

Systèmes dynamiques

$$\text{Etat : } \begin{cases} \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \end{cases}$$

Def. d'un système
dynamique.

EX.: Système Hamiltonien

$$n = 2p$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = J \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) = \vec{F}(\vec{x})$$

$$\text{i.e. } F_i(\vec{x}) = \sum_j J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

EX.: Modèle de Lotka-Volterra

~ évolutions de populations en
biologie / écologie computationnelle.

$x_1(t)$: population de proies (lapins)

$x_2(t)$: ——— de prédateurs (renards)

• Sans interactions

lapins

$$\dot{x}_1(t) = \epsilon_1 x_1(t)$$

végétation; image des ressources

$$\epsilon_1 > 0$$

renards

$$\dot{x}_2(t) = -\epsilon_2 x_2(t)$$

mort

$$\epsilon_2 > 0$$

• + interaction

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \epsilon_1 x_1(t) - p_1 x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\epsilon_2 x_2(t) + p_2 x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

$$p_1, p_2 > 0$$

Pas un système hamiltonien, ^($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) mais
1 intégrale :

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\epsilon_1 x_1 - p_1 x_1 x_2}{-\epsilon_2 x_2 + p_2 x_1 x_2}$$

$$(-\epsilon_2 x_2 + p_2 x_1 x_2) dx_1 = (\epsilon_1 x_1 - p_1 x_1 x_2) dx_2$$

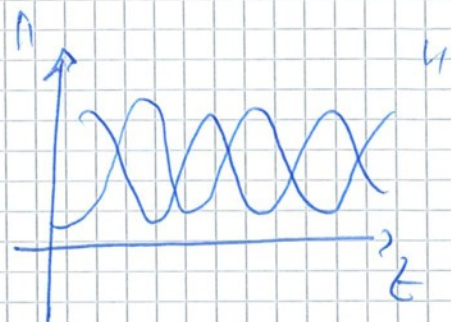
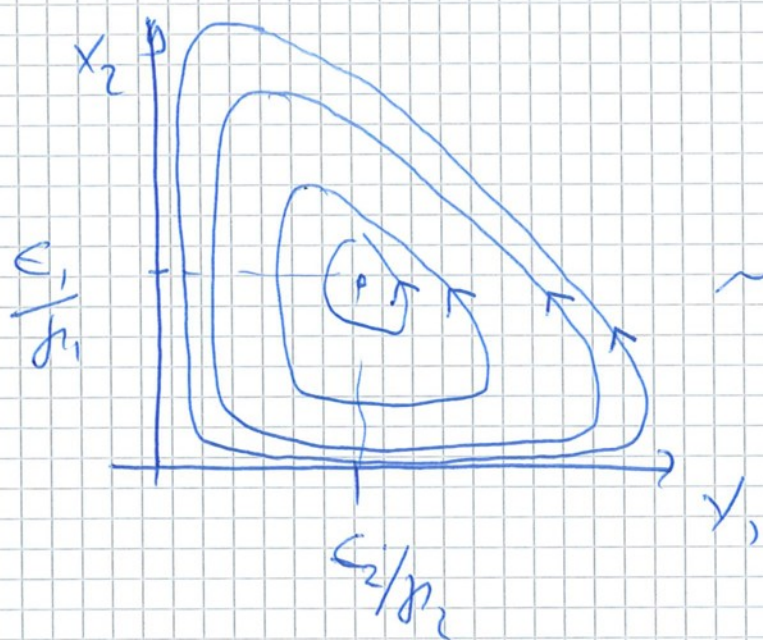
$$\times \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$\left(-\frac{\epsilon_2}{x_1} + p_2\right) dx_1 = \left(\frac{\epsilon_1}{x_2} - p_1\right) dx_2$$

$$\text{const} = \epsilon_1 \ln\left(\frac{x_2}{x_{20}}\right) + \epsilon_2 \ln\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)$$

$$-2 - p_1(x_2 - x_{20}) - p_2(x_1 - x_{10})$$

$\Rightarrow$ moment intéressant.



Ex.: Modèle de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + \rho x - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

$\sigma > 24.06$: attracteurs étrange ...
 $\sim$ chaos.

[Show (style)]

En général : $\forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \exists ! \text{ solution } \vec{x}(t),$
t.g. $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ $\forall t \geq 0$

Δ points fixes hyperboliques.

Δ Ceci est dans l'espace "de phase".

