Mécanique analytique Lecture 7 : Transformations Canoniques

Notes de cours de Paolo De le Rios

March 17, 2021

La transformation entre (q,p) et (f_+,f_-) qu'on a trouvé pour l'oscillateur harmonique est telle que

$$\begin{array}{l} \{q,p\}=1 \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q} \end{array}\right. \\ H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \{f_x,f_-\}=1 \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{f}_+=\frac{\partial K}{\partial f_-}=0 \\ \dot{f}_-=-\frac{\partial K}{\partial f_+}=0 \end{array}\right. \\ K=\text{ const.} \end{array} \tag{1}$$

La structure canonique est préservée. On l'appelle **Transformation canonique**.

Plus généralement, on cherche les règles pour faire une transformation du type

$$\left\{\begin{array}{l} Q_i=Q_i\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) \\ P_i=P_i\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) \end{array}\right. \qquad \text{telle que} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{array}\right. \quad \forall i \tag{2}$$

On va demander que les équations qu'on trouve soient simple plus tard.

Pour le faire on passe par le principe de moindre action et on profite de l'invariance de jauge.
Pour rappel, l'action est

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t\right)dt \tag{3}$$

On procède par étapes (attention : passages symboliques !)

1.
$$\begin{array}{l} H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L \\ \Rightarrow \quad L=\sum_i p_i\dot{q}_i-H(\{q_i\},\{p_i\},t) \end{array} \tag{4}$$

2.
$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i-H\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right)\right]dt \tag{5}$$

avec $\{q_i\left(t_1\right)\}$,$\{q_i\left(t_2\right)\}$,$\{p_i\left(t_1\right)\}$,$\{p_i\left(t_2\right)\}$ connus.

On montre ici que, formulée de cette façon, l'action mène aux équations canoniques de Hamilton :

$$\frac{\delta S}{\delta p_l(t)}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i \underbrace{\frac{\delta p_i}{\delta p_l}}_{\delta_{il}\delta(t-t')}\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_l}\delta\left(t-t'\right)\right]dt' \tag{6}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\delta(t-t')\left[\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l}\right]dt'=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{q}_l=\frac{\partial H}{\partial p_l}} \tag{7}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \frac{\delta \dot{q}_i}{\delta q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' \tag{8}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \underbrace{p_i \frac{d}{dt} \left(\delta_{i\ell} \delta(t-t')\right)}_{\text{par partie}} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' = \tag{9}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\sum_i \frac{dp_i}{dt} \delta_{il} \delta(t-t') - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' = \tag{10}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t') \left[-\dot{p}_\ell - \frac{\partial H}{\partial q_l} \right] dt' = 0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}} \tag{12}$$

Donc l'idée est que $\{p_l\}$ et $\{q_l\}$ sont les deux variables à "changer" pour chercher le minimum de s.

3. On veut faire le changement de variables $(\{q_i\}, \{p_i\})$ vers $(\{Q_i\}, \{P_i\})$ sans changer la physique (car bien évidemment le système reste le même).

Donc

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) + \frac{d}{dt} F \underbrace{(\{Q_i\}, \{P_i\}, \{q_i\}, \{p_i\}, t)}_{\text{pas de } \{\dot{q}_i\}, \{\dot{Q}_i\}, \ldots} \tag{13}$$

Où la première partie est la structure nécessaire pour avoir $\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$

$\frac{d}{dt} F$ est la dérivée totale compatible avec l'invariance de jauge.

Mais

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{14}$$

Donc, en remettant tout ensemble :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{15}$$

et il faut identifier les différents termes : on a typiquement 4 choix (par tradition)

$$\begin{array}{l} F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t) = F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial p_i} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = 0 \end{array} \tag{16}$$

On reste avec

$$\sum_i \underbrace{p_i \dot{q}_i}_{1} - \underbrace{H}_{2} = \underbrace{\sum_i P_i \dot{Q}_i}_{3} - \underbrace{K}_{2} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i}_{1} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i}_{3} + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial t}}_{2} \tag{17}$$

