Mécanique analytique — série 9

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Equations de Hamilton

A partir de la définition du hamiltonien, retrouver les équations de Hamilton. Les trouver à nouveau en minimisant la fonctionnelle $S[\{q(t)\},\{p(t)\}] \equiv \int dt\, G(q_i,\dot{q}_i,p_i,\dot{p}_i) \equiv \int dt\, (\sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i,q_i))$.

Exercice 2 : Transformation canonique et fonction génératrice

a) Déterminer la transformation canonique engendrée par la fonction génératrice de type F_1 :

$$F_1(q_i, Q_i, t) = \sum_{j=1}^{N} q_j Q_j$$

b) Trouver une fonction génératrice de type $F_4(p_i, P_i, t)$ qui engendre la même transformation.

Indications : un rappel sur les fonctions génératrices figure en fin d'énoncé.

Exercice 3 : Transformation canonique ?

On considère un système à une dimension (un degré de liberté).

a) Vérifier si la transformation suivante est canonique ($\lambda \neq 0$). Si ce n'est pas le cas, quelle modification apporter pour y parvenir ?

$$\begin{cases} P(p,q,t) &= p + \lambda q \\ Q(p,q,t) &= q - \lambda^{-1} p \end{cases}$$

b) Définir la transformation qui passe en coordonnées polaires l'espace de phase, c'est-à-dire $(p,q) \to (P,Q) = (r,\theta)$ (prendre p selon l'axe x et q selon l'axe y, et on se limitera à p et q positifs). Vérifier si cela conduit bien à une transformation canonique.

c) Modifier la transformation ci-dessus en : $(p,q) \to (P,Q) = (\frac{1}{2}r^2, \theta)$, et vérifier si elle est canonique.

Indications : utiliser les crochets de Poisson ou la symplecticité de la matrice jacobienne.

Exercice 4 : Utiliser les transformations canoniques

Etudier la dynamique du système décrit par le hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{l}{q}\right)^2 - \lambda q^2$$

a) Ecrire les équations de Hamilton dans ces coordonnées.

b) Définir une nouvelle impulsion $P(p,q,t)$ de sorte à ce que le nouveau terme cinétique soit canonique, c'est-à-dire de type $P^2/(2m)$.

c) Trouver une fonction $F_2(q,P,t)$ qui engendre cette transformation.

d) En déduire la nouvelle coordonnée généralisée $Q(p,q,t)$ ainsi que le nouvel hamiltonien $K(P,Q,t)$.

e) Résoudre les équations de Hamilton avec ces nouvelles coordonnées.

f) Inverser la transformation pour trouver la solution $p(t)$, $q(t)$. Vérifier ces solutions.

Exercice 5 : Parachutiste et hélicoptère

Un parachutiste en chute libre (donc sans parachute) est filmé depuis un hélicoptère. Celui-ci suit une trajectoire définie $h(t)$ (on ne considère que la dimension verticale).

a) Ecrire le hamiltonien décrivant le parachutiste vu depuis un référentiel fixe (terre).
b) Définir les nouvelles coordonnées $P(p,q,t)$ et $Q(p,q,t)$ qui décrivent le mouvement tel que vu depuis l'hélicoptère.
c) Essayer de deviner les équations du mouvement pour ces nouvelles coordonnées ($\dot{Q}$ et $\dot{P}$ en fonction de h).
d) Trouver une fonction de type $F_2(P,q,t)$ qui engendre cette transformation. Est-ce que cette transformation est canonique ?
e) Ecrire le hamiltonien ainsi que les équations de Hamilton pour ces nouvelles coordonnées.

Rappel : fonctions génératrices

Les systèmes décrits par (p_i, q_i) et (P_i, Q_i) sont équivalents si :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t},$$

où $F = F(p_i, q_i, P_i, Q_i, t)$ est appelée la fonction génératrice de la transformation. Il existe quelques choix particulièrement simples listés ci-dessous :

$$1: \quad F = F_1(q_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases}$$

$$2: \quad F = -\sum Q_i P_i + F_2(q_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases}$$

$$3: \quad F = \sum q_i p_i + F_3(p_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} \end{cases}$$

$$4: \quad F = \sum q_i p_i - \sum Q_i P_i + F_4(p_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} \end{cases}$$

Dans tous les cas :

$$K(P_i, Q_i, t) = H(p_i(P_j, Q_j, t), q_i(P_j, Q_j, t), t) + \frac{\partial F_\alpha(P_i, Q_i, t)}{\partial t}$$