○ Systèmes conservatifs vs. Systèmes dissipatifs

Conservatif : $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

Dissipatif : $\nabla \cdot \vec{F} < 0$ || d.l.a. pertes
ou d'équilibre

○ Rem. : Systèmes amplificateurs (LASERS)
peuvent avoir (effectivement) $\nabla \cdot \vec{F} > 0$.

Pourquoi ? Etudes d'évolution temporelle
d'un volume d'un domaine V sous
l'influence de la dynamique.

$$V(t) = \int_{\phi_t^{-1}(\Pi)} dy_1 \dots dy_n = \int_{\Pi} J(t, \vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

t.g. : ϕ_t : le flot, qui donne l'image de Π au temps $t > 0$ suivant

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(\vec{x})$$

• $J(t, \vec{x})$ le Jacobien de $\vec{x}' \mapsto \vec{y}' \equiv \phi_t(\vec{x}')$ i.e. $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$

On va ~~de~~ montrer que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \int_{\Pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\vec{x}$$

Au premier ordre en Δt on a

$$\vec{y}' = \vec{x}' + \vec{F}(\vec{x}') \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \Pi_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \Delta t$$

On note $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

$\rightarrow J = \det(\mathbb{1} + A \cdot \Delta t)$

$\mathbb{1} + A \Delta t = \begin{bmatrix} 1 + A_{11} \Delta t & A_{12} \Delta t & \dots \\ A_{21} \Delta t & 1 + A_{22} \Delta t & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(\mathbb{1} + A \Delta t)$

$= (1 + A_{11} \Delta t) \begin{vmatrix} 1 + A_{22} \Delta t & A_{23} \Delta t \\ A_{32} \Delta t & \dots \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

$+ A_{24} \Delta t \begin{vmatrix} A_{12} \Delta t & A_{13} \Delta t & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$

$+ A_{33} \Delta t \begin{vmatrix} A_{12} \Delta t & A_{13} \Delta t \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \sim \mathcal{O}(\Delta t^2)$

Donc au premier ordre en Δt

on a (...)

$$\det(\mathbb{1} + A \Delta t) = (1 + A_{11} \Delta t) (1 + A_{22} \Delta t) \dots (1 + A_{nn} \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n A_{ii} \Delta t\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$= 1 + \text{Tr } A \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$A_{ii} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Rightarrow \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$$

$$\Rightarrow V(\Delta t) = V(0) + \Delta t \int_{\Gamma} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} d\vec{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(\Delta t) - V(0)}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \int_{\Gamma} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} d\vec{x}$$

$$\Rightarrow \text{si } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 0$$

$\rightarrow$ volume conservé et donc syst. cons.

$$\Rightarrow \text{si } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0 \rightarrow \frac{dV}{dt} < 0$$

$\rightarrow$ syst. dissipatif.

EX.: Système Hamiltonien

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

$\sim$ théorème de Liouville.

EX.: Lotka - Volterra

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} E_1 x_1 - g_1 x_1 x_2 \\ -E_2 x_2 + g_2 x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}' = \epsilon_1 - \mu_1 x_2 - \epsilon_2 + \mu_2 x_1$$

Ex.: Modèle de Lorentz

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -\delta x + \delta y \\ -xz + \rho x - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}' = -\delta - 1 - \beta < 0 \quad (\delta, \beta \geq 0)$$

~~Flux~~

Ex.: Force de frottement

$$\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau} \quad \sim \text{viscose}$$

avec $x = \dot{z}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{\tau} \\ \dot{z} = x \end{cases}$$

$$\rightarrow {}_{2D} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P}' = -\frac{1}{\tau} < 0$$

Def. / notation: flot.

Attracteurs

(systèmes dissipatifs)

Un sous-ensemble X de l'espace de phase est un attracteur si: $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\bullet \phi_t(X) = X$$

$$\bullet \exists \epsilon > 0 \text{ t.q. si } |\vec{y} - \vec{x}| < \epsilon, \vec{x} \in X, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\vec{y}) \in X.$$

(il existe un voisinage de X qui s'effondre sur X sous l'effet de la dynamique).

$$\bullet \nexists X_1, X_2 \text{ t.q. } X_1 \cup X_2 = X$$

$$\text{et } \phi_t(X_1) = X_1, \phi_t(X_2) = X_2.$$

synt. dissipative

$\Rightarrow$ points fixes attractifs

$\Rightarrow$ cycles limites ($\sim$ tores)