Alors en identifiant les termes 1 ensemble, 2 ensemble et 3 ensemble on a :

$$\begin{array}{l} \sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_i P_i \dot{Q}_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} P_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \forall i \tag{18}$$

et enfin

$$-H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{19}$$

Pour résumer on trouve qu'il y a une transformation canonique (elle l'est par construction car il vient de la forme du Lagrangien, $\sum_i p_i \dot{q}_i - H$) si, donnée une fonction $F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)$ on pose

$$\left\{\begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{array}\right. \qquad \text{voulant dire} \qquad \left\{\begin{array}{l} p_i = p_i\left(\{q_i\},\{Q_i\},t\right) \\ P_i = P_i\left(\{q_i\},\{Q_i\},t\right) \end{array}\right. \tag{20}$$

on inverse ces relations pour avoir explicitement $\{Q_i\},\{P_i\}$

$$\left\{\begin{array}{l} Q_i = Q_i\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) \\ P_i = P_i\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) \end{array}\right. \qquad \text{et si nécessaire, l'inverse} \qquad \left\{\begin{array}{l} q_i = q_i\left(\{Q_i\},\{P_i\},t\right) \\ p_i = p_i\left(\{Q_i\},\{P_i\},t\right) \end{array}\right. \tag{21}$$

et

$$K = H\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) + \frac{\partial F_1\left(\{q_i\},\{Q_i\},t\right)}{\partial t} = K\left(\{Q_i\},\{P_i\},t\right) \tag{22}$$

<u>Exemple :</u>

$$\left\{\begin{array}{l} f_+ = Q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_i}}(p + im\omega q)e^{-i\omega t} \\ f_- = P = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}}(p - im\omega q)e^{+i\omega t} \end{array}\right. \qquad \text{déjà rencontré} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \quad p = \sqrt{2m\omega_i}\ e^{i\omega t}\ Q - im\omega q \tag{24}$$

$$P = \underbrace{e^{2i\omega t}\ Q - \sqrt{\frac{im\omega}{2}}\ e^{+i\omega t}\ q}_{\frac{1}{\sqrt{2m\omega i}}p(Q,q,t)} - \sqrt{\frac{im\omega}{2}}\ e^{+i\omega t}\ q \tag{25}$$

$$= e^{2i\omega t}Q - \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ q \tag{26}$$

Mais

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ Q - im\omega q \tag{27}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{intégration}} \quad F_1(q,Q,t) = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ - \frac{1}{2}im\omega q^2 + g(Q,t) \tag{28}$$

aussi

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -e^{2i\omega t}\ Q + \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ q \tag{29}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{intégration}} \quad F_2(q,Q,t) = -\frac{1}{2}e^{2i\omega t}\ Q^2 + \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ + h(q,t) \tag{30}$$

et par comparaison

$$F_1(q,Q,t) = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ \underbrace{-\frac{1}{2}im\omega q^2}_{1)} + \underbrace{g(Q,t)}_{2)} \tag{31}$$

$$F_2(q,Q,t) = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ \overbrace{-\frac{1}{2}e^{2i\omega t}\ Q^2}^{2)} + \overbrace{h(q,t}^{1)} \tag{32}$$

et finalement

$$F_1(q,Q,t) = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ - \frac{1}{2}im\omega q^2 - \frac{1}{2}e^{2i\omega t}Q^2 \tag{33}$$

Donc on a

$$K(Q,P,t) = H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{34}$$

Il nous faut encore $q = q(Q,P,t)$. On rappelle que

$$P = e^{2i\omega t}\ Q - \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ q \tag{35}$$

d'où on a

$$q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{+i\omega t} Q - \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{-i\omega t} p == \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} \left[e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P \right] \tag{36}$$

Aussi, il nous faut $p = p(Q, P, t)$. On sait que $p = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ Q - im\omega q$
qui devient

$$p = \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ Q - \sqrt{\frac{im\omega}{2}}\ e^{i\omega t}\ Q + \sqrt{\frac{im\omega}{2}}\ e^{-i\omega t}\ P \tag{37}$$

$$= \sqrt{\frac{i\omega m}{2}} \left[e^{i\omega t} Q + e^{-i\omega t} P \right] \tag{38}$$

Donc l'Hamiltonien est :

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{39}$$

qui devient

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{i\omega m}{2} \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ \right) \right\} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left\{ \frac{1}{2m\omega i} \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ \right) \right\} \tag{40}$$

$$= \frac{\omega}{4} \left[i \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ \right) - i \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ \right) \right] = i\omega PQ \tag{41}$$

D'ailleurs

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} qQ - \frac{1}{2} m\omega i q^2 - \frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2 \tag{42}$$

et

$$\tag{43}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t}\ qQ - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 \tag{44}$$

et en y substituant $q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} \left[e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P \right]$ on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i}\ e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} \left[e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P \right] Q - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 = \tag{45}$$

$$= i\omega e^{2i\omega t} Q^2 - i\omega QP - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 = -i\omega QP \tag{46}$$

et finalement

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega PQ - i\omega QP = 0 \tag{47}$$

donc K =constante et, comme prévu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \end{array} \right. \tag{48}$$

donc Q et P sont des quantités conservées