.

Lorsque la profondeur est réduite à $h' = 2 \text{ m}$, sa vitesse, hauteur et largeur deviennent respectivement $v'_g = \sqrt{gh'} = 4.4 \text{ m/s}$, $A' = A(h/h')^{1/4} = 4.6 \text{ m}$ et $\lambda'_0 = \lambda_0(h'/h)^{1/2} = 5.9 \text{ km}$.

Remarque : En fait l'observation montre que cet amplification est en réalité bien plus importante. Cela est principalement dû aux effets non-linéaire que nous n'avons pas pris en compte dans notre résolution simplifiée.

- (i) En utilisant une approximation à un ordre plus élevé en kh par rapport au point (f), montrer que l'écart de vitesses de phase Δv_ϕ , sur l'ensemble des ondes de nombre d'onde k composants la perturbation, est de l'ordre de $\Delta v_\phi \sim \sqrt{gh} \frac{h^2}{\lambda_0^2}$.

En utilisant le fait que $h \ll \lambda$, i.e. $kh \ll 1$, on peut écrire la vitesse de phase comme :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{3} \right)^{1/2} = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right) \quad (30)$$

La différence de phase entre le plus petit nombre d'onde ($k = 0$) et le plus grand ($k = 2\pi/\lambda_0$) est donc :

$$\Delta v_\phi = \sqrt{gh} - \sqrt{gh} \left(1 - \frac{(2\pi)^2 h^2}{6\lambda_0^2} \right) \sim \sqrt{gh} \frac{h^2}{\lambda_0^2} \quad (31)$$

- (j) L'écart de vitesses de phase tend à disperser le paquet d'onde, donc à atténuer la perturbation. Mais un autre effet s'oppose à cette dispersion. Comme v_g dépend de la hauteur, montrer que la différence de vitesse entre le point le plus haut et plus bas de la perturbation est de l'ordre de $\Delta v^* \sim A\sqrt{\frac{g}{h}}$. Cela donne lieu à un raidissement de la perturbation, et un enrichissement de son spectre spatial. Lorsque ces deux effets se compensent, la perturbation (que l'on appelle alors "onde solitaire") arrive à se propager dans le milieu dispersif sans s'atténuer. Montrer que cette condition de formation d'une onde solitaire peut s'exprimer $U \sim 1$, avec U un nombre sans dimension que l'on précisera. Vérifier que l'exemple de la perturbation donné en question (h) vérifie bien cette condition.

La vitesse de groupe de la vague à une hauteur h est $v_g = \sqrt{gh}$. Si on considère cette vitesse au point le plus élevé de la perturbation, $v_g^+ = \sqrt{g(h+A)}$. Donc :

$$\Delta v^* = v_g^+ - v_g^- \approx \sqrt{gh} \left(1 + \frac{A}{2h} \right) - \sqrt{gh} \sim A\sqrt{\frac{g}{h}} \quad (32)$$

Si $\Delta v^* \sim \Delta v_\phi$, les deux effets mentionnés précédemment se compensent et le paquet d'onde se propage sans se disperser.

Cet effet a lieu lorsque :

$$A\sqrt{\frac{g}{h}} \sim \sqrt{gh} \frac{h^2}{\lambda_0^2} \quad (33)$$

$$A \frac{\lambda_0^2}{h^3} \sim 1 \quad (34)$$

Remarque : nous venons de définir le nombre sans dimension appelé nombre d'Ursell $U = A \frac{\lambda_0^2}{h^3}$, qui définit le régime dans lequel on se trouve dans la cas d'ondes de gravité en faible profondeur.

- Régime linéaire : $U \rightarrow 0$
- Onde solitaire : $U \sim 1$
- Stokes : $U < 10$
- Mascaret : $U \gg 1$

(cf. cours EPFL C. Ancey, Chap. 4).

Le nombre d'Ursell pour l'exemple donné en question (h) donne $U = A \frac{\lambda_0^2}{h^3} = 0.6 \cdot 350000^2 / 7000^3 = 0.21$. Le nombre d'Ursell de cette perturbation est bien de l'ordre de l'unité, une onde solitaire peut se former et se propager.