$\Rightarrow$ attracteurs étranges

Théorème

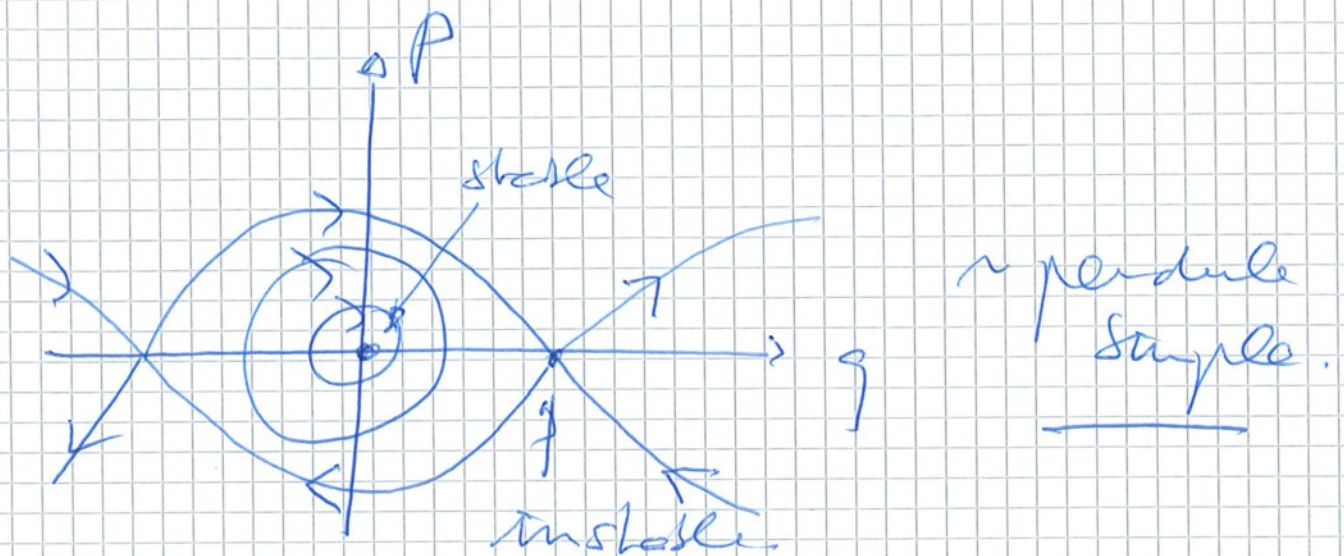
régularité

sur l'attracteur.

Remarque

momentum dissipatif, instabilité exponentielle locale sur l'attracteur

Pour des systèmes conservatifs, on s'intéresse aux points fixes - leur stabilité :



Point fixe : $\vec{F}(\vec{x}^*) = 0$.

$\vec{x}^*$: - asymptotiquement stable

$$\exists \delta > 0, \forall \vec{x}' \in X, |\vec{x}' - \vec{x}^*| < \delta,$$

pour systèmes dissipatifs seulement.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\vec{x}') = \vec{x}^*$$

- stable

$$\exists \delta > 0, \forall \vec{x}' \in X, |\vec{x}' - \vec{x}^*| < \delta, \forall t \geq 0, |\phi_t(\vec{x}') - \vec{x}^*| < \delta.$$

- " -

- $\vec{x}^*$ est instable.

Etude de la stabilité d'un point fixe : linéarisation de la dynamique.

$$\vec{x}' \rightarrow \delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^* \quad \text{point fixe avec } F(\vec{x}^*) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} = \delta \dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) &= \vec{F}(\vec{x}^* + \delta \vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \cdot \delta \vec{x} \\ &+ O(\delta \vec{x}^2) \end{aligned}$$

Notation: comme au paravant $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}$ est une

matrice $A_j = A_j(\vec{x}^*) = \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^*}$

$$\rightarrow \delta \dot{\vec{x}} = \underline{\underline{A}} \delta \vec{x}$$

Sol.: $\delta \vec{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}} t} \delta \vec{x}(0)$

ou $e^{\underline{\underline{A}} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{\underline{A}} t)^n}{n!}$

Hyp.: $\underline{\underline{A}}$ est diagonalisable.

