

Le théorème KAT

à suivre réamarrage

Nous voulons mieux comprendre comment le chaos apparaît en perturbant, d'abord faiblement, puis de plus en plus fort un système intégrable.

Un théorème dû à Kolmogorov, Arnold et Rosen est très instructif. Il dit que

En résumé :

KAT théorème : Sous certaines conditions, presque tous les tores invariants d'un système intégrable sont robustes sans ^{l'effacement} perturbation pas trop importante : ils sont déformés mais topologiquement restent des tores.

Le théorème est basé sur une technique de théorie des perturbations dite superconvergente.

Ebauche :

Variables angle-action.

$$H_0 = H_0(I_1, I_2)$$

$$H = H_0 + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

petit
paramètre
sans dimension

Supposons que

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 \neq 0} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) e^{i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)}$$

On va montrer qu'il existe une transformation canonique qui fait passer l'ordre de la perturbation de $O(\epsilon)$ à $O(\epsilon^2)$

On considère la fonction ~~généralisée~~

$$F_2(Q_1, Q_2; J_1, J_2) = J_1 Q_1 + J_2 Q_2$$

$$+ \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} \sin(n_1 Q_1 + n_2 Q_2)$$

qui génère une transformation canonique
de $(Q_i, I_i) \rightarrow (q_i, J_i)$
Elle ne dépend pas explicitement du temps

→ Il reste le même, mais à exprimer
dans les nouvelles coordonnées

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = I_i = J_i + \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} n_i \cos(n_1 Q_1 + n_2 Q_2)$$

$$\rightarrow H_0(I_1, I_2) = H_0(J_1, J_2)$$

$$+ \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \cos(n_1 Q_1 + n_2 Q_2)$$

- 2g -

$\perp O(\epsilon^2)$

... Par Taylor avec $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i}$.

$$\rightarrow H_1(\theta_1, \theta_2; J_1, J_2) = H_1(\varphi_1, \varphi_2; J_1, J_2) + O(\epsilon^2)$$

on néglige,

Et donc après la transformation canonique on obtient

$$H(\varphi_1, \varphi_2; J_1, J_2) = H_0(J_1, J_2)$$

$$+ \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \rho_{n_1, n_2} \cos(n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2)$$

$$+ \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2)$$

$$+ O(\epsilon^2)$$

On fixe la transformation canonique
en choisissant

$$g_{n_1, n_2} = - \frac{V_{n_1, n_2}(J_1, J_2)}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}$$

Discuter :

① $\epsilon \rightarrow \epsilon^2 \rightarrow \epsilon^4 \rightarrow \dots$

② validité: $\forall n_1, n_2:$

$$|n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2| \gg \epsilon V_{n_1, n_2}$$

→ pas valide proche d'un tore
avec deux fréquences
commensurables.

^ Résonance.