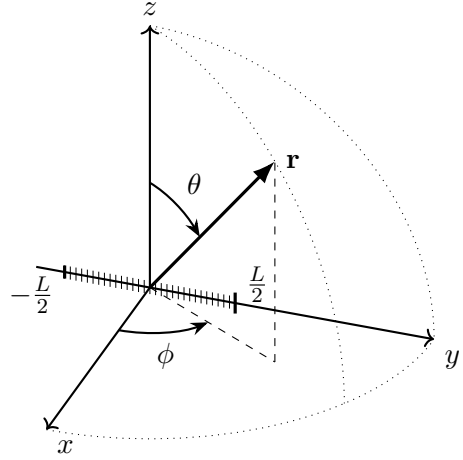
Indications : on rappelle que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\tanh(x) \underset{x \ll 1}{\approx} x - x^3/3$.

2. Antenne réseau à commande de phase.

Un courant électrique oscillant dans un fil conducteur génère un champ électromagnétique qui se propage dans l'espace. En juxtaposant un ensemble de tels fils, le signal émis par chacun d'entre eux s'additionne aux autres. En déphasant le signal émis par chaque fil, il est possible de modifier la direction du maximum de l'intensité du signal total sans avoir à changer l'orientation de l'appareil. Un tel dispositif peut donc servir d'antenne directionnelle.

On modélise l'antenne par un ensemble de fils verticaux, alignés le long de \mathbf{e}_z , distribués sur une distance L le long de \mathbf{e}_y . L'antenne est centrée à l'origine. Le courant électrique $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ oscillant verticalement dans le fil décalé de y_0 le long de \mathbf{e}_y par rapport à l'origine ($-L/2 \leq y_0 \leq L/2$) est déphasé de $\beta(y_0)$ et peut être approximé par

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = J_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(z) \mathbf{e}_z e^{i(\beta(y_0) - \omega t)}.$$



Notation. Afin de simplifier les expressions, on séparera la partie temporelle des oscillations de la partie spatiale :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

- (a) En partant des équations de Maxwell dans le vide, montrer que les champs électrique, \mathbf{E} , et magnétique, \mathbf{B} , satisfont l'équation d'onde.

Les équations de Maxwell dans le vide sont données par

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (35)$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, et en utilisant l'identité vectorielle $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, on obtient

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (36)$$

On identifie facilement les termes $\nabla \cdot \mathbf{E}$ et $\nabla \times \mathbf{B}$ de (35), ce qui nous donne finalement

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (37)$$

où l'on reconnaît l'équation d'onde pour $u^2 = c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$.

Un raisonnement identique en partant de l'équation de Maxwell-Ampère permet de montrer que

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (38)$$

Pour commencer, on considère un seul fil. On supposera que la distance à l'observateur, r , est grande en comparaison aux longueurs d'ondes électromagnétiques λ , qui elles même sont grandes comparée

à y_0 , i.e. $r \gg \lambda \gg y_0$. Dans la suite, on négligera tous les termes d'ordre y_0/r et λ/r ou supérieurs, excepté dans le déphasage où on gardera les termes d'ordre y_0/r et on négligera les termes d'ordre supérieurs.

- (b) Soit $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ avec $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potentiel vecteur. Montrer que, sous les approximations considérées,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi r} e^{i[kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0)]} \mathbf{e}_z.$$

On rappelle l'équation de potentiel retardé

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}',$$

où $k = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

Calculer l'intégrale se fait très simplement, étant donné les distributions de Dirac, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(z) e^{i(k\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| + \beta(y_0))}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \mathbf{e}_z d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} e^{i\beta(y_0)} \frac{1}{\Delta r} e^{ik\Delta r} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (39)$$

où on a posé

$$\Delta r = \|\mathbf{r} - y_0 \mathbf{e}_y\| = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + z^2}. \quad (40)$$