On définit $\underline{\underline{A}} \vec{z}_j = a_j \vec{z}_j$

$$a_j \in \mathbb{C}, \vec{z}_j \in \mathbb{R}^n$$

On résout d'abord

Équa. diff. lin. (*)

$$\underline{\vec{z}}' = \underline{\underline{A}} \underline{\vec{z}} \quad ; \quad \underline{\vec{z}} \in \mathbb{C}^n$$

en développant $\underline{\vec{z}}(t) = \sum_j c_j(t) \underline{\vec{z}}_j$ sur les vecteurs propres de $\underline{\underline{A}}$.

$$\rightarrow \sum_j \dot{c}_j(t) \underline{\vec{z}}_j = \sum_j a_j c_j(t) \underline{\vec{z}}_j$$

la i -orthogonalité

$$\dot{c}_j(t) = a_j c_j(t)$$

$$\rightarrow c_j(t) = e^{a_j t} c_j(0)$$

$$\rightarrow \underline{\vec{z}}(t) = \sum_j c_j e^{a_j t} \underline{\vec{z}}_j$$

On remarque ensuite que $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

est une matrice réelle, or donc si

$\underline{\vec{z}}$ est une solution, alors $\text{Re}(\underline{\vec{z}})$ est

aussi car $\underline{\vec{z}}' = \underline{\underline{A}} \underline{\vec{z}}$



$$\frac{d}{dt} \text{Re}(\underline{\vec{z}}) = \underline{\underline{A}} \text{Re}(\underline{\vec{z}}) \quad (*)$$

$$\rightarrow \delta \dot{x} dt = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^n c_j e^{a_j t} z_j \right], \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

plus de dépendance
temporelle

On retrouve le même problème déjà abordé ~~ci-dessus~~ ^{plus haut}, où si $\operatorname{Re}(a_j) > 0$ pour au moins un j , alors le point fixe est instable. On peut montrer :

- Si $\operatorname{Re}(a_j) < 0 \quad \forall j \rightarrow \dot{x}^*$ asymptotiquement stable.
- $\exists j, \operatorname{Re}(a_j) > 0 \rightarrow \dot{x}^*$ est instable.

Si $\operatorname{Re}(a_j) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(a_j) = 0$ pour au moins 1 j , on ne peut pas conclure de l'analyse linéaire - termes quadratiques doivent être pris en compte.

+ dissipation / dissipatif / non dissipatif / conservatif

-14-

Intégrabilité, non-intégrabilité / régularité et chaos

Syst. Hamiltoniens

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(x, y)$$

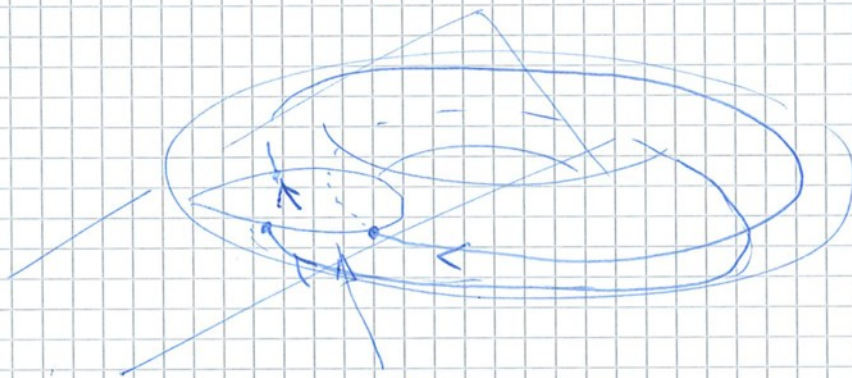
2D réel

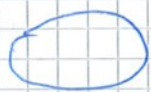
↓
4D espace de phase

↓
3D temps
 $E = \text{fixé}$

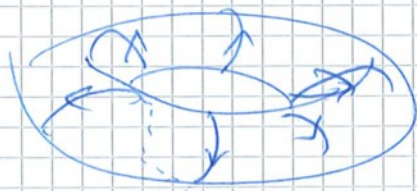
Visualisation: section de Poincaré.

① Système intégrable $\sim$ mouvement sur un tore.



Intersection du tore avec un hyperplan $\sim$  traj. régulières.

ω_1, ω_2 incommensurables



ω_1
commensurable.

Section de Poincaré.

② Système non intégrables :

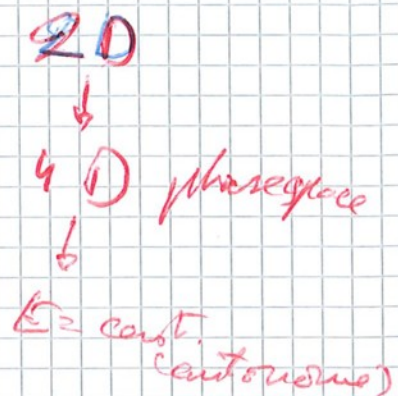
on définit un hyper-plan

p. ex. $y=0$

• on visualise les parages

sur (x, p_x) t.g.

