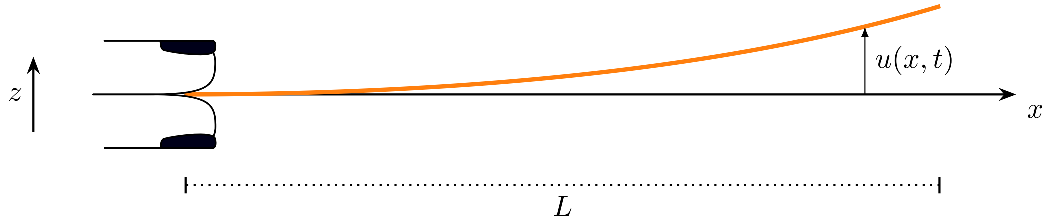
30 mai 2025

Série 13 : Test à blanc

1 Spaghetti vibranti

Forte du succès de ses expériences de l'année passée, Paoletta désire appliquer ce qu'elle a appris récemment. Elle prend un spaghetti non cuit 🍝, que l'on modélise par un cylindre de longueur L, de diamètre ℓ et de masse par unité de longueur μ, qu'elle maintient par l'une de ses extrémité et le fait vibrer. On note $u(x,t)$ le déplacement transverse du spaghetti en un point x et au temps t.



En négligeant les effets externes tels que la gravité ou les frottements, on trouve que le déplacement transverse de petite amplitude $u(x,t)$ du spaghetti vérifie une équation similaire à celle d'une onde, l'équation d'Euler-Bernoulli utilisée en théorie des poutres

$$EI\partial_x^4 u(x,t) + \mu\partial_t^2 u(x,t) = 0, \tag{$*$}$$

où E est le module de Young du spaghetti et $I = \pi\ell^4/64$ un coefficient caractérisant sa géométrie, tout deux supposées constants et connus, et où l'on utilise la notation $\partial_x = \partial/\partial x$ et $\partial_t = \partial/\partial t$ pour exprimer les dérivées. Paoletta veut trouver la solution de l'équation ($*$) et comprendre la dynamique des oscillations.

(a) Afin de simplifier les calculs, Paoletta commence par chercher les solutions stationnaires. Ce faisant, elle suppose que les solutions cherchées sont de la forme

$$u(x,t) = q(t)\phi(x), \tag{$\dagger$}$$

où $q(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t) + \mathcal{B}\sin(\omega t)$, avec $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et ω constants. Montrer que $\phi(x)$ satisfait une équation différentielle de la forme

$$\partial_x^4\phi(x) - \beta^4\phi(x) = 0, \tag{$\ddagger$}$$

où β est à exprimer en fonction des paramètres connus. En déduire une relation de dispersion entre β et ω. Montrer qu'une solution de ($\ddagger$) est donnée par

$$\phi(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x) + C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x),$$

avec A, B, C, et D des constantes.

(b) Paoletta maintient fermement le spaghetti à son extrémité $x = 0$ de sorte à ce qu'en ce point il ne bouge pas et reste horizontal en tout temps. L'autre côté du spaghetti, $x = L$, est libre d'osciller. Par conséquent, l'extrémité libre ne subit aucun moment de flexion, $M(x,t) = EI\partial_x^2 u(x,t) = 0$, et aucune force de cisaillement, $V(x,t) = EI\partial_x^3 u(x,t) = 0$. Donner les quatres conditions aux bords nécessaires à la résolution de ($\ddagger$).

(c) Montrer qu'une solution stationnaire de ($*$) de la forme ($\dagger$) ne peut exister que si

$$\cosh(\beta L)\cos(\beta L) + 1 = 0. \tag{§}$$

Combien de solutions de l'équation (§), $\beta = \beta_n$, existe-t-il ?

(d) Montrer que la solution générale (†) qui satisfait les conditions au bord en $x=0$ et $x=L$ est donnée par

$$u(x,t)=\sum_n A_n q_n(t)\Big[\big[\cosh(\beta_n x)-\cos(\beta_n x)\big]-R_n\big[\sinh(\beta_n x)-\sin(\beta_n x)\big]\Big],$$

où les coefficients R_n sont à déterminer en fonction de β_n et L, avec A_n des constantes.