On change pour un système de coordonnées sphériques, (r, θ, ϕ) , soit

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (41)$$

et donc

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + (r \sin \theta \sin \phi - y_0)^2 + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 2ry_0 \sin \theta \sin \phi + y_0^2 + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{y_0^2 - 2y_0 r \sin \theta \sin \phi + r^2} \\ &= r \sqrt{1 + \frac{y_0^2 - 2y_0 r \sin \theta \sin \phi}{r^2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Sous l'hypothèse $y_0 \ll r$, on peut faire le développement limité suivant, au premier ordre en $\epsilon = y_0/r$,

$$\Delta r(\epsilon) = \Delta r(0) + \Delta r'(0) y_0/r + \mathcal{O}(y_0^2) = r - \sin \theta \sin \phi y_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (43)$$

où l'on garde le terme d'ordre y_0/r puisque il apparaît dans le déphasage.

De façon similaire, on s'intéresse à

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\Delta r(\epsilon)} = \frac{1}{\Delta(0)} + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{1}{r} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (44)$$

où l'on néglige les termes d'ordre y_0/r et supérieurs.

Et finalement

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 J_0}{4\pi r} e^{i(kr - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0))} \mathbf{e}_z \quad (45)$$

Ou également

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0 J_0}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0))} \mathbf{e}_z. \quad (46)$$

Il s'agit bien d'une onde sphérique avec un déphasage de

$$\beta(y_0) - ky_0 \sin \theta \sin \phi \quad (47)$$

- (c) Dériver le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Montrer que, sous les approximations considérées, il peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \mathbf{F}(\theta, \phi) e^{i[kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0)]},$$

avec \mathbf{F} une fonction à spécifier.

On calcule $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ à partir du potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ avec

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (48)$$

Etant donné que l'opérateur différentiel ∇ n'impacte pas la partie temporelle, on en déduit que

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}. \quad (49)$$

Selon notre système de coordonnées sphériques on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{A(\mathbf{r})}{r} \mathbf{e}_z = \underbrace{\frac{A(\mathbf{r})}{r} \cos \theta}_{A_r} \mathbf{e}_r + \underbrace{-\frac{A(\mathbf{r})}{r} \sin \theta}_{A_\theta} \mathbf{e}_\theta \\ A(\mathbf{r}) &= A_0 e^{ikr} e^{-iky_0 \sin \theta \sin \phi} e^{i\beta(y_0)} \end{aligned} \quad (50)$$

et donc en appliquant le rotationnel

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \left[-\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{\mathbf{e}_r \sin \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} - \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial(\sin \theta A)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\cos \theta A)}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

Etant donné notre définition de $A(\mathbf{r})$, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial r} &= A(\mathbf{r}) \times (ik) \\ \frac{\partial A}{\partial \theta} &= A(\mathbf{r}) \times (-iky_0 \cos \theta \sin \phi) \\ \frac{\partial A}{\partial \phi} &= A(\mathbf{r}) \times (-iky_0 \sin \theta \cos \phi) \end{aligned} \quad (52)$$

et encore

$$\frac{\partial(\cos \theta A)}{\partial \theta} = -(\sin \theta + ik y_0 \cos^2 \theta \sin \phi) A(\mathbf{r}) \quad (53)$$

Ce qui nous conduit à calculer

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} A(\mathbf{r}) \times (-iky_0 \sin \theta \cos \phi) \sim \mathcal{O}(\epsilon) \\ &+ \frac{\mathbf{e}_\theta}{r^2 \tan \theta} A(\mathbf{r}) \times (-iky_0 \sin \theta \cos \phi) \sim \mathcal{O}(\epsilon) \\ &+ \frac{\mathbf{e}_\phi}{r^2} A(\mathbf{r}) \times (\sin \theta + ik y_0 \cos^2 \theta \sin \phi) \sim \mathcal{O}(\epsilon') + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &- \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \sin \theta A(\mathbf{r}) \times (ik), \sim \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (54)$$

où $\epsilon = y_0/r$ et $\epsilon' = \lambda/r$.