$t_- : y < 0$ $t_+ : y > 0$



Sur la section

- courbe "lisse" bien définie dans le plan
~ mouvement régulier
- courbe ensemble de points, répartis de façon aléatoire (apparemment) dans tout ou partie du plan (p_x, x)
→ mouvement chaotique.

On peut aussi

- toutes traj. sont régulières
~ syst. intégrable

non-intégrable

- coexistence ~ syst. mixte

- toutes orbites sont **é**chaotiques

Systèmes Hamiltoniens autonomes

~ $E = \text{const.}$

La situation peut dépendre de E .

Ex.: Modèle de Hénon-Héles.

Slides

"Sensibilité exponentielle aux conditions initiales"

Exposants de Lyapunov :

Echantillonner, 1D

$$\dot{x} = F(x)$$

$$@ t_0 : x(t_0) \text{ et } x(t_0) + \delta x_0$$

- évolution + linéarisation

$$F(x(t) + \delta x(t)) = F(x(t)) + F'(x(t)) \cdot \delta x(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \delta x(t) = F'(x(t)) \cdot \delta x(t)$$

$$\rightarrow \frac{\delta \dot{x}(t)}{\delta x(t)} = F'(x(t))$$

$$\rightarrow \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \right| \stackrel{\int dt}{=} \int_0^t F'(x(t)) dt$$

$$\rightarrow \delta x(t) = \delta x(0) e^{\underbrace{\int_0^t F'(x(t)) dt}_p}$$

sur une trajectoire.

Def: Exposant de Lyapunov

$$\delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F'(x(t)) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} \right|$$

Remarque: Bifurcation etc.

$\delta < 0$: point asymptotiquement stable

$\delta > 0$: divergence exponentielle

En dimension n :

$$\delta \dot{\vec{x}} = \underline{\underline{Y}} \delta \vec{x}$$

$$Y_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad \left| \begin{array}{l} \text{matrice;} \\ \text{Jacobian;} \\ \text{exp.} \end{array} \right.$$

On discrétise la dynamique:

$$\dot{\vec{x}} \cong \frac{\vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

$$\rightarrow \vec{x}(t+dt) = \vec{x}(t) + \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot dt$$

On considère des temps discrets

$$t_n = n \cdot \Delta t \quad \leftarrow \text{petit mais fini}$$

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n + \vec{F}(\vec{X}_n) \cdot \Delta t$$

n times
 $\vec{F}^{(1)} \circ \vec{F}^{(0)} \dots \circ \vec{F}^{(n)}$

$$=: \vec{F}(\vec{X}_n)$$

$$= \vec{F}(\vec{F}(\vec{X}_{n-1})) = \vec{F}^{(2)}(\vec{X}_0)$$

$$\Rightarrow \delta \vec{X}_{n+1} = \vec{F}'(\vec{X}_n + \delta \vec{X}_n) - \vec{F}'(\vec{X}_n)$$

$$= \vec{F}^{(2)'}(\vec{X}_0 + \delta \vec{X}_0) - \vec{F}^{(2)'}(\vec{X}_0)$$

$$= \left(A(\vec{X}_n) \cdot A(\vec{X}_{n-1}) \dots A(\vec{X}_0) \right) \delta \vec{X}_0$$

avec les matrices $A \downarrow, \dots, A_n$

$$A(\vec{X}_p)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x} = \vec{x}_p}$$

avec valeurs propres $\lambda_1(N), \dots, \lambda_n(N)$

pour A_n . Exposants de Lyapounov

$$\rightarrow \rho_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\lambda_i(N)|$$

Ex. Höhen - Heiles

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{x^2 + y^2}{2} + x^2 y - \frac{1}{3} y^3$$

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \end{cases}$$

$$\downarrow \delta p_x, \delta p_y, \delta x, \delta y$$

$$\begin{cases} \delta \dot{p}_x = -\delta x - 2(x_0 \delta y + y_0 \delta x) \\ \delta \dot{p}_y = -\delta y - 2(x_0 \delta x - y_0 \delta y) \\ \delta \dot{x} = \delta p_x \\ \delta \dot{y} = \delta p_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1-2y_0 & -2x_0 \\ 0 & 0 & -2x_0 & -1+2y_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ valeurs propres

$$\underbrace{\sum \geq 0}_{\text{conservateur du volume}} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \pm \sqrt{-1 - 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \in i\mathbb{R} \text{ toujours} \\ \bullet \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \in \mathbb{R} \text{ si} \end{array} \right.$$

1 et -1 $\rightarrow$ Hamilton

$$x_0^2 + y_0^2 > \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ au-dessus d'une certaine énergie,
pour certaines trajectoire, un
exposant de Lyapounov devient positif