Mécanique analytique — série 10

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Exercice complet Considérer le système unidimensionnel suivant :

$$H(p,q,t) = \frac{p^2}{2m} + \lambda pq + V(q)$$

a) Quelle est la dimension de λ ?

b) Définir une nouvelle impulsion P pour absorber toutes les contributions de p à H dans un terme cinétique $P^2/(2M)$ avec $M = 1$.

c) Trouver une coordonnée canoniquement conjuguée Q de sorte à ce que le nouvel hamiltonien K ne dépende pas explicitement du temps et qu'il n'y ait pas de couplage entre P et Q.

d) Quelles sont les contraintes à imposer sur $V(q)$ pour que le système soit stable (dans le sens où sa trajectoire reste cantonnée dans une région bornée de l'espace) ?

e) Considérer le cas du potentiel

$$V(q) = \frac{1}{2}\kappa q^2,$$

où κ est une constante quelconque.

i. Ecrire les équations de Hamilton (p,q).

ii. Déterminer les cas dans lesquels la condition du point d) est satisfaite ou non.

iii. Ecrire et résoudre les équations de Hamilton (P,Q) dans les différents cas, en fonction de l'énergie E (conservée) du système. Comparer la solution à vos prévisions du point d).

iv. Inverser les coordonnées afin d'exprimer le résultat pour (p,q), vérifier la solution.

f) Considérer le cas du potentiel

$$V(q) = \frac{1}{2}m\lambda^2\frac{q^6}{q^4+\alpha^4},$$

avec les même constantes m et λ que dans le hamiltonien de base.

i. Dessiner le potentiel pour Q. Il possède deux régimes que l'on pourrait qualifier d'état lié et état libre ; les définir.

ii. Pour l'état lié, étudier les petites oscillations autour de la position d'équilibre.

iii. Pour l'état libre, étudier le comportement asymptotique.

iv. Dans les deux cas, inverser la relation pour trouver le comportement de (p,q).