En négligeant les termes d'ordres ϵ et ϵ' et supérieurs, on trouve

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \approx \frac{-ik \sin \theta A_0}{r} e^{ikr} e^{-iky_0 \sin \theta \sin \phi} e^{i\beta(y_0)} \mathbf{e}_\phi, \quad (55)$$

soit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{-ik \sin \theta A_0}{r} e^{i(kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0))} \mathbf{e}_\phi. \quad (56)$$

On identifie donc

$$\mathbf{F}(\theta) = -ik \sin \theta A_0 \mathbf{e}_\phi. \quad (57)$$

On observe que le champ magnétique \mathbf{B} a également une forme proche de l'onde sphérique. Cependant l'amplitude de la propagation est proportionnelle à $\sin \theta$. On a donc un maximum lorsque $\theta = \pi/2$ et deux minimums lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. La perturbation du champ magnétique se propage donc dans toutes les directions, avec un lobe dans le plan horizontal. Cela correspond au résultat d'une antenne centrée à l'origine, vue en cours, avec un déphasage induit par le déplacement y_0 .

- (d) Dériver le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Discuter la direction du vecteur de Poynting. Est-ce que l'intensité du signal émis par le fil possède une symétrie sphérique ?

Pour calculer $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, on utilise Maxwell-Ampère, soit donc

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = i\omega\mu_0\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \implies \tilde{\mathbf{E}} = \frac{-i}{\omega\mu_0\epsilon_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}. \quad (58)$$

Etant donné que $\tilde{\mathbf{B}}$ est orienté selon \mathbf{e}_ϕ , et en se rappelant que $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, on calcule facilement, à l'ordre zéro en ϵ et ϵ'

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{-i}{\omega\mu_0\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial(r B_\phi)}{\partial r} \right) \\ &= \frac{-i}{\omega\mu_0\epsilon_0} \left(\frac{-ik \mathbf{e}_r}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin^2 \theta A(\mathbf{r}))}{\partial \theta} + \frac{ik \sin \theta \mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \\ &\approx \frac{ik^2 \sin \theta}{\omega\mu_0\epsilon_0} \frac{A_0}{r} e^{ikr} e^{-iky_0 \sin \theta \cos \phi} e^{i\beta(y_0)} \mathbf{e}_\theta \\ &\approx \frac{ik \sin \theta}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{A_0}{r} e^{ikr} e^{-iky_0 \sin \theta \cos \phi} e^{i\beta(y_0)} \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (59)$$

Sans surprise, \mathbf{E} se propage de façon similaire à \mathbf{B} mais de façon perpendiculaire.

Étant donné que \mathbf{B} est selon \mathbf{e}_ϕ et que \mathbf{E} est selon \mathbf{e}_θ , on observe que le vecteur de Poynting

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}} \quad \text{est selon} \quad \mathbf{e}_r, \quad (60)$$

et que par conséquent, l'énergie est transportée radialement par la perturbation. On pourrait imaginer que ceci est dû aux approximations que nous avons faite. Cependant, si nous avons gardé les termes d'ordres plus élevés, ceux-ci se seraient annulés les uns les autres dans l'expression du vecteur de Poynting et nous aurions retrouvé le même résultat. En pratique, les expressions pour \mathbf{E} et \mathbf{B} que nous avons dérivées sont appelées "radiation fields", car elles contiennent la partie de la perturbation qui radie dans toutes les directions, contrairement aux termes correctifs que l'on nomme "storage fields".

On considère maintenant l'ensemble des fils de l'antenne. Pour simplifier les calculs, on supposera en avoir une infinité de sorte à avoir un continuum de fils dans l'intervall $-L/2 \leq y_0 \leq L/2$.

- (e) Dans un premier temps, on supposera que $\beta(y_0) = 0$. Par superposition, calculer le champ magnétique total résultant de la somme des contributions de chaque fils, et donner l'angle ϕ qui maximise l'intensité du signal.

Pour trouver $\mathbf{B}_{tot}(\mathbf{r}, t)$, on somme les contributions de chaque filament en normalisant par la longueur L de l'antenne, i.e.,

$$\mathbf{B}_{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dy_0 \quad (61)$$

L'expression du champ magnétique est reprise du résultat précédent, soit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{-ik \sin \theta A_0}{r} e^{i(kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0))} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (62)$$

L'angle θ n'ayant pas d'influence sur l'intégrale, on se propose d'étudier une fonction de la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi)}, \quad (63)$$

où le déphasage en $iky_0 \sin \theta \sin \phi$ vient du petit décalage en y_0 comme étudié dans la question précédente.