(e) L'équation (§) étant transcendante, il n'est pas possible de trouver ses solutions analytiquement. On peut cependant s'intéresser à une approximation asymptotique de la solution pour $\beta L \to +\infty$. Montrer que pour n suffisamment grand, les solutions de (§) peuvent être approximées par

$$\beta_n L \approx (n+1/2)\pi + \frac{(-1)^n}{\cosh\big[(n+1/2)\pi\big]}$$

(f) Montrer que les solutions ϕ_n de l'équation (‡), pour $\beta=\beta_n$, sont orthogonales et peuvent donc être utilisées comme base de fonctions. Esquisser la procédure à suivre pour étudier les vibrations du spaghetti pour un déplacement transversal initial $u(x,t=0)$, $\partial_t u(x,t=0)$ donné.

Paoletta impose une petite oscillation à l'extrémité $x=0$ du spaghetti, sans le déplacer verticalement mais tel que la pente en $x=0$ soit donnée par

$$\partial_x u(0,t)=\alpha(t)=\alpha_0\sin(\Omega t),$$

avec $\alpha_0 \ll 1$.

(g) On choisit de décomposer la solution en

$$u(x,t)=g(x,t)+w(x,t),$$

où $g(x,t)=x\alpha(t)$. Expliquer pourquoi une telle décomposition est opportune. Que représentent $g(x,t)$ et $w(x,t)$?

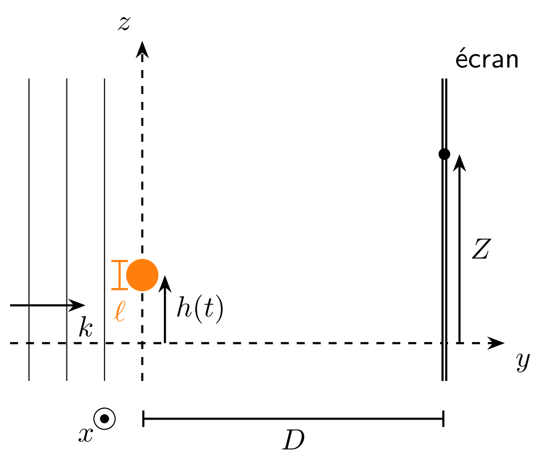
(h) Montrer que l'on peut écrire $w(x,t)=\sum_n A_n q_n(t)\phi_n(x)$, où $q_n(t)$ satisfait l'équation d'un oscillateur forcé

$$\partial_t^2 q_n(t)+\omega_n q_n(t)=I_n\Omega\sin(\Omega t),$$

où $\phi_n(x)$ est solution de l'équation (‡) pour $\beta=\beta_n$ avec les conditions au bord appropriées. Déterminer w_n et I_n.

(i) Donner l'expression complète de $u(x,t)$. On partira du principe que $q_n(0)=\partial_t q_n(0)=0$. Que se passe-t-il lorsque Ω approche ω_n ?

Dans un second temps, Paoletta cherche à mesurer précisément l'amplitude des vibrations obtenues à l'aide d'une technique non invasive. Pour ce faire, elle met en place une source lumineuse que l'on modélisera par des ondes planes d'incidence horizontale, de longueur d'onde $\lambda=2\pi/k$, se propageant dans la direction y, que l'on définit perpendiculaire à la verticale z et perpendiculaire à la direction du spaghetti x. Une petite fraction de la lumière incidente est bloquée par la section du spaghetti et produit une figure de diffraction sur un écran vertical placé à distance $D \gg \ell$, diffraction que l'on propose d'étudier.



(j) Discuter la relation entre la figure de diffraction de cette installation et celle d'une fente de hauteur ℓ.

(k) On suppose le spaghetti infiniment long, parfaitement rectiligne et positionné en $y = 0$. Par le principe d'Huygens, chaque élément infinitésimal de l'onde lumineuse en $(y = 0, z)$, se comporte comme une source secondaire $ds(z)$, d'amplitude $s_0\, dz$, émettant une onde cylindrique se propageant dans le plan (y, z) perpendiculaire au spaghetti. Montrer que, pour un point sur l'écran de coordonée verticale Z, la contribution d'un élément de source est approximée par

$$ds(Z) \approx \frac{s_0}{\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{ikZ^2}{2D}\right) \exp\left(\frac{ikZz}{D}\right) e^{i\omega t}\, dz.$$

On fera ici l'approximation de Fraunhofer $\ell^2 \ll \lambda D$, ainsi que $z, Z \ll D$.

(l) Les vibrations sont modélisées par un déplacement vertical constant dans l'espace, c'est-à-dire $u(x,t) = h(t)$, du spaghetti. Calculer l'intensité lumineuse de la diffraction observée sur l'écran à la position Z. Est-il possible de mesurer $h(t)$ à partir de celle-ci ? Pourquoi ?