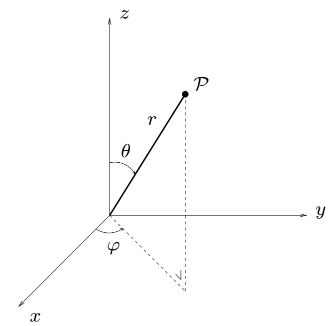
Mécanique analytique — série 11

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Hamilton-Jacobi



Considérer un point matériel de masse m se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ et soumis à un potentiel de la forme

$$V(r,\theta,\varphi) = A(r) + \frac{B(\theta)}{r^2}$$

où $A(r)$ et $B(\theta)$ sont des fonctions arbitraires. Le but de cet exercice est de trouver la solution générale des équations du mouvement en appliquant la méthode d'Hamilton-Jacobi.

a) Ecrire l'hamiltonien H du système en coordonnées sphériques.

b) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante et en trouver la solution générale en appliquant la méthode de séparation des variables. Nous noterons $S(r,\theta,\varphi,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$ la solution générale.

c) Si l'on utilise S comme fonction génératrice de type F_2 (i.e. $F_2(q_i,P_i,t) \equiv S(q_i,\alpha_i = P_i,t)$) d'un changement de variables canonique, quelles seront les équations du mouvement des nouvelles variables ?

d) Ecrire la solution générale des équations du mouvement (pour les variables p_i, q_i) en utilisant une fonction génératrice du type $F_2(q_i,P_i,t) \equiv S(q_i,\alpha_i = P_i,t)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

e) Considérer le potentiel $V(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\kappa}{r^2}$ avec les conditions initiales suivantes :

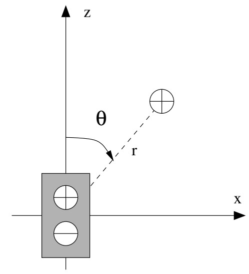
$$\begin{array}{lll} r(0) = r_0 \,, & \theta(0) = \frac{\pi}{2} \,, & \varphi(0) = 0 \\ \dot r(0) = 0 \,, & \dot\theta(0) = \omega \,, & \dot\varphi(0) = 0 \end{array}$$

   i. Exprimer les constantes P_i grâce aux relations $p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}$.

   ii. Quelles contraintes a-t-on sur le domaine de r ? Et sur celui de θ ?

   iii. Trouver la trajectoire et l'équation horaire grâce aux relations $Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$.

f) Considérer le potentiel $V(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\lambda\cos\theta}{r^2}$ avec $\lambda > 0$. Ce type de potentiel correspond à celui créé par un dipôle (voir illustration ci-dessous), loin de celui-ci. Considérer les mêmes conditions initiales que dans le point précédent sauf pour $\theta(0) = \theta_0$.



i. Exprimer les constantes P_i.
ii. Montrer que pour $\cos\theta_0 > 0$ une charge test ne peut en aucun cas s'écraser sur le dipôle.
iii. On suppose maintenant l'énergie positive. Quels sont alors les domaines de r et de θ ?
iv. Trouver les trajectoires pour les trois cas suivants : $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$, $\theta_0 = \pi$.
v. Essayer d'interpréter le résultat trouvé pour chacune de ces configurations.