On calcule donc

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{tot} &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-iky_0 \sin \theta \sin \phi} dy_0 \\ &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[\frac{i}{kL \sin \theta \sin \phi} e^{-iky_0 \sin \theta \sin \phi} \right]_{y_0=-L/2}^{y_0=L/2} \\ &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[\frac{i}{kL \sin \theta \sin \phi} \left(e^{-ik \frac{L}{2} \sin \theta \sin \phi} - e^{ik \frac{L}{2} \sin \theta \sin \phi} \right) \right] \\ &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[\frac{2}{kL \sin \theta \sin \phi} \left(\frac{e^{ik \frac{L}{2} \sin \theta \sin \phi} - e^{-ik \frac{L}{2} \sin \theta \sin \phi}}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left[\frac{2}{kL \sin \theta \sin \phi} \sin \left(\frac{kL \sin \theta \sin \phi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t)} \text{sinc} \left(\frac{kL \sin \theta \sin \phi}{2} \right), \end{aligned} \quad (64)$$

où on a utilisé le sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

L'intensité est donnée par

$$I \propto \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} = \frac{k^2 \sin^2 \theta A_0^2}{r^2} \text{sinc}^2 \left(\frac{kL}{2} \sin \theta \sin \phi \right). \quad (65)$$

Le maximum d'intensité est donc atteint lorsque l'argument du sinus cardinal vaut zéro

$$\sin \theta \sin \phi = 0. \quad (66)$$

Étant donné que $\mathbf{B} \propto \sin \theta$, les angles d'observations où $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ voient leur amplitude tomber à zéro. Le maximum est donc donné pour $\theta = \pi/2$ et $\phi = 0$, ce qui correspond à un observateur se trouvant directement en face de notre antenne.

- (f) On pose maintenant $\beta(y_0) = ay_0 + b$, où a et b sont des constantes. Dans ce cas, calculer le champ magnétique total et donner l'angle ϕ qui maximise l'intensité du signal.

Le raisonnement est identique au point précédent. Cependant, cette fois-ci, on doit intégrer

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{tot} &= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(rk - \omega t + b)} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(ay_0 - ky_0 \sin \theta \sin \phi)} dy_0 \\
&= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t + b)} \left[\frac{i}{L(k \sin \theta \sin \phi - a)} e^{-iy_0(k \sin \theta \sin \phi - a)} \right]_{y_0=-L/2}^{y_0=L/2} \\
&= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t + b)} \left[\frac{i}{L(k \sin \theta \sin \phi - a)} \left(e^{-i\frac{L}{2}(k \sin \theta \sin \phi - a)} - e^{i\frac{L}{2}(k \sin \theta \sin \phi - a)} \right) \right] \\
&= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t + b)} \left[\frac{2}{L(k \sin \theta \sin \phi - a)} \left(\frac{e^{i\frac{L}{2}(k \sin \theta \sin \phi - a)} - e^{-i\frac{L}{2}(k \sin \theta \sin \phi - a)}}{2i} \right) \right] \\
&= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t + b)} \left[\frac{2}{L(k \sin \theta \sin \phi - a)} \sin \left(\frac{L(k \sin \theta \sin \phi - a)}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\mathbf{B}_0^*}{r} e^{i(kr - \omega t + b)} \text{sinc} \left(\frac{kL \sin \theta \sin \phi - a}{2} \right),
\end{aligned} \tag{67}$$

Et donc l'intensité est

$$I \propto \frac{k^2 \sin^2 \theta A_0^2 L^2}{r^2} \text{sinc}^2 \left(\frac{L}{2} (k \sin \theta \sin \phi - a) \right) \tag{68}$$

On commence par observer que le paramètre b n'a pas d'influence sur l'intensité puisqu'il ajoute un déphasage constant.

Ici encore, le maximum du sinus cardinal est donné lorsque son argument vaut zéro, ce qui correspond cette fois-ci à

$$k \sin \theta \sin \phi = a \tag{69}$$

Comme le champ magnétique est proportionnel à $\sin \theta$, le maximum est donné par $\theta = \pi/2$. On trouve donc l'angle ϕ qui vérifie le maximum d'intensité à

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{a}{k \sin \theta} \right) \tag{70}$$

Étant donné un paramètre a , on observe que le maximum d'intensité est produit pour une certaine direction d'observation ϕ . De façon opposée, si on doit envoyer un message dans une direction d'observation ϕ , alors il est possible de choisir le paramètre a en conséquence afin de ne pas avoir à modifier l'orientation de l'antenne.

Un vaisseau spatial muni d'une antenne directionnelle à l'avant du cockpit se déplace à vitesse relativiste $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ par rapport à la Terre et cherche à y envoyer un message. Lorsqu'il émet son message, il mesure sa distance à la Terre, r' , et observe cette dernière sous un angle ϕ'_0 par rapport à sa ligne de déplacement, soit $\mathbf{r}'_{terre} = r' \cos \phi'_0 \mathbf{e}_x + r' \sin \phi'_0 \mathbf{e}_y$. On cherche à déterminer l'angle ϕ' avec lequel il doit envoyer son message afin que la station sur Terre le reçoive.

On remarque que l'image de la Terre, observée par l'astronaute, est également un signal lumineux. On distingue donc trois événements dans l'espace-temps : l'évènement A où la terre émet son image, l'évènement B où le vaisseau reçoit l'image de la Terre et répond, et finalement l'évènement C où la Terre reçoit le message. Dans le référentiel de l'astronaute, les trois événements ont respectivement les coordonnées (x'_A, y'_A, t'_A) , $(0, 0, 0)$ et (x'_C, y'_C, t'_C) .

- (g) Exprimer l'angle ϕ' en fonction de x'_C et y'_C ainsi que x'_A , y'_A et t'_A en fonction de r' et ϕ'_0 .

On commence par définir deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' dans lesquels sont immobiles respectivement la Terre et le vaisseau spatial. Depuis \mathcal{R} , on observe \mathcal{R}' se déplacer à vitesse $v\mathbf{e}_x$. Depuis \mathcal{R}' on observe \mathcal{R} se déplacer à vitesse $-v\mathbf{e}_x$.

Dans un premier temps, on doit observer qu'il n'est pas possible d'identifier la position de la Terre, vue du vaisseau, par ses coordonnées (r', ϕ'_0) directement. En effet, l'image de la Terre étant un signal lumineux qui se déplace à vitesse c , les coordonnées (r', ϕ'_0) ne représentent pas la position de la Terre mais la position qu'elle avait dans le passé, lorsqu'elle a émis son image.

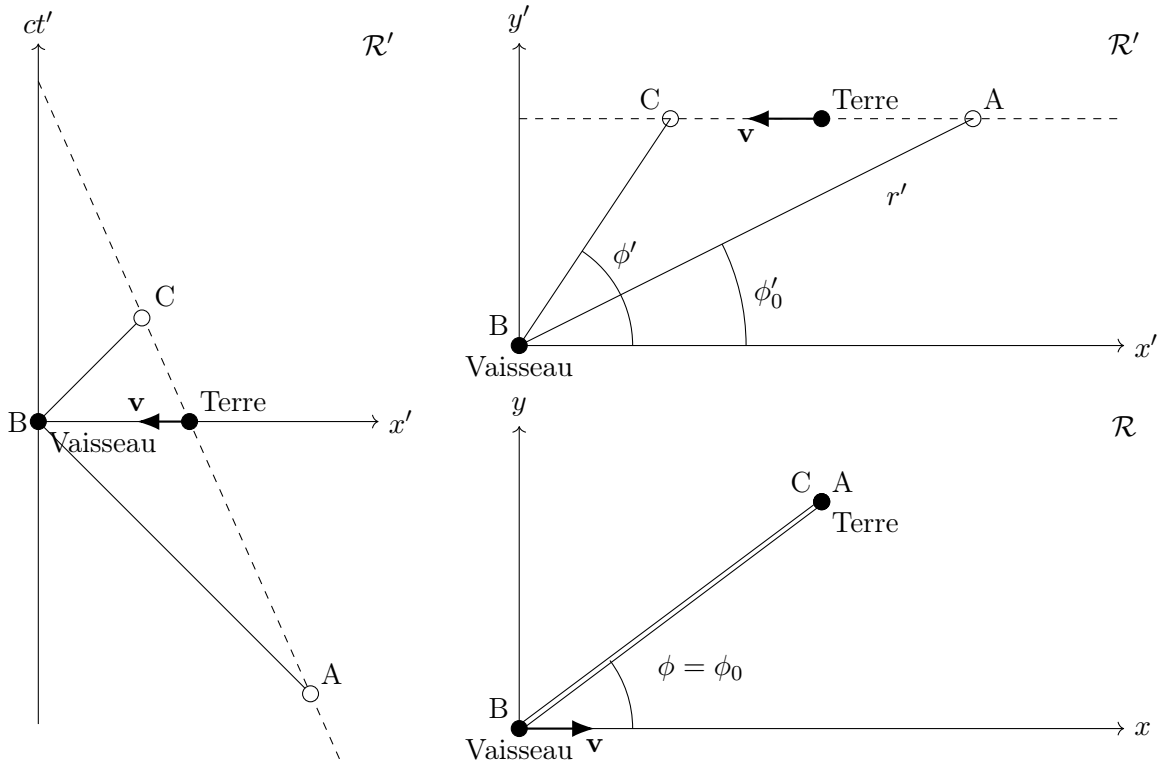
De façon similaire, la direction ϕ' dans laquelle il faut envoyer sa réponse ne dépend pas de la position observée de la cible dans le ciel, mais de la position qu'elle aura au moment où elle croisera la trajectoire du message.

Afin de répondre correctement, on commence par poser 3 évènements dans l'espace-temps

A : La Terre envoie un signal lumineux, son image

B : Le vaisseau reçoit l'image de la Terre et répond immédiatement avec un message

C : La Terre reçoit le message



La lumière se déplaçant en ligne droite à vitesse c , les deux trajectoires aller-retour empruntées sont donc les droites qui relient les vecteurs spatiaux $\mathbf{A'B'}$ et $\mathbf{B'C'}$.

En particulier,

$$\mathbf{A'B'} = (0 - x'_A, 0 - y'_A) = (-r' \cos \phi'_0, -r' \sin \phi'_0) \quad (71)$$

et

$$\mathbf{B'C'} = (x'_C - 0, y'_C - 0) \implies \tan(\phi') = \frac{y'_C}{x'_C} \quad (72)$$

Le temps parcouru par la lumière pour parcourir $\mathbf{A'B'}$ se déduit facilement de sa vitesse c et de la distance parcourue r' .

Ainsi on obtiens l'expression de ϕ'

$$\tan \phi' = \frac{y_C}{x_C} \quad (73)$$

Et les expressions de x'_A , y'_A et t'_A

$$\begin{aligned} x'_A &= r' \cos \phi'_0 \\ y'_A &= r' \sin \phi'_0 \\ t'_A &= -r'/c \end{aligned} \quad (74)$$

Le but étant d'exprimer ϕ' , on va chercher à exprimer x'_C et y'_C en fonction de x'_A et y'_A , puis donc de r' et ϕ'_0 .

- (h) Appliquer la transformation de Lorentz pour calculer les coordonnées des événements A , B , et C dans le référentiel où la Terre est au repos.

On applique la transformée de Lorentz pour passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} , soit

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (75)$$

Ce qui nous donne les coordonnées des événements

$$\begin{aligned} A &= (\gamma(x'_A + vt'_A), y'_A, \gamma\left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}\right)) \\ B &= (0, 0, 0) \\ C &= (\gamma(x'_C + vt'_C), y'_C, \gamma\left(t'_C + \frac{vx'_C}{c^2}\right)) \end{aligned} \quad (76)$$

- (i) Exprimer ϕ' comme fonction des paramètres mesurés par l'astronaute.

Dans le référentiel de la terre, celle-ci est immobile. On envoie un faisceau lumineux entre A et B qui rebondit sur B et revient. De ce point de vue, les deux trajectoires, aller-retour, sont donc identiques. La distance parcourue est la même, et par conséquent le temps de parcours également. Soit

$$\Delta t_{AC} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = 2\Delta t \quad (77)$$

De plus, la Terre étant immobile, les coordonnées spatiales des événements A et C sont donc identiques.

On en déduit donc le système d'équations

$$\begin{cases} \gamma(x'_A + vt'_A) &= \gamma(x'_C + vt'_C) \\ y'_A &= y'_C \\ \gamma\left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}\right) + 2\Delta t &= \gamma\left(t'_C + \frac{vx'_C}{c^2}\right) \end{cases} \quad (78)$$

où

$$\Delta t = 0 - \underbrace{\gamma\left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}\right)}_{\Delta t_{AB}} = \underbrace{\gamma\left(t'_C + \frac{vx'_C}{c^2}\right)}_{\Delta t_{BC}} - 0 \quad (79)$$

Si on remplace $2\Delta t = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC}$ dans (78), on obtient une relation triviale qui ne nous intéresse pas.

En revanche, étant donné que $\Delta t_{AB} = \Delta t_{BC} = \Delta t$, remplacer $2\Delta t$ par $2\Delta t_{AB}$ où $2\Delta t_{BC}$ permet de progresser. Ce qui nous conduit au système d'équations

$$\begin{cases} \gamma(x'_A + vt'_A) &= \gamma(x'_C + vt'_C) \\ -\gamma\left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}\right) &= \gamma\left(t'_C + \frac{vx'_C}{c^2}\right) \end{cases} \quad (80)$$

Et après simplification

$$\begin{cases} x'_A + vt'_A &= x'_C + vt'_C \\ -t'_A - \frac{vx'_A}{c^2} &= t'_C + \frac{vx'_C}{c^2} \end{cases} \quad (81)$$

Ayant déjà $y'_C = y'_A$, on cherche x'_C en fonction de x'_A et t'_A . Soit

$$\begin{aligned} t'_C &= \frac{1}{v}(x'_A - x'_C) + t'_A \\ &= -t'_A - \frac{v}{c^2}x'_A - \frac{v}{c^2}x'_C \end{aligned} \quad (82)$$

D'où l'on tire

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad &\left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{v}\right)x'_A = -2t'_A - \left(\frac{v}{c^2} + \frac{1}{v}\right)x'_A \\ \Rightarrow \quad &x'_C = \frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}x'_A + \frac{2vt'_A}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (83)$$

Du résultat précédent, (71), on sait que $x'_A = r' \cos \phi'_0$, $y'_A = r' \sin \phi'_0$ et $t'_A = -r'/c$. Ce qui nous donne

$$x'_C = \frac{r'}{1 - v^2/c^2} \left((1 + v^2/c^2) \cos \phi'_0 - 2v/c \right) \quad (84)$$

Et finalement

$$\tan(\phi') = \frac{y'_C}{x'_C} = \frac{(1 - v^2/c^2) \sin \phi'_0}{(1 + v^2/c^2) \cos \phi'_0 - 2v/c} \quad (85)$$

Dans le cas limite où $v = 0$, on obtient $\phi' = \phi'_0$, ce qui correspond bien à notre intuition.

Lorsque $v \rightarrow c$, étant donné que $v < c$, le numérateur tend vers 0^+ . Dans le cas $\phi'_0 \neq 0$, le dénominateur devient négatif, par conséquent, $\tan(\phi') \rightarrow 0^-$. Ceci correspond en fait au cas où $\phi' \rightarrow \pi$.

Pour un angle ϕ'_0 donné, il faut envoyer le message avec un angle ϕ' légèrement plus important. Lorsque

$$\cos \phi'_0 \geq \frac{2v}{c(1 + v^2/c^2)} \quad (86)$$

il faut envoyer le message vers l'arrière par rapport au sens du mouvement.

Indication : Equations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Indication : Intégration de la distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

Indication